HAL open science

Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels.

Christine Chambris

▶ **To cite this version:**

Christine Chambris. Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels.. Education. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2008. Français. NNT : . tel-00338665

HAL Id: tel-00338665

https://theses.hal.science/tel-00338665

Submitted on 16 Nov 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

UNIVERSITE PARIS.
DIDEROT (PARIS 7)

École doctorale : « Savoirs scientifiques : épistémologie, histoire des sciences, didactique des disciplines »

Doctorat

Didactique des mathématiques

CHAMBRIS Christine

Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels.

Relationships between quantities and numbers in mathematics at primary school. Evolution of teaching over the 20th century. Knowledge acquired by present students.

Thèse dirigée par M. PERRIN-GLORIAN Marie-Jeanne

Soutenue le 6 novembre 2008

Jury

M. CHEVALLARD Yves,
M. DORIER Jean-Luc,
M. GAUVRIT Nicolas,
M. GISPERT Hélène,
M. HACHE Christophe,
M. PERRIN-GLORIAN Marie-Jeanne.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Remerciements

Je voudrais en premier lieu remercier Marie-Jeanne Perrin-Glorian, ma directrice de thèse. Sa connaissance intime de l'histoire de la recherche en didactique m'a assurément évité de nombreux écueils et permis de mieux interpréter certains choix actuels. Elle a su me laisser explorer des chemins qu'elle connaissait probablement bien peu, tout en me donnant les moyens de mettre en place une méthodologie rigoureuse. Qu'elle soit aussi remerciée pour ses qualités humaines, dont sa droiture, son engagement et sa volonté de faire progresser ceux avec qui elle travaille.

Jean-Luc Dorier me fait l'honneur d'être rapporteur. Il me permet de mieux comprendre certaines forces et faiblesses de mon travail.

Les écrits d'Yves Chevallard m'ont permis de poser des questions au cœur du travail et constitué un moteur essentiel pour les étudier. Il me fait l'honneur d'être rapporteur. Il m'apporte notamment une autre compréhension de, ce qu'il appelle, la première partie du travail.

Hélène Gispert est membre du jury. Je la remercie aussi pour m'avoir invitée dès le début de ma thèse à participer au groupe de travail « Textes officiels ».

Christophe Hache est aussi membre du jury. Qu'il soit en outre remercié pour m'avoir invitée à une certaine séance de méthodologie du master et pour sa présence discrète, bienveillante et efficace au 6E.

Nicolas Gauvrit, membre du jury et co-directeur de thèse, m'a introduite dans l'univers du traitement statistique des données. Il m'a épaulée pour cette partie de ma thèse qui m'apparaissait insurmontable.

Cette thèse doit énormément à tous ceux que j'ai côtoyés professionnellement en tant que professeur en collège, ensuite à la Cité des sciences, enfin en tant que formateur, en tout premier lieu, à l'équipe Maths de « l'IUFM d'Etiolles », à savoir Isabelle Zin, Georges Paret, Pascale Masselot, Valérie Larose, Joël Koskas, Jean-Michel Gélis, Rémy Coste, Michel Clément. L'équipe doit être remerciée à plus d'un titre. C'est d'abord un « espace » de convivialité professionnelle probablement rare, intellectuellement vif, généreux, sincère et entier… De nombreuses pages de la thèse portent sans doute la trace des échanges qui peuvent s'y vivre. La passation du pré-test a en outre bénéficié des observations de Michel, Jean-Michel, Pascale et Isabelle. Ils ont été, comme toujours, professionnels. Leurs observations ont, à la fois, permis de roder le test pour qu'il puisse être passé ensuite à plus grande échelle avec sérénité et apporté des éléments précieux pour les analyses. J'ai une pensée particulière pour Jean-Michel, pour sa générosité, sa modestie, son soutien indéfectible et tout le reste ! Mes pensées vont aussi à Isabelle. Nous avons commencé ensemble dans le métier de formateur. Ce bout de route côte à côte nous permet sans doute d'emprunter, aujourd'hui, des chemins différents. Je ne peux malheureusement pas citer tous ceux que j'ai croisés dans ma vie professionnelle. Je remercie en particulier Jeanne Bolon, Christine Le Brasseur, Michel Nouaille, Teresa Assude, Magali Hersant, Suzon Nadot, Chantal Laurent et Alain Le Breton. L'APM a aussi été un lieu de réflexion, je pense en particulier à Jean-François Bergeaut et Serge Petit.

Ma thèse s’est déroulée à l’équipe Didirem, c’est une grande chance que de travailler dans un tel environnement. Michèle Artigue m’a encouragée à m’orienter sur le sujet qui est au cœur de cette thèse et a, dans la foulée, co-dirigé mon DEA. Je ne peux que lui en être reconnaissante. Le séminaire Didirem « thésards » et l’équipe « géométrie » ont écouté mes « travaux en cours » à plusieurs reprises. Je remercie particulièrement Catherine Houdement pour sa résistance cordiale au cours d’échanges qui m’ont toujours fait avancer et André Pressiat. Je souhaite aussi une longue vie à la journée annuelle de l’école doctorale qui m’a fourni l’occasion chaque année de nouer quelques relations intellectuelles avec ma famille éloignée.

Même si je prends, à certains endroits, quelque distance avec « Le sens de la mesure », mon travail doit assurément beaucoup à Nicolas Rouche. Son livre m’accompagne depuis des années.

Daniel Perrin a relu un premier jet d’article puis une partie de ma thèse. Ses commentaires m’ont permis de m’engager sur des pistes auxquelles je ne pensais pas et incitée à clarifier plusieurs questions mathématiques et didactiques.

Il me faut aussi remercier ceux qui ont contribué à la réalisation « matérielle » de ce projet. Il y a des institutions, il s’agit principalement de l’IUFM de Versailles, l’équipe Didirem et l’École Primaire. Entre autres choses, elles m’ont « prêté » des livres, des élèves, un bureau, accordé du temps ou permis la reprographie des documents. Évidemment, une institution n’est pas grand chose sans ses sujets. Pour les livres, matériel au cœur de ce travail, il y a notamment Danielle Alexandre de l’IUFM de Paris, Francine Bobot de celui de Versailles, Sébastien Huton de l’IREM Paris 7. Josiane Hélayel s’est séparée de ses livres pendant plusieurs années. Je remercie Mesdames les Inspectrices Hodeau et Luce ainsi que les élèves et les enseignants des classes qui m’ont accueillie, Mesdames et Monsieur Bayada, Bellego, Bertrand, Bouisson, Bourdin, Gaudichon, Gérardin, Giraud, Lorentz, Molinet Burgun, Ozane, Perrin, Sévin. A chaque fois les élèves se sont engagés dans le travail proposé et presque toujours les enseignants ont pris de leur temps pour discuter de mes premières observations. Nadine Locufier a imprimé des documents d’une grande qualité pour le test. Nicole Gillet et Martine Lamy assurent les secrétariats de Didirem et de l’IREM Paris 7. Annie Sornaga veille sur la bibliothèque. Je les remercie aussi pour leur présence chaleureuse au 6E.

Que les thésards de Didirem soient remerciés. Caroline a un dynamisme communicatif. Avenilde m’a guidée dans les méandres de la TAD à des moments critiques. J’ai aussi une pensée particulière pour Fernand, Pablo, Minh et Elisabeth.

La dernière année de ma thèse a été joyeusement accompagnée par les thésards probabilistes ou informaticiens du bureau 5C9 et ses visiteurs, Maxime, Christophe, Karim, Julien, Luca, Pierre, Giulio, François, Marc, Mohamed, Katia, Vincent notamment. Je garde entre autres le souvenir de quelques discussions didactiques naïves ou sérieuses ! Une pensée particulière à François pour les longues heures de fin de thèse passées ensemble.

Cette thèse doit évidemment beaucoup à mes amis et à ma famille. Ils m’ont soutenue pendant de longues années.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

À Jean-Pierre

Et je pense à celui qui dirait : je n'ai pas besoin de la notion de chapeau pour parler de cette chose ronde que vous avez sur la tête, qui a un cuir à l'intérieur et un ruban à l'extérieur.

Lebesgue, La mesure des grandeurs

À l'enseignement par l'aspect, forme intéressante de la méthode concrète qui n'a pas dit son dernier mot et que le cinématographe va renouveler, il faut superposer une autre forme de la même méthode qui n'en est encore qu'à ses balbutiements, mais qui décuplera l'efficacité de l'art pédagogique, l'enseignement par l'action.

Instructions officielles, 20 juin 1923

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Annexes

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Introduction

Dans ce travail nous nous proposons d'étudier les relations entre les grandeurs et les nombres dans l'enseignement des mathématiques à l'école primaire au 20ème siècle.

Ces relations ont fortement évolué dans les mathématiques savantes au fil de l'histoire. Les grandeurs ont en effet fondé les nombres avant d'être remplacées par les entiers dans les constructions modernes des ensembles de nombres. Ces bouleversements épistémologiques dans le savoir savant ont eu un retentissement sur les mathématiques enseignées, même à l'école primaire. La réforme des mathématiques modernes en est sans doute emblématique.

Par ailleurs, les grandeurs participent de notre rapport au monde. On est amené à estimer mesurer, comparer des longueurs, des masses… et les technologies de mesurage et de calcul ont fortement évolué en un siècle. Ces modifications ont nécessairement une incidence sur ce qu'on enseigne des grandeurs et des nombres à l'école.

La question des relations entre les grandeurs et les nombres est importante sur le plan didactique dans la mesure où l'enseignement des nombres et du calcul occupe une place centrale à l'école. Elle l'est d'autant plus qu'en dépit de leur importance épistémologique dans la construction scolaire du rapport au nombre, la place accordée aux grandeurs dans la scolarité obligatoire a fortement varié sans qu'on ait toujours bien mesuré les effets que ces variations pouvaient avoir sur les connaissances des élèves.

Notre étude se situe dans une perspective écologique, nous utilisons le cadre théorique de la transposition didactique et de la théorie anthropologique du didactique pour la conduire. Nous commençons par une étude globale des relations entre les grandeurs et les nombres dans la scolarité primaire en utilisant les programmes en vigueur au 20ème siècle pour les mathématiques, nous cherchons notamment à mettre en relation les programmes et des savoirs savants relatifs aux grandeurs et aux nombres. Nous affinons ce travail, pour la période antérieure à la réforme, avec une étude de manuels scolaires du cours élémentaire, étude centrée sur les relations entre les grandeurs, les nombres entiers et les opérations sur ces nombres. De nos observations et de notre étude préliminaire des programmes et des théories, nous tirons des questions et des hypothèses sur les connaissances des élèves actuels. Pour éprouver nos hypothèses, nous élaborons un questionnaire que nous faisons passer à près de 300 élèves en fin de scolarité primaire. L'analyse des réponses au questionnaire nous permet de poser des questions plus précises sur l'enseignement actuel. Nous étudions ensuite spécifiquement celles qui concernent les relations entre connaissances sur le système métrique et sur la numération de position. Pour ce faire, nous conduisons une nouvelle étude de manuels scolaires, actuels cette fois. Nous cherchons à étudier l'enseignement de ces deux objets et à mettre en évidence les articulations qui existent (ou non) au sein de l'enseignement. Bien que plutôt brève, cette étude nous amène à de nouvelles questions sur l'enseignement actuel de la numération de position. Pour tenter d'y répondre, nous sommes amenée à étudier l'évolution de l'enseignement de la numération de position depuis le début du $20^{\text{ème}}$ siècle, en passant la réforme, la contre réforme et jusqu'à aujourd'hui. À chacune de ces étapes nous tentons de caractériser des savoirs savants qui peuvent sous-tendre les praxéologies mathématiques.

Le chapitre 1 présente la problématique et le cadre théorique. Le chapitre 2 contient l'étude des programmes et des théories des grandeurs. Le chapitre trois est consacré à l'étude des relations entre grandeurs, nombres et opérations dans les manuels anciens. Les chapitres 4 et 5 présentent respectivement l'élaboration et les résultats du questionnaire proposé à près de 300 élèves de CM2. Enfin, dans le chapitre 6, après une brève étude sur les relations de la numération de position et du système métrique dans des manuels scolaires actuels, nous étudions l'évolution de l'enseignement de la numération au cours du 20ème siècle.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Chapitre 1. Ecologie des grandeurs et des nombres, précision de la problématique

Dans ce chapitre, nous conduisons une revue de travaux. Plusieurs d'entre eux ont été écrits dans une perspective écologique, d'autres non. Certains font état de difficultés des élèves dans l'enseignement des nombres ou des grandeurs à l'école primaire. A travers ces différents travaux, nous essayons d'abord de caractériser l'écologie des nombres et des grandeurs dans l'enseignement français au cours de l'histoire. Ensuite, nous élargissons cette perspective au plan international. Ceci nous amène à réinterpréter des travaux plus ou moins anciens dans un cadre écologique. Nous repérons des différences dans le temps et dans l'espace, des différences dans les savoirs de référence, des différences relatives aux conditions de vie des objets d'enseignement. Ce chapitre nous amène à préciser nos questions : sur les rapports entre les savoirs enseignés et les savoirs savants ; sur les réseaux trophiques existant ou ayant existé dans l'étude des grandeurs, des nombres et des opérations ; sur la place des références à la vie courante dans l'enseignement de ces objets.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

1. Première ébauche de problématique

Au cours de l'histoire des mathématiques, les grandeurs ont été un puissant moteur du développement des nombres et du calcul. Les profonds bouleversements épistémologiques de la fin du 19ème siècle les ont éliminées des fondements des constructions contemporaines des ensembles de nombres, au profit des entiers d'abord, ceux-ci étant dans un second temps fondés sur les ensembles. Par ailleurs, les grandeurs participent de notre rapport au monde : nous sommes souvent amenés à estimer, mesurer, comparer des masses, des longueurs, des durées… en utilisant des instruments ou non et les technologies de mesurage et de calcul ont fortement évolué depuis 100 ans.

La question des rapports entre les grandeurs et les nombres est importante sur le plan didactique dans la mesure où l'enseignement des nombres et du calcul occupe une place centrale à l'école. Elle l'est d'autant plus qu'en dépit de leur importance épistémologique dans la construction du rapport au nombre, la place accordée aux grandeurs dans la scolarité obligatoire a fortement varié sans qu'on ait toujours bien mesuré les effets que ces variations pouvaient avoir sur les connaissances des élèves.

Avant la réforme des mathématiques modernes, l'enseignement des grandeurs occupe une place importante, à l'intérieur de l'arithmétique, dans les mathématiques de l'école primaire. Une étude des programmes anciens montre d'ailleurs qu'on peut interpréter au moins une partie des changements apportés par les programmes et instructions de 1923 comme la volonté d'articuler l'étude de la numération et du système métrique tant pour les entiers que pour les décimaux (Chambris, 2004). Une caractéristique visible des programmes de 1970 est le cantonnement des grandeurs à une rubrique « mesures : exercices pratiques », rubrique qui n'existait pas auparavant. Les programmes ultérieurs introduisent, localement, des grandeurs dans différentes rubriques du « numérique », sans toutefois supprimer la rubrique qui leur est dédiée.

Parouty (2005) étudie les compétences des élèves en numération des entiers au cycle 3 (3ème, 4ème, 5ème primaire), notamment leur capacité à résoudre des problèmes de numération de la « vie courante », elle constate qu'ils échouent massivement. Ces problèmes semblent peu travaillés puisque quand elle propose aux enseignants une série de tels problèmes à faire résoudre aux élèves et qu'elle les évalue ensuite, les élèves progressent dans différentes tâches de numération dont ces problèmes, surtout ceux de 3ème primaire. (cf. annexe pour deux exemples de problèmes)

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Autrefois, l'enseignement des grandeurs comportait de nombreuses références aux pratiques de la vie courante. Qu'apportait aux élèves, sur l'enseignement des nombres et des opérations, cet enseignement (ou que peut-on raisonnablement penser qu'il leur apportait) ? S'agissait-il d'enseigner des pratiques sociales, pour elles-mêmes, ou au contraire, de prendre appui sur cet enseignement pour mener d'autres apprentissages, plus conceptuels ?

Grandeurs et nombres semblent s'être séparés dans l'enseignement primaire en 1970. Les évolutions des technologies et des pratiques sociales de calcul et de mesurage rendent peut-être plus difficile l'apprentissage des nombres et des grandeurs aujourd'hui qu'hier. S'il a pu paraître légitime à une époque d'enseigner les nombres, pour eux-mêmes, puis de les appliquer aux grandeurs, que peut-on en dire aujourd'hui ? Les élèves, en fin de scolarité primaire, sont-ils capables d'utiliser conjointement leurs connaissances sur les grandeurs et les nombres pour traiter les situations qui impliquent des grandeurs ?

Nous voulons étudier l'évolution des relations entre grandeurs et nombres dans l'enseignement primaire et ce qui en résulte sur l'apprentissage, les connaissances des élèves actuels.

Notre objet d'étude sera d'abord assez étendu puisqu'à travers des textes plutôt généraux, les programmes en particulier, nous nous intéresserons à tout ce qui touche aux nombres et aux opérations en primaire dans leurs rapports avec les grandeurs[1] au fil du siècle. Nous le réduirons ensuite pour étudier les connaissances des élèves actuels sur une partie du domaine : les relations entre les grandeurs, les nombres entiers et les opérations sur ces nombres. Nous poursuivrons par une étude d'autres textes plus détaillés, de manuels scolaires notamment, sur un sujet encore plus limité pour interpréter une partie des résultats des élèves.

Nous allons maintenant présenter nos cadres théoriques d'analyse. Ceci nous permettra de développer un peu plus précisément nos objets d'étude.

2. Cadres théoriques

2.1. La théorie anthropologique du didactique

Les questions auxquelles nous essayons de répondre se situent assez naturellement dans le cadre théorique de la transposition didactique (Chevallard, 1991) et de la théorie

[1] Nous ne souhaitons pas toutefois nous laisser entraîner par ce qui pourrait concerner les questions d'incommensurabilité de grandeurs ou d'irrationalité des nombres pour le cas où elles se présenteraient à nous, ce qui ne se produit pas nécessairement en primaire.

anthropologique du didactique (TAD), l'écologie des savoirs étant un de ses principaux moteurs. C'est donc sur les outils conceptuels fournis par ces cadres que nous nous appuyons pour mener notre travail. C'est à dire, non seulement, pour décrire mais aussi pour comprendre les évolutions successives, leurs raisons et leurs effets possibles. Nous retenons la synthèse qui est faite de l'approche écologique par Artaud (1997).

- Praxéologie

Pour qu'un objet puisse vivre dans une institution, Artaud identifie deux types de conditions :

- celles liées à *l'organisation mathématique* (notée OM) dans laquelle l'objet est amené à prendre place,
- celles liées à *l'organisation didactique* (notée OD) dans laquelle l'organisation mathématique viendra prendre place.

On parle aussi de *praxéologies* mathématique et didactique.

Une *organisation mathématique* (ou une *organisation didactique*) est constituée de quatre composantes : un type de tâches (noté T) qui est un ensemble de tâches, une technique (notée τ) pour traiter le type de tâches, une technologie (notée θ) pour justifier la technique et une théorie permettant de justifier la technologie. Artaud signale que l'existence de la strate théorique apparaît critique notamment lorsqu'on étudie l'existence ou l'inexistence de certaines organisations didactiques. Nous n'étudierons pas les organisations didactiques. En revanche, pour étudier l'évolution des relations entre les grandeurs et les nombres nous serons amenée à élucider les organisations mathématiques pour ces deux objets. Par ailleurs comme nos questions rencontrent l'épistémologie des théories mathématiques nous serons amenée à considérer la strate théorique des organisations mathématiques que nous étudierons.

- Savoirs de référence

À l'origine, la transposition didactique ne s'intéresse qu'à la transposition du savoir savant constitué par les mathématiques. La notion de savoir savant a été étendue, dans La transposition didactique à l'épreuve, à d'autres *savoirs de référence* qui peuvent eux aussi être transposés (Arsac et al., 1994). La transposition d'un savoir de référence peut donc donner naissance à une praxéologie relative à ce savoir (que nous appellerons organisation du savoir, notée OS) et à une praxéologie didactique dans laquelle cette OS vient prendre place (et que nous noterons encore OD). Nous parlerons notamment des pratiques de référence pour le mesurage dans la vie courante. Il s'agit des pratiques de mesurage en vigueur dans la société et qui vivent notamment en dehors de l'école. Nous pourrons aussi parler des pratiques de

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

référence de calcul pour la vie courante, pour désigner les pratiques de calcul qui vivent notamment en dehors de l'école. Plus généralement, nous parlerons de pratiques de référence pour la vie courante pour évoquer des pratiques ou des techniques directement utiles pour la vie « hors de l'école ».

Chevallard a beaucoup écrit sur la réforme des mathématiques modernes sur la nécessaire légitimité du savoir enseigné : par rapport au savoir savant de référence, par rapport au savoir banalisé (Chevallard, 1991, pp. 25-26). Après avoir été un puissant moteur du développement des nombres et des opérations dans les mathématiques savantes, les grandeurs en ont été évacuées. Il est par exemple connu qu'au moment de la réforme on a essayé d'enseigner la théorie des ensembles en primaire. Ce choix apparaît à la fois comme un moyen d'enseigner un savoir légitime mathématiquement et de revaloriser ce qui est enseigné aux yeux du « grand public ». Peut-on caractériser plus précisément l'évolution des savoirs savants de référence dans l'étude des nombres et des opérations à l'école primaire à différentes époques dont la réforme ? Qu'en est-il des savoirs de référence pour l'étude des grandeurs ? Comment d'éventuelles modifications se manifestent-elles sur les tâches, techniques et technologies enseignées selon les époques ?

Dans (Arsac et al., 1994), Durey & Martinand montrent qu'en contextualisant un savoir savant de sciences physiques dans une ingénierie de fabrication, les étudiants d'éducation physique s'y intéressent et l'apprennent. Pour eux, dans cet exemple, la pratique sociale de référence, liée à l'ingénierie, donne une légitimité à l'enseignement du savoir savant. On ne se passe toutefois pas d'un savoir savant de référence. En revanche, Rogalski & Samurçay montrent comment une pratique professionnelle complexe peut être modélisée en un savoir de référence qui peut être transposé en vue d'une formation.

Ceci nous renvoie à nos objets d'étude. En effet, le rapport aux grandeurs dans la société a été modifié depuis un siècle (il suffit pour s'en convaincre de penser à l'évolution des instruments de mesure de masse ou encore à celle des vitesses de déplacement des hommes). Par suite, si on admet que des pratiques de la vie courante contribuaient largement à l'enseignement des grandeurs, on voit que cet enseignement peut devenir une question vive. Les pratiques enseignées parviennent-elles à évoluer avec les pratiques de référence ? Qu'en est-il de cette question pour l'enseignement d'aujourd'hui ?

Enfin, la question de la légitimité se pose d'une autre façon : quels sont les savoirs qu'il est légitime d'enseigner à l'école primaire « en mathématiques » ? Qu'est-ce qui leur confère leur légitimité ? Quelle sont les places respectives du savoir savant et des pratiques de référence de la vie courante dans cette légitimité ?

- Ecologie

Rapport institutionnel à un objet

Une façon de caractériser l'étude d'un objet dans une institution est en fait d'étudier l'ensemble des praxéologies dans lesquelles il est impliqué dans cette institution. On parle ainsi du rapport institutionnel à un objet.

Évidemment, ce rapport n'est pas un objet intemporel. Il dépend de ce qui existe dans l'enseignement à une période donnée. L'institution dans laquelle nous nous plaçons est celle de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire.

Nous serons amenée à déterminer le rapport institutionnel à plusieurs de nos objets d'étude, en particulier de la numération de position et du système métrique.

Niches, habitats, besoins trophiques

L'existence d'une organisation mathématique ne suffit pas à rendre possible l'existence d'un objet d'enseignement. Parmi les conditions repérées par Artaud, nous retenons en particulier que :

- Un objet ne peut pas vivre de façon isolée, il est nécessaire qu'il prenne place au sein d'une organisation mathématique plus ou moins développée. Il doit pouvoir y apparaître comme une partie d'un tout structuré (*loi du tout structuré*, Rajoson, 1988, pp. 135-138). Il doit donc entrer en interrelation avec d'autres objets. Les différents lieux où vont se nouer ces interrelations constituent des *habitats* pour l'objet. On peut considérer que ces relations constituent des chaînes trophiques, sortes de chaînes alimentaires du type A se nourrit de B qui se nourrit de C... Un objet a des besoins trophiques, des besoins nutritionnels, qu'il importe de satisfaire pour qu'il vive et en retour le fait d'être dans une chaîne lui permet d'exister dans l'enseignement. Les fonctions que remplit un objet au sein d'un habitat donné constituent les *niches* de l'objet ;
- Une technologie doit pouvoir justifier plusieurs systèmes tâches / techniques ou être associée à une tâche emblématique des mathématiques enseignées pour que son existence soit justifiée au sein d'un écosystème didactique ;

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Pour structurer l'étude, l'approche écologique préconise donc de repérer les *habitats* et, à l'intérieur de ces habitats, les *niches* des objets.

La question des besoins trophiques sera importante pour notre travail. En effet, il est par exemple connu que la réforme des mathématiques modernes a tenté d'importer dans l'enseignement secondaire et primaire des objets mathématiques « modernes ». On peut supposer que cela n'a pas été sans effet sur les besoins trophiques nécessaires pour étudier certaines notions même si un travail de transposition didactique a tenté, avec plus ou moins de réussite, de contrôler ces besoins.

Nous avons évoqué l'articulation du système métrique et de l'étude des nombres en 1923 visible dans les programmes et les instructions, et leur désarticulation probable en 1970. Ces éléments permettent de supposer que nombres et grandeurs vivaient, pour partie au moins, dans le même habitat avant la réforme et que cet habitat a été découpé en plusieurs habitats au moment de la réforme.

Parouty (2005) indique que lorsqu'on apprend aux élèves à résoudre des problèmes de numération en contexte ils progressent « en numération » et pas seulement pour la résolution de ces problèmes ce qui ne serait pas particulièrement remarquable. Toutefois, les enseignants n'ont pas l'habitude d'en proposer, ils considèrent d'ailleurs à plus de 80% que ces problèmes sont difficiles. Nous interprétons ces résultats comme un problème écologique : si ces problèmes ne sont pas habituellement proposés aux élèves dans l'enseignement actuel c'est parce qu'ils y vivent mal et s'ils y vivent mal c'est parce que des conditions écologiques nécessaires à leur vie ne sont pas réunies. En particulier quelles sont donc les niches potentielles de ces problèmes ? Sont-elles effectivement occupées par eux aujourd'hui ? Si non pourquoi ? La situation était-elle différente avant la réforme ?

Praxéologies emboîtées

Des développements plus récents de la TAD amènent à considérer plusieurs niveaux de praxéologies selon qu'elles englobent plus ou moins d'objets. Chevallard (2002) distingue donc des praxéologies plus ou moins complexes :

- *ponctuelles* associées à un seul type de tâches,
- *locales* qui fédèrent plusieurs types de tâches autour d'une même technologie,
- *régionales* qui articulent des praxéologies locales au sein d'une même théorie,
- et enfin *globales* qui amalgament des organisations régionales en articulant plusieurs ensembles théoriques.

Cette question des praxéologies emboîtées nous intéresse particulièrement. En effet, nous avons dit que les grandeurs et les nombres avaient été séparés au moment de la réforme. Ce faisant, il est bien possible que des praxéologies globales ou régionales aient disparu. Dans un texte assez ancien, Chevallard (1992) pointe d'ailleurs que :

> (…) la Réforme provoque un bouleversement écologique au sein du curriculum, en déréglant nombre d'écosystèmes mathématiques, produits d'une évolution longue et complexe, dont certains, aujourd'hui encore, n'ont pu être revitalisés.

Nous voudrions identifier les praxéologies à l'œuvre avant la réforme dans le domaine des nombres, des grandeurs et des opérations, en nous limitant au domaine des nombres entiers. L'identification des niches des grandeurs dans l'enseignement ancien et actuel ne pourrait-elle pas nous permettre de repérer des conditions favorables à la vie de certains objets aujourd'hui ?

Ostensifs

Artaud rappelle que l'existence de certains ostensifs (signes) apparaît critique du point de vue des praxéologies mathématiques. Bosch & Chevallard (1999) écrivent : « Nous avons montré que le simple remplacement d'un ostensif par un autre, sans modification apparente de la praxéologie initiale qui l'intégrait, pouvait bouleverser complètement l'évolution de l'activité, aussi bien au niveau technique qu'au plan des technologies et des théories justificatives, voire des types de tâches mêmes. ». Or il est connu que la réforme des mathématiques modernes a eu un effet important sur les outils symboliques disponibles dans l'enseignement.

Rappelons qu'un ostensif a notamment une valence instrumentale. Cette valence instrumentale peut être considérée de façon absolue. Par exemple, la notation $x^{\frac{1}{2}}$ permet d'utiliser la formule générale de dérivation de x^n ce que ne permet pas $\sqrt{x}$. La notation $x^{\frac{1}{2}}$ a ainsi une valence instrumentale plus grande que la notation $\sqrt{x}$.

Au sein d'une institution donnée, certaines manipulations ostensives peuvent apparaître illégitimes notamment parce que leurs fondements théoriques ne seraient pas assurés, tel est par exemple le cas des « calculs avec unités » qui semblent avoir été interdits pour cette raison dans l'enseignement des mathématiques et réhabilités récemment.

Nous étudierons particulièrement les ostensifs à différentes époques pour la numération et le système métrique. Observe-t-on des modifications ? des apparitions ? des disparitions ? Le cas échéant, quelle incidence cela a-t-il sur les praxéologies mathématiques ? Y a-t-il une congruence entre les ostensifs qu'on trouve dans l'étude du système métrique et dans celle de

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

la numération ? Une faible congruence n'est pas favorable à l'utilisation des connaissances d'un domaine pour étudier l'autre.

Chronogenèse

A ces conditions spécifiquement écologiques, Artaud rappelle que des conditions plus générales sont nécessaires. Parmi celles-ci, pour rendre l'enseignement possible, il faut notamment pouvoir répartir les objets d'enseignement entre ancien et nouveau, ceci constitue la chronogenèse.

2.2. Les registres sémiotiques de Duval

Nous avons déjà présenté une partie de nos outils pour étudier les questions sémiotiques : les ostensifs pour les questions d'ordre écologique. Toutefois nous proposerons certaines analyses à visée cognitive. Pour les conduire nous serons amenée à utiliser un autre cadre théorique.

Nous ferons appel à la théorie des registres (Duval, 1995). Par exemple, la langue naturelle est un registre ; l'écriture de nombres avec une barre de fraction et l'écriture décimale des nombres sont deux registres pour l'étude des nombres rationnels ou décimaux. Pour Duval, toute activité mathématique doit mobiliser au moins deux registres pour produire de la signification. C'est même la confrontation entre les registres qui la produit. Par suite, il estime que l'activité mathématique peut principalement s'analyser en termes :

- de traitement : il s'agit de transformer une représentation en une autre en restant au sein d'un registre donné,
- et de conversion entre deux registres : il s'agit de transformer une représentation d'un registre donné en une autre d'un autre registre.

Duval souligne que la conversion de registre est essentielle dans l'activité mathématique et dans toute activité de pensée.

3. Des travaux de didactique sur l'enseignement français et son histoire

Nos questions ne s'inscrivent pas directement dans la suite de travaux existants. Toutefois, d'autres se sont intéressés à des questions qui rencontrent les nôtres. Nous présentons maintenant les éléments que nous en avons retenu pour préciser notre problématique.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

3.1. Neyret et les traités de référence

▪ Des résultats de Neyret

Neyret (1995) s’intéresse aux institutions de formation des enseignants. Il regarde cette question à travers l’étude des fractions et décimaux. Il s’intéresse notamment aux savoirs de référence pour la formation des enseignants. Nous sommes plutôt du côté des apprentissages des élèves, toutefois on peut imaginer que les savoirs de référence pour ce qui est enseigné aux élèves ne sont pas étrangers aux savoirs de référence pour les maîtres. Ceci constitue une première raison pour que nous nous intéressions aux travaux de Neyret.

Neyret définit ce qu’est un *traité*. Un traité est un livre produit par un auteur appartenant à la sphère de production du savoir ou très proche de celle-ci, dans le but d’élémenter le savoir à enseigner. Élémenter le savoir consiste à extraire les éléments d’une science, en fournir un texte à partir duquel on peut générer l’ensemble des connaissances de l’époque sur la science en question (p. 57).

Neyret cite le rapport d’Arbogast (1792) sur la composition des livres élémentaires destinés à l’instruction publique. Il y a deux types d’ouvrages nécessaires. Nous nous intéressons au premier type, les autres sont destinés aux élèves :

> [Les ouvrages doivent être rédigés] par les premiers savants, par les hommes supérieurs dans une science, dans un art, ceux qui en ont sondé les profondeurs, ceux qui ont reculé les bornes, qui soient capables de faire des éléments où il n’y ait plus rien à désirer, parce qu’eux seuls peuvent donner la précision, la clarté et la netteté nécessaires, et extraire de tout l’ensemble de la science les idées fondamentales, et les théories qui doivent entrer dans les éléments servant d’introduction à toutes les branches connues de la science elle-même.

Pour Neyret, ce sont ces livres là qui vont constituer les traités. Il les considère comme des institutions de formation des enseignants.

Neyret identifie notamment les traités à l’œuvre au 19ème siècle et début du 20ème pour l’enseignement des décimaux. Le traité d’arithmétique, à l’usage de la marine et de l’artillerie, de Bezout[2] dont la première édition date de 1764 et les notes sur l’arithmétique, à l’usage des candidats de l’école polytechnique et de l’école spéciale militaire, de Reynaud qui viennent compléter le traité de Bezout au début du 19ème siècle semblent avoir eu une grande importance. D’après Neyret, le traité de Bezout a été remplacé progressivement par celui de Reynaud. Il précise d’ailleurs (p. 56) qu’Harlé (1984) indique que le plan d’étude de

[2] Nous utilisons l’orthographe Bezout et non Bézout. Il semble que les deux soient répandues. En particulier, sur l’exemplaire du traité que nous utilisons, il est écrit Bezout.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

l'arithmétique dans les manuels scolaires en primaire est le plan du traité de Bezout. Ce lien entre le traité et les manuels scolaires du début du siècle constitue une autre raison de notre intérêt pour les traités.

Neyret considère qu'on peut interpréter la naissance du traité de Reynaud comme une adaptation à une crise dans l'enseignement des mathématiques élémentaires où le traité de Bezout est mis à mal par l'émergence de l'algèbre dans des textes qui peuvent servir de référence pour les enseignants. Reynaud perfectionne le traité de Bezout pour lui donner plus de cohérence pour la résolution des problèmes d'arithmétique notamment, ce qui permet d'échapper à l'utilisation précoce de l'algèbre.

Neyret conclut sa thèse en pointant l'absence de traité, en 1995, et la « nécessité de disposer d'un nouveau traité qui « coiffe » à la fois le collège et l'Institution de formation des professeurs des écoles ».

- Discussion : deux types de savoir savant

Nous sommes très préoccupée par la question des savoirs savants de référence. La définition du traité nous amène en fait à considérer qu'il y a deux types de savoirs savants :

- le savoir savant utile à la sphère de production des savoirs,
- le savoir savant « mathématiquement correct » mais qui est utile pour (ou adapté à) l'enseignement des « commençants ». *A priori*, ce savoir n'est pas utile du point de vue de la production des savoirs.[3]

Même si ces deux types de savoirs savants peuvent s'intéresser à des objets « identiques », ils ne vont pas les regarder de la même façon. Par exemple, l'explicitation des axiomes de Peano pour construire l'ensemble des entiers naturels est utile pour la sphère productrice des savoirs alors qu'elle ne l'est peut-être pas pour l'enseignement primaire. Pourtant une construction « mathématiquement correcte » de l'ensemble des entiers naturels nous semble nécessaire pour cet enseignement. Une telle construction devrait être adaptée, en termes de besoins trophiques notamment, aux élèves de primaire, à leurs capacités cognitives en particulier. Pour nous, un traité de référence pour l'enseignement contient donc nécessairement un savoir savant du deuxième type.

---

[3] L' « inutilité » de ce savoir ne va d'ailleurs pas forcément de soi. Gispert (2007) montre justement l'influence réciproque des savoirs organisés pour l'enseignement et la production de savoirs en mathématiques à la fin du $19^{\text{ème}}$ siècle et au début du $20^{\text{ème}}$. Toutefois, il s'agit de l'enseignement supérieur.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Rouche (1992), dans « Le sens de la mesure », propose une construction théorique, évoquant des activités pour des élèves, pour l'enseignement des nombres rationnels et de la proportionnalité à partir des grandeurs. Nous considérons que ce livre est une tentative d'élaboration d'un traité. C'est d'ailleurs ainsi que nous comprenons la préface du livre, écrite par Bkouche (professeur d'université en mathématiques et animateur à l'IREM de Lille). Dans la conclusion, il écrit :

> « Le problème premier de l'enseignement reste donc de relier la connaissance intuitive et les constructions sophistiquées de la connaissance scientifique, l'enseignement élémentaire jouant un rôle essentiel dans la mise en œuvre de cette liaison. C'est cette nécessaire liaison que Nicolas Rouche a mise en valeur dans son ouvrage, apportant ainsi une remarquable contribution à l'enseignement de la mesure des grandeurs laquelle reste un aspect essentiel de la pensée mathématique. On ne peut que souhaiter que les enseignants lisent et méditent cet ouvrage. »

3.2. Bronner et le numérique dans le secondaire

Bronner (1997, 1999, 2007) étudie le numérique dans le secondaire comme produit des transformations curriculaires depuis 1850. Commençons par préciser quelques différences entre nos objets d'étude. La première différence concerne les cycles d'enseignement : nous étudions l'enseignement primaire, il étudie le secondaire. La première conséquence, la plus visible, est que là où il se concentre sur l'irrationalité des nombres, nous nous concentrons sur la numération de position des entiers. De plus, l'école primaire, quelle que soit l'époque, accorde une place non négligeable aux références à la vie courante, ce que fait moins le secondaire. Ces pratiques sont au cœur de notre questionnement. Par ailleurs, ce qui rend notre étude possible est à l'origine d'une autre différence : en effet, une particularité de l'enseignement primaire est sans doute que, malgré les réorganisations successives de contenus, ces derniers ont une grande permanence au fil du temps. Ainsi, malgré les vicissitudes, des grandeurs ont-elles toujours été maintenues au programme de l'école primaire ce qui nous permet d'étudier, au fil du temps, les rapports entre les grandeurs et les nombres. D'une certaine façon, le système que nous regardons est décentré par rapport à celui de Bronner, là où il étudie le numérique et ses relations avec d'autres domaines, nous étudions deux domaines, les grandeurs, le numérique, et leurs relations.

Nous rapportons ci-après quelques-uns des résultats de Bronner. En effet, même si l'enseignement secondaire n'a pas toujours été la « suite » de l'enseignement primaire, il nous est difficile d'imaginer *a priori* une discontinuité totale entre les pratiques des deux institutions, en particulier il est clair que pour certains programmes, si ce n'est tous, leur production ne peut être considérée comme le fruit d'un mouvement interne à l'enseignement

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

primaire, mais s'inscrit dans des mouvements plus larges (période de l'après deuxième guerre mondiale, réforme des mathématiques modernes notamment).

Aussi, les périodes que Bronner dégage peuvent-elles éclairer notre travail. En 2007, il identifie cinq périodes pour le Numérique dans le secondaire (six périodes en 1997, nous notons 2 et 2 bis les deux périodes qui ont fusionné ensuite et sont devenues « deux périodes de préparation de la Réforme des Mathématiques Modernes ») :

1) 1854 à 1947 : la période classique,
2) 1947/1958 : la période intermédiaire,

2 bis) 1958/1968 : la préparation de la Réforme des Mathématiques Modernes,

3) 1968 à 1978 : la Réforme des Mathématiques Modernes,
4) 1978 à 1996 : fermeture de la réforme en plusieurs temps,
5) 1996 à 2005 : la période actuelle.

Bronner considère que la période classique et celle des mathématiques modernes sont deux périodes de complétude mathématique et didactique alors que de 1978 à 2005 on assiste à une grande instabilité qui conduit à une incomplétude des praxéologies.

Il identifie les environnements théoriques (au sens de la TAD), les savoirs de référence, pour les différentes périodes :

> - un environnement théorique se fondant sur une théorie de la mesure et des grandeurs incommensurables : la période classique (1854-1947) ;
> - l'algèbre et les structures algébriques : la période (1947-1968) ;
> - un ensemble structuré à partir des développements décimaux : la réforme des mathématiques modernes (1968-1978) ;
> - un ensemble « fourre-tout », contenant tout nombre se présentant dans le travail : les périodes de fermeture de la réforme des mathématiques modernes (1978 à 1996) ;
> - une droite réelle dans la période actuelle : les programmes mis en place en sixième en 1996, puis en lycée en 2000 (pour la classe de seconde). (Bronner, 2007, p. 31)

Bronner (2007) décrit ainsi l'environnement théorique du numérique de la période classique :

> En fait, elle [l'organisation mathématique de la période classique 1854-1947] va se fonder sur un environnement théorique de la mesure des grandeurs et un contrat numérico-géométrique. En effet, une théorie de la mesure est sous-jacente à la construction du numérique, affichée en général en début des ouvrages d'arithmétique :
>
> « Mesurer une grandeur, c'est s'en faire une idée précise en la comparant à une autre grandeur de même espèce, que l'on connaît. (…) Le résultat de la comparaison d'une grandeur à son unité s'exprime par un nombre. ». (Guilmin, 1855)
>
> (…)
>
> Cette théorie engendre un contrat numérico-géométrique très prégnant et elle permet la constitution de milieux pour la construction des nombres. Elle sera toujours présente en « toile de fond » à cette époque. Par exemple, pour le traitement des nombres fractionnaires, Neveu (1915) y fera constamment référence :
>
> « On peut toujours supposer qu'un nombre fractionnaire, quelle que soit la nature [de la grandeur] qui lui a donné naissance, soit la mesure d'une longueur »

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

> ou encore
>
> « Deux nombres fractionnaires sont égaux lorsqu'ils mesurent la même longueur ou des longueurs égales, ces longueurs étant mesurées avec la même unité ». (Bronner, 2007, pp. 31-32)

Bronner relève donc des changements théoriques importants dans le secondaire après la deuxième guerre mondiale puis au moment de la réforme notamment. Il ne les attribue apparemment pas à un manque de légitimité, ce qui est pour nous une possibilité (cf. supra Chevallard).

Si, en étendant les conclusions de Bronner à l'enseignement primaire, on admet, qu'à une certaine époque, une théorie de la mesure des grandeurs constitue l'« environnement théorique du numérique », on voit bien que la mise à l'écart des grandeurs par la création du domaine « mesures » est susceptible de créer un bouleversement important dans l'étude de nos objets. Nous voulons étudier cette mise à l'écart. Nous étudierons conjointement les environnements théoriques pour les grandeurs et le numérique en primaire à différentes époques.

3.3. Brousseau et l'enseignement actuel des grandeurs et des nombres

Dans deux articles assez récents, Brousseau (2001, 2002) recherche des causes de l'affaiblissement (réel ou supposé) de l'enseignement des grandeurs, des nombres et des opérations. Le texte de 2002 tente de dresser un panorama de l'étude des grandeurs au 20ème siècle mais Brousseau dit que ce n'est que l'amorce d'une étude qui reste à faire. D'autres questions sont communes aux deux textes et les arguments pour y répondre, proches.

Brousseau déplore l'état actuel de l'enseignement des grandeurs en primaire :

> Il s'agit ici d'identifier les problèmes de didactique liés à la notion de grandeur et à l'apprentissage des « grandeurs » dans la scolarité obligatoire. Mon intérêt pour ce sujet n'est pas récent. J'ai l'impression d'assister, impuissant, à des dégradations drastiques des conditions de son enseignement sous l'effet de forces incoercibles et ignorées par mes contemporains. (Brousseau, 2002 a, p. 331) [4]

Il avance des explications :

> Au cours de la scolarité obligatoire et surtout primaire, l'apprentissage des grandeurs était au siècle dernier [le 20ème] à la charge presque exclusive du programme de mathématiques. Or plusieurs processus, principalement deux, menacent de rendre plus difficile l'enseignement de ces connaissances. Ce sont : le changement de rattachement épistémologique consécutif à l'évolution des sciences d'une part et l'évolution des technologies métrologiques et de calcul d'autre part. (Brousseau, 2002 b, p. 37)

---

[4] (Brousseau, 2002) a deux versions : l'une sous forme papier, achevée, la version a) ; l'autre sous forme électronique, inachevée, la version b). La version a) correspond aux deux premières parties de la version b) qui en comporte cinq. Nos références sont relatives à la version achevée du texte lorsqu'elle existe.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Nous faisons ci-après une synthèse des symptômes repérés et des causes évoquées, le cas échéant. Lorsque cela nous semble nécessaire, nous proposons des analyses complémentaires. Concernant les questions de rattachement épistémologique, Brousseau propose l'analyse suivante :

> La solution des problèmes - mathématiques - a conduit les mathématiciens à distinguer et étudier séparément certains objets et concepts, puis à les abandonner lorsque leur connaissance avait été "éclaircie". Alors l'intérêt s'est consacré longtemps
> - sur la construction de l'ensemble des nombres appropriés aux mesures,
> - puis sur celles des procédés d'intégration, c'est-à-dire sur les fonctions-mesure,
> - et sur la structure des espaces susceptibles de supporter ces fonctions. (Brousseau, 2002 b, p. 36)

Il ajoute que, du fait de l'évolution des mathématiques, les mathématiciens ont renvoyé aux autres disciplines la définition des grandeurs. Par suite, les propriétés intrinsèques des grandeurs sortent du domaine des mathématiques. Il reste au mathématicien les structures des espaces et les fonctions-mesures. Il précise :

> La difficulté vient de ce que les grandeurs sont sorties du domaine des mathématiques. La référence de l'enseignement des mathématiques à l'école ne peut être réduite aux mathématiques « savantes ». (Brousseau, 2001)

Il semble donc que pour Brousseau, les causes de la crise sont d'abord à chercher dans la légitimité du savoir enseigné. Pour lui, le savoir savant relatif aux grandeurs se situe dans la théorie de l'intégration de Lebesgue (« la structure des espaces susceptibles de supporter ces fonctions ») puisque c'est ainsi que la « mesure » a évolué au sein des mathématiques et que la problématique s'est déplacée au fil du temps. Quant aux pratiques de la vie courante qui pourraient constituer une autre source de légitimité, il souligne que les évolutions technologiques de mesurage les ont fait largement évoluer en les éloignant de la manipulation des grandeurs-objets (objets en tant qu'ils représentent des grandeurs). En effet, pour mesurer, il suffit aujourd'hui bien souvent de lire un nombre sur un cadran ce qui supprime notamment la confrontation aux grandeurs-objets intégrées dans les instruments traditionnels de mesure de longueur, masse et capacité notamment : par exemple utiliser un poids d'un kilogramme permet de soupeser la masse d'un kilogramme. Néanmoins, nous ajoutons que, pour la longueur notamment, les instruments traditionnels ont sans doute mieux résisté que pour d'autres grandeurs : manipuler un mètre en bois (d'un mètre, donc) constitue encore une pratique de référence.

Les pratiques anciennes de mesurage rendaient visibles les opérations sur les grandeurs, elles permettaient en outre d'en déduire les nombres. Avec les instruments numériques, on peut avoir accès au nombre (d'unités) sans éprouver matériellement l'unité de mesure. Il se trouve que le report de l’unité est en général considéré comme essentiel du point de vue l’apprentissage des grandeurs et des nombres.

A propos des nombres et du calcul, Brousseau estime que la diffusion des technologies de calcul électronique fait perdre aux calculs qu’on enseigne leur caractère de pratiques de référence pour la vie courante.

Que faire donc lorsque les pratiques de référence relatives au mesurage et au calcul notamment, semblent presque étrangères à ce qui semble nécessaire aux apprentissages des jeunes élèves ? Ces questions admettent-elles des réponses différentes selon les époques ?

Une autre pierre d’achoppement semble se situer dans la disparition des nombres abstraits et concrets. La suppression des unités dans les calculs en 1970 est signalée comme la réponse « à des objections récurrentes des mathématiciens » (Brousseau, 2002 b), entérinée par Lebesgue qui aurait réclamé le rejet de l’étude des grandeurs en mathématiques[5]. Brousseau regrette l’évolution du statut des nombres et constate le fait qu’*ils se présentent comme de l’algèbre*. Dans (Brousseau, 2002 b), il constate que, dès le CP, les calculs sont écrits comme des égalités numériques et interprète ce fait comme une pénétration de l’algèbre en primaire, ce qui est moins net dans (Brousseau, 2001) où les nombres sont simplement considérés par le professeur « directement comme des objets mathématiques ». Il rattache cette évolution à la volonté de faire, à l’école primaire, « comme en mathématiques ». Comme solution, il envisage une réintroduction des unités de mesure, tout en signalant la difficulté de la concilier avec l’apprentissage de l’algèbre au collège. Il nous semble que se joue, en arrière plan de cette discussion sur les nombres concrets et abstraits, sur le fait que les objets manipulés soient mathématiques, la question de la définition des savoirs savants de référence pour le numérique à l’école primaire aujourd’hui :

> Les nombres semblent avoir changé de statut : Traditionnellement (…) ils sont au service des *mesurages* de différentes grandeurs et se présentent donc presque partout accompagnés d’unités (nombres « concrets »), les « nombres abstraits » étaient définis comme des rapports. Dans la pratique actuelle, le professeur les considère implicitement et directement comme des objets mathématiques. Ils ne sont ni concrets, puisque l’expression des unités est exclue de l’écriture des calculs, ni abstraits car le mot même de *rapport* a disparu des programmes et des manuels. Cette position permet au professeur de considérer les calculs écrits par l’élève comme des « égalités numériques » semblables à celles que l’on écrira au collège en « algèbre ». Quelles sont les causes de cette évolution ? Quel est son impact sur les difficultés des élèves ? Faut-il et peut-on réintroduire sous une forme nouvelle peut-être, l'écriture et le traitement des ***unités de mesure,*** (comme le proposait Whitney [1968 b]) ainsi que les changements d'unités et

---

[5] Même si Lebesgue parle essentiellement de la « classe de mathématiques » (dernière année du secondaire), il envisage une réforme qui irait du primaire au secondaire.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

> l'étude du système métrique (dont la quasi disparition affaiblit la connaissance de la numération). (Brousseau, 2001, pp. 9-10)

Ces éléments nous amènent, en fait, à un autre point de vue sur la légitimité des savoirs enseignés :

> Or si l'enseignement élémentaire doit préparer au plus vite l'enseignement des notions scientifiques nécessaires aux études ultérieures des mathématiques, il ne peut pas éviter de se référer à des activités familières. (…) Pourtant la pression « naturelle » pour préparer de façon aussi précoce que possible les élèves à l'étude des mathématiques actuelles a progressivement fini par faire voler en éclats la culture mathématique élémentaire classique, sans que l'on sache par quoi la remplacer. (Brousseau, 2002 b, p. 36)

Il s'agit donc de préparer au plus vite l'enseignement des mathématiques actuelles. Comment s'y prendre ? La réponse à cette question n'est évidemment pas simple. Toutefois, en quoi la situation actuelle est-elle véritablement différente de celle d'hier ? Certes, la théorie de la mesure est plutôt récente et la définition des nombres sans les grandeurs aussi. Nous avons dit à propos de l'émergence du traité de Reynaud qu'il semblait justement constituer une réponse, en termes de mathématiques élémentaires écrites par un savant, au problème de la pénétration trop précoce de l'algèbre dans l'enseignement qui s'est posé à une certaine époque. Dans notre point sur le travail de Neyret nous avons défini deux sortes de savoirs savants. Il est possible qu'on se soit engagé depuis 1970 dans une voie où l'on envisage uniquement de transposer comme savoirs savants, des savoirs savants du premier type, des savoirs éventuellement inadaptés à des enfants parce que trop complexes conceptuellement. Il est possible qu'il n'en ait pas toujours été ainsi. N'existe-t-il pas des théories mathématiques actuelles adaptées ou adaptables pour supporter les savoirs enseignés avec des concepts abordables pour de jeunes enfants ? A défaut, ne faudrait-il pas en inventer ? Tel était notamment le projet de Lebesgue, dans les années 1930, dans « La mesure des grandeurs » à propos d'une construction des réels à des fins didactiques (où il envisage l'enseignement de l'école primaire à la classe Terminale). Une telle ouverture pourrait peut-être permettre de faire « comme en mathématiques » (évidemment, la formation des enseignants apparaît ici cruciale et complexe), tout en manipulant des objets adaptés aux niveaux de développement des élèves. Y a-t-il d'autres moyens pour rapprocher au plus tôt les savoirs enseignés des « notions scientifiques nécessaires aux études ultérieures mathématiques » ?

Pour Brousseau, la finalité pratique de l'école primaire était source de légitimité de l'étude des grandeurs :

> « L'étude des grandeurs à l'élémentaire trouvait sa justification dans le programme de fin d'études qui le prolongeait visiblement. Aujourd'hui l'enseignement professionnel ne joue plus ce rôle et l'enseignement élémentaire vise le Collège, d'où les grandeurs sont presque absentes. De sorte qu'il risque d'être difficile de maintenir ou de rétablir l'étude

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

> des grandeurs dans le premier sans aménager un peu le second. » (Brousseau, 2002 b, p. 27)

Cette justification a donc disparu. Nous qualifions de *verticale*, entre différents niveaux du système éducatif, la *rupture* évoquée ici. Signalons que cette justification n'est pas d'ordre savant, mais social. Il faut sans doute signaler ici la réintroduction du calcul sur les grandeurs quotients et produits dans l'« introduction générale pour le collège » des programmes de mathématiques de 2005. Cette réintroduction passe par une motivation sociale et une justification mathématique dans le projet de document d'accompagnement – grandeurs et mesures – de septembre 2007 :

> « deux faits aussi différents que l'obligation légale d'affichage des prix par kilogramme (ou par litre) et l'emploi dans chaque secteur d'activité de grandeurs bien spécifiques (par exemple, le rendement moyen par mètre carré et par an d'un établissement commercial) mettent en évidence le besoin socio-économique de grandeurs composées plus complexes. (…) Il est possible de mathématiser cette notion de grandeur quotient, de même que celle de grandeur produit, qui généralise le cas des aires et des volumes, et qui, avec les grandeurs composées, fait l'objet du paragraphe 5. » (DGESCO, 2007, pp. 1-2),

Brousseau repère que la connaissance de la numération et le champ des problèmes rencontrés par les élèves sont de plus en plus réduits et attribue ces phénomènes à l'affaiblissement des grandeurs :

> « Cet affaiblissement [des études leçons et exercices relatifs à la **mesure des grandeurs** et à la connaissance du système métrique] réduit aussi la connaissance de la numération décimale et par conséquent celle de la [numération] sexagésimale, ainsi que, très sensiblement, le champ des problèmes liés à de nombreuses pratiques sociales. (les achats et les ventes sont maintenus, mais les échanges de monnaies, et tout ce qui concerne le commerce de l'argent est négligé ou exclu alors que son importance dans la vie ordinaire des citoyens augmente). » (Brousseau, 2001, p. 5)

Selon nous, les causes des phénomènes repérés par Brousseau peuvent être recherchées à deux endroits (non exclusifs l'un de l'autre). D'une part, la suppression de liens entre des objets d'enseignement est susceptible de rendre difficile, voire impossible, la vie de certains d'entre eux qui, puisqu'ils ne vivent plus dans une chaîne trophique, n'ont plus alors qu'eux-mêmes pour seule raison d'exister. La rupture entre les grandeurs et le numérique du programme de 1970 est susceptible d'avoir rendu nombre d'objets orphelins. Signalons que tous les éléments d'une chaîne sont alors susceptibles d'être affectés, et pas seulement ceux qui en sont mis à l'écart. Nous qualifions la suppression de liens de *rupture horizontale* car elle est susceptible de se situer au sein d'un niveau de classe donné, comme quand, par exemple, les milieux pour étudier certaines questions sur la construction des nombres sont affectés (Bronner, 2007). Ainsi, un autre facteur de crise que nous n'aurions pas *a priori* rattaché directement à la légitimité des savoirs enseignés peut-il être repéré dans l'agencement des programmes scolaires ou plus généralement dans l'épanouissement des réseaux

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

trophiques. Tel peut être le cas de cette rupture entre les grandeurs et le numérique. De même, la difficulté à faire des divisions en fin d'école primaire (Brousseau, 2001) peut-elle être reliée au retard pris dans l'apprentissage de la soustraction et des tables de multiplication tout au long de la scolarité élémentaire. Un argument récurrent en faveur de l'étalement des apprentissages est l'allongement de la scolarité. On voit bien ici que toute modification de programmation dans l'apprentissage d'une notion est potentiellement une source de déséquilibre écologique : tel savoir n'est plus suffisamment disponible quand on en a besoin, disparaissent en outre les niches dans lesquelles il pouvait être entraîné.

La réduction du champ des problèmes peut d'autre part être la conséquence de la mise à l'écart volontaire de certaines pratiques sociales de l'enseignement primaire, mise à l'écart liée en particulier à l'évolution des missions de l'école dont on a pu penser à un moment qu'elle pouvait (ou devait) se dispenser d'enseigner telle ou telle pratique de la vie courante. La suppression de tâches est là encore susceptible d'affaiblir certains réseaux trophiques.

3.4. Harlé et l'enseignement ancien des grandeurs et des nombres

Harlé (1984) étudie l'arithmétique scolaire au début du 20ème siècle à travers des manuels et des cahiers d'élèves pour le cours moyen. Là encore, d'une part nous continuons à préciser nos objets d'étude, d'autre part nous rapportons et discutons certains de ses résultats.

▪ Les objets qu'étudie Harlé et ses résultats

Harlé étudie toute l'arithmétique du cours moyen (CM) : tous les nombres (entiers, rationnels, décimaux), les quatre opérations ainsi que la proportionnalité. Il étudie précisément cet enseignement dans la période qui s'étend de 1882 à 1930. Il indique très clairement que les leçons de système métrique ne font pas partie de son objet d'étude.

Il met notamment à jour les discours récurrents des manuels relatifs aux différents objets étudiés en arithmétique :

- la « présentation et définition du nombre »,
- les quatre opérations,
- les fractions,
- la règle de trois et ses applications.

Il conclut à une très grande stabilité pour la période qu'il a prise en compte et précise que des changements notables n'apparaîtrons que dans les programmes de 1945. Il dégage un certain état d'esprit de l'enseignement : il identifie une « vocation utilitaire ». Il précise que :

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

> Loin de se traduire uniquement par l'orientation du cours d'arithmétique vers la résolution de problèmes de la « vie usuelle », cette vocation utilitaire et pratique est présente aussi dans le contenu de la « partie cours » des manuels
>
> Les notions qui sont au programme et qui ont été choisies en fonction de leur utilité sont présentées d'une façon pratique et appliquée : les nombres qui ne prennent pas leur indépendance vis à vis des grandeurs par la distinction « nombres abstraits – nombres concrets », les « quatre opérations » appliquées aux grandeurs ce qui a pour effet de rendre la multiplication non commutative, le cours sur la proportionnalité qui se réduit à l'apprentissage de la reconnaissance de « problèmes types »

Nous allons maintenant revenir sur le travail d'Harlé pour préciser ce que nous en retenons.

- Résultats que nous retenons et limites, précisions pour nos objets d'étude

L'évacuation des « questions d'unités »

Nous avons dit que dans la définition de son objet d'étude, Harlé élimine les leçons de système métrique. Nous rapportons un extrait de sa thèse (pp. 71-72) relatif à la partition qu'il adopte (c'est nous qui soulignons dans le texte) :

> Dans la partie « Système métrique » qui est distinguée de l'arithmétique mais qui lui est toujours associée, sont traitées les mesures des surfaces et des volumes. Elles sont encore appelées « mesures légales à base cent ou mille » dans les programmes officiels ainsi que dans les manuels. On découvre ainsi deux nouvelles bases en dehors du cours d'arithmétique.
>
> Puisqu'elles ne font pas partie du cours que nous étudions, remarquons simplement :
> - que ce sont des mesures : chaque ordre est accompagné du nom de l'unité ;
> - que ce ne sont pas à proprement parler des numérations de positions à base cent ou mille puisque les nombres se lisent en base dix comme l'illustre l'exemple qui suit.
>
> « *Numération centésimale*
>
> 182. Les unités de surface sont de 100 en 100 fois *plus grandes* ou *plus petites*.

Multiples			Unité	Sous-multiples		
million	dizaine de mille	centaine		centième	dix-millième	millionième
km²	hm²	dam²	m²	dm²	cm²	mm²
	6	05	48^{m^2}			
			3^{m^2}	06	95	

> En prenant le *mètre carré* pour unité :
>
> 6 hm² 5 dam² 48 m² *s'écrit* 60548 m², et *se lit* 60 mille 548 mètres carrés.
>
> 3 m² 6 dm² 95 cm² *s'écrit* 3^{m^2},0695, et *se lit* 3 mètres carrés 695 centimètres carrés.
>
> 183. Dans les nombres qui expriment des surfaces, les *multiples* ou *sous multiples du mètre carré* se succèdent de 2 en 2 chiffres. (Mortreux, CM, 1929) »

Harlé en tire notamment que « Dans ce chapitre de la partie « système métrique » il n'est donc pas question de numération : c'est un problème d'unité ». Il ajoute « qu'il n'y a pas de véritable distinction entre les questions d'unités et la numération, tant pour les auteurs [des manuels] que dans les programmes officiels », il cite notamment cet extrait des instructions de

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

1923 : « numération décimale, le mètre, le gramme, le litre et leurs multiples » et précise que l'approche du manuel est conforme à l'esprit des programmes.

Nous voyons dans le point 183, une leçon de numération positionnelle à base cent (dont les chiffres se lisent en base dix) : en partant de la virgule, vers la gauche, les deux premiers chiffres de l'écriture en base dix sont ceux qui indiquent le nombre d'unités du premier ordre (m^2), les deux suivants, celui du deuxième (dam^2), etc. Selon nous, les deux points (182. et 183.) du manuel montrent notamment comment on convertit, vers la base cent, une écriture chiffrée en base dix et inversement. Pour nous, cet extrait montre donc que l'enseignement de la numération des entiers est concerné par cette ligne des instructions de 1923 : le « Système des mesures légales à base dix, à base cent, à base mille ».

Contrairement à Harlé, comme nous voulons notamment comprendre la contribution des leçons de système métrique et des « questions d'unité » à l'enseignement des nombres et des opérations, nous intégrons ces leçons dans notre étude.

La stabilité

Harlé conclut à une grande stabilité de l'enseignement de l'arithmétique pour la période qu'il étudie. Nous avons dit que notre étude des programmes (Chambris, 2004) montre que système métrique et numération semblent s'articuler en 1923 ce qui est plutôt un signe de changement. Harlé remarque d'ailleurs que des choses changent dans l'étude du système métrique en fin de période, mais il ne s'y intéresse pas particulièrement. Aussi, retenons-nous la stabilité mise en évidence par Harlé pour les nombres et les opérations mais nous poursuivons l'étude de la question des évolutions éventuelles avec un objet d'étude différent : c'est l'articulation entre le système métrique (ou les grandeurs) et les nombres (ou l'arithmétique) que nous regardons.

Le niveau d'enseignement

Rappelons qu'Harlé se place au CM. Selon nous, ceci implique que certaines des notions présentées (nombre de celles qui nous intéressent, en fait) sont très probablement des reprises de notions étudiées au cours des années précédentes. Les leçons du CM sont alors soit des résumés de ce qu'on a fait avant, soit constituent une présentation nouvelle, une réorganisation, de savoirs déjà étudiés. Bien qu'un survol de quelques manuels et la stabilité probable de l'enseignement de l'arithmétique pendant cette période nous incitent à choisir la première hypothèse, il nous semble délicat d'étendre *a priori* certaines observations des manuels du CM à ceux du CE en particulier pour certaines tâches élémentaires enseignées au CE et qui ne seraient pas nécessairement reprises au CM. Harlé écrit par exemple :

« l’opération de triage n’est jamais détaillée pour expliquer le principe de la numération de position » (il s’agit apparemment de faire des paquets dont la taille est une puissance de dix en nombre au plus égal à 9). Il nous semble par exemple qu’une telle information pourrait être présente dans un livre de CE et ne plus apparaître en CM.

Bien qu’il ne s’agisse pas exactement de la même chose, il nous semble qu’on peut aussi rattacher cette question du « niveau d’enseignement » à certains commentaires d’Harlé. En effet, il confronte à plusieurs reprises ce qu’on dit aux élèves et ce qu’on dit aux maîtres (dans certains ouvrages) et en tire des conclusions quant au caractère utilitaire de l’enseignement. Même si cette hypothèse n’est pas à exclure, apparemment il n’envisage pas que certaines choses peuvent être retardées[6], ne pas être dites maintenant, car considérées comme trop complexes du point de vue du développement des élèves, de leur âge, indépendamment de leur milieu social.

Nous nous intéressons maintenant aux discours qu’Harlé relève dans les manuels qu’il étudie. Nous centrons notre étude sur les discours relatifs aux nombres entiers et aux opérations sur ces nombres mais nous n’étudions pas la partie relative à la proportionnalité qui est moins centrale pour notre travail. Nous rapportons les discours qu’il relève et certains commentaires qu’il fait à leur propos. Nous complétons notamment certains de ces discours par d’autres : ceux que nous trouvons dans les traités de Bezout ou Reynaud dans la 9ème édition (1821) du traité complété par les notes. Et nous discutons l’ensemble.

Précisons qu’Harlé ne se place pas dans le cadre de la TAD qui était beaucoup moins développée en 1984 qu’aujourd’hui. C’est pour cela que nous parlons de *discours*. Dans la TAD, on peut probablement dire qu’il s’agit de techniques ou de technologies mais nous n’essayons pas de préciser cela maintenant.

Les grandeurs

Harlé indique que 15 manuels sur les 25 qu’il a retenus pour son étude font débuter leur cours d’arithmétique du CM par un chapitre destiné à présenter et définir le concept du nombre, les autres se passant de ces « notions préliminaires ». Il indique que « ce court chapitre a une structure très stéréotypée » :

- exemples et définition de GRANDEUR et QUANTITE ;
- présentation éventuelle de COMPTER et MESURER ;
- exemple et définition d’UNITE ;
- exemple et définition du NOMBRE ;

[6] Ceci pose évidemment problème pour les élèves qui interrompent leur scolarité au CM.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

- définitions et exemples des « 3 espèces de nombres » (entier, fraction, nombre fractionnaire)
- définitions et exemples des « nombres abstraits » et « nombres concrets ». (Harlé, 1984, p. 31)

Harlé précise en fait que ce plan correspond à une longue pratique puisqu'il était déjà présent dans des ouvrages d'enseignement du 19ème siècle et signale l'influence du traité de Bezout (nous ajoutons que Reynaud reprend ce plan). C'est sans doute à ce propos que Neyret cite Harlé comme nous l'avons rapporté. Dans sa conclusion de l'étude de la rubrique grandeur, Harlé parle de « la notion de grandeur dont la vocation est d'introduire le nombre à partir des réalités que côtoie l'élève « pour une meilleure compréhension » » (Harlé, 1984, p. 37). Il nous semble que cette formulation présuppose qu'il n'envisage pas que cette notion est là au titre d'un éventuel environnement théorique du numérique. Pourtant nous pensons que le plan d'étude présenté est susceptible d'appuyer l'hypothèse d'une théorie de la mesure des grandeurs comme « environnement théorique du numérique » : les nombres seraient tirés des grandeurs et le plan des cours proposé aux élèves reflèterait cette construction théorique. Cette différence d'interprétation nous permet de poser la question de la légitimité des savoirs enseignés : qu'est-ce qui leur confère leur légitimité ? Elle nous suggère deux réponses apparemment contradictoires mais dont la complémentarité n'est pas à exclure. Il peut s'agir :

- d'une part de se rapprocher des « réalités que côtoie l'élève » car un but serait d'enseigner des pratiques de référence pour la vie courante,
- d'autre part de se conformer à un savoir de référence, savant, dont on peut considérer qu'il n'est pas encore obsolète au début de la période qu'étudie Harlé (rappelons que la première construction des réels ne tire pas ces nombres des grandeurs mais qu'elle est toute récente à la fin du 19ème siècle puisqu'elle date de 1872).

Il nous semble qu'on retrouve ici la dialectique évoquée par Durey & Martinand (cf. 2.1)

L'étude de la numération de position des entiers

Nous rapportons seulement une petite partie des conclusions d'Harlé sur l'étude de la numération de position car nous discuterons plus longuement ce point dans notre dernier chapitre. En particulier, il écrit (pp. 88-89) : « On ne trouve jamais, noir sur blanc, la décomposition d'un nombre selon les différentes puissances de dix. (…) on n'écrit pas : $268=2\times100+6\times10+8$. »

L'opposition entre abstrait et concret

Nous poursuivons cette discussion des résultats d'Harlé avec le thème de l'opposition entre abstrait et concret. Deux moments nous semblent significatifs par rapport à cette question : la présentation des nombres abstraits et concrets et celle de la multiplication.

Les nombres concrets, les nombres abstraits

Harlé rapporte plusieurs définitions des nombres abstraits et concrets qui présentent quelques variations. Voici celle des notes de Reynaud (1821, p. 6) (non citée par Harlé, pas très différente de celles qu'il indique mais plus complète) :

> « Un nombre est *abstrait* ou est *concret*, suivant qu'on fait *abstraction* de la nature de ses unités ou qu'on y a égard. Ainsi, 3 et 5 fois, sont des *nombres abstraits* ; 3 toises et 5 lieues sont des *nombres concrets*. Les nombres concrets composés d'unités de diverses grandeurs, tels que 5 toises 3 pieds 4 pouces, sont dits *complexes*, et par opposition ceux qui ne renferment que des unités de même grandeur sont des nombres *incomplexes*, ou *entiers* ».

Harlé indique que, dans quelques livres qui ne sont pas destinés aux élèves mais aux maîtres, cette caractérisation des nombres abstraits concrets est considérée comme un abus de langage, consacré par l'usage. Les auteurs affirment alors que les nombres sont essentiellement abstraits ou que 15 *l* est une quantité et non un nombre. Harlé tire des conclusions de l'absence d'information donnée aux élèves : « cette absence correspond donc à la volonté de laisser, au Cours Moyen, le caractère « concret » de l'enseignement des nombres » (p. 69). Il lui associe la reprise des mots « concret » et « abstrait » dans les instructions officielles (de la « méthode concrète » au CP pour aboutir à « un minimum d'abstraction » au cours supérieur). « Cela se traduit dans les manuels de l'enseignement primaire par la présentation et l'utilisation de nombres toujours liés de près ou de loin à une grandeur. Ce n'est que dans les manuels du cours Supérieur que s'amorce le passage du nombre-mesure d'une grandeur au nombre-concept mathématique. » (p. 70). Dans l'hypothèse d'une théorie de la mesure sous-jacente, il nous semble que l'analyse de la présence des nombres concrets et abstraits ne peut se faire en ces termes car les nombres tirés de la mesure des grandeurs sont des êtres mathématiques. La dualité nombre abstrait – nombre concret est déjà présente dans le traité de Bezout (et Harlé le sait). En fait, elle n'est pas du tout caractéristique de l'école primaire et de son enseignement pratique et utilitaire. Bronner (1997, p. 52) indique qu'il la trouve dans les premiers chapitres des manuels du secondaire. Ainsi, les nombres concrets ne peuvent être réduits à la « méthode concrète » du CP mais seraient significatifs de l'environnement théorique impliquant la mesure des grandeurs.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

La multiplication

Poursuivons l'étude de l'opposition entre abstrait et concret à travers la présentation qu'Harlé fait de la multiplication. Il donne trois définitions qu'il a relevées pour l'approche de cette opération. Nous les présentons en parallèle. La multiplication a pour but, étant donnés deux nombres, l'un appelé multiplicande, l'autre multiplicateur, d'en trouver un troisième appelé produit :

1) qui soit la somme d'autant de nombres égaux au multiplicande qu'il y a d'unités au multiplicateur,
2) qui contient autant de fois le multiplicande qu'il y a d'unités au multiplicateur,
3) qui soit formé avec le multiplicande comme le multiplicateur est formé avec l'unité.

Il indique de plus que 22 auteurs sur 25 précisent que « Dans une multiplication, le multiplicande est un nombre concret, le multiplicateur est un nombre abstrait et le produit un nombre concret de la même nature que le multiplicande » (Goupil, CM, 1912). Il ajoute que les manuels oublieront tous à un moment ou un autre que le multiplicande est concret et feront alors des multiplications de nombres abstraits.

Il conclut son étude de la multiplication de la façon suivante :

> Pourquoi n'avoir pas choisi la multiplication sur les nombres abstraits ou bien les équations aux dimensions plutôt que cette solution bâtarde mêlant « nombres concrets » et « nombres abstraits » alors que le problème ne comprend que des grandeurs ? La raison n'en est que trop simple : l'arithmétique du cours moyen doit s'appliquer à « des êtres concrets » comme l'affirment les programmes officiels ! (p. 116)

Nous donnons la définition de Reynaud (1821, p. 10, §6, non cité par Harlé), qui n'est pas très différente de celles données par Harlé, mais peut-être plus générale :

> « Le but de la MULTIPLICATION est de calculer un nombre nommé PRODUIT, qui soit composé avec un nombre connu, nommé multiplicande, de la même manière qu'un nombre donné, nommé multiplicateur, est composé avec l'unité. De sorte que pour obtenir le produit, il suffit d'effectuer sur le multiplicande les mêmes opérations qu'il faudrait faire sur l'unité pour former le multiplicateur. Le multiplicande et le multiplicateur sont les facteurs du produit. Ainsi, pour multiplier 5 par 3, on observe que le multiplicateur étant composé de trois fois le multiplicande 5, ce produit est donc 5 plus 5 plus 5, ou 15. En général, lorsque le multiplicateur est un nombre entier, la multiplication se réduit à répéter le multiplicande, autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur.
>
> Le multiplicateur est toujours abstrait, car il marque combien de fois on doit prendre le multiplicande.
>
> Le produit est de la nature du multiplicande, car il exprime la somme de plusieurs nombres égaux au multiplicande. »

Cette définition n'est pas symétrique et elle est manifestement significative d'un environnement empreint de grandeurs : elle est rattachée à la mesure dans une unité. Elle a une certaine généralité : elle convient pour les entiers mais aussi les fractions. Par exemple, à propos du calcul de leur multiplication, Reynaud (§19) indique :

> « soit proposé de multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$; le multiplicateur $\frac{4}{5}$ étant les $\frac{4}{5}$ de l'unité, le produit demandé sera les $\frac{4}{5}$ du multiplicande $\frac{2}{3}$, (n°6) ; or le cinquième de $\frac{2}{3}$ est $\frac{2}{3\times5}$, les $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$ valent donc 4 fois $\frac{2}{3\times5}$, ou $\frac{2\times4}{3\times5}$ ».

Pour la période classique, Bronner (1997, p. 56) cite d'ailleurs une définition de la multiplication par les fractions qui n'est pas sans rapport avec ce qui est donné par Reynaud : « Multiplier un nombre quelconque par une fraction, c'est composer un troisième nombre avec le nombre donné de la même manière que la fraction multiplicateur a été composée au moyen de l'unité. ».

Reynaud (comme Bezout d'ailleurs qui propose une définition peu différente) n'oblige pas le multiplicande à être concret : il est de la nature du produit. On peut sans doute voir une fonction didactique dans l'indication simplificatrice des manuels, de son caractère concret : aider les élèves à utiliser la multiplication, à reconnaître son sens pour résoudre des problèmes. En revanche, il nous semble qu'on ne peut exclure que la définition « bâtarde » de la multiplication impliquant des nombres concret et abstrait soit la conséquence d'un choix théorique (abstrait, donc), de l'environnement théorique – plus précisément – plutôt que la manifestation de la volonté d'enfermer les élèves dans le concret.

Une conséquence de cette définition de la multiplication est qu'elle n'est commutative que lorsque les deux nombres sont abstraits. Cet « inconvénient » est longuement discuté par Harlé. Bezout et Reynaud l'indiquent comme propriété. Harlé indique que 15 manuels sur 25 y font allusion. Reynaud donne d'abord les tables de multiplications, puis il écrit « on voit que le produit de deux nombres d'un seul chiffre ne change pas de valeur dans quelque ordre qu'on effectue la multiplication. Cette propriété convient à tous les nombres ». Il prouve ensuite la propriété en utilisant deux nombres entiers « abstraits ». Nous indiquons, avec le symbolisme usuel pour nous, ce qu'il fait en signalant qu'il écrit lui des mots et parle d'unité là où nous écrivons 1 :

$$3\times4=(1+1+1)\times4=4+4+4=4\times3$$

L'utilisation des propriétés des opérations est importante pour les calculs mais Harlé semble surtout en faire une affaire d'écriture. Perrin-Glorian (2002, p. 2) signale le risque qu'on court à trop rester collé aux grandeurs. Par exemple, certaines procédures de calcul, tout à fait

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

pertinentes du point de vue de l'économie des nombres, sont susceptibles d'être rejetées si, dans la résolution d'un problème d'arithmétique, on veut interpréter chaque pas d'un calcul en termes de grandeurs. Toutefois, signalons l'évidence suivante : si on tire les nombres des grandeurs, les justifications des propriétés des opérations seront, de près de ou de loin, elles aussi, tirées des grandeurs.

Nous considérons donc que le travail d'Harlé nous donne une idée précise des discours existant dans les manuels d'arithmétique au début du siècle, nous retenons ces discours. Toutefois, nous sommes réservée quant à certaines analyses qu'il propose pour expliquer leur présence ou certaines absences.

Une hypothèse de travail implicite ?

Harlé cherche à élaborer une compréhension globale de l'enseignement à l'œuvre au début du siècle mais la globalité qu'il trouve ne le conduit qu'à montrer le caractère utilitaire de l'enseignement et non sa logique mathématique interne, comme si cette dernière n'existait pas, comme si l'enseignement des mathématiques n'était pas bien rigoureux. La présence des grandeurs semble être interprétée uniquement dans ce cadre : pour « introduire le nombre à partir des réalités que côtoie l'élève ». Pourtant, en se plaçant dans l'hypothèse d'un environnement théorique impliquant des grandeurs, il nous semble que la présence ou l'absence de certains objets se justifie très bien par des raisons technologico-théoriques. Une volonté utilitariste peut néanmoins se manifester par le choix d'une formulation plutôt qu'une autre ou par celui de taire telle ou telle propriété et sans doute par d'autres moyens que nous n'avons pas identifiés.

La position d'Harlé nous semble paradoxale. En effet, il n'ignore pas complètement le rôle théorique joué par les grandeurs dans l'histoire des mathématiques puisqu'il écrit : « le calcul des grandeurs a été longtemps le seul objet de l'arithmétique qui, avec le temps, s'en est peu à peu libérée. (…) Alors que le concept du nombre s'est dégagé peu à peu de la mesure des grandeurs dans les mathématiques de haut niveau, l'enseignement élémentaire a continué de reposer sur cette notion jusqu'aux « mathématiques modernes » » (p. 69). En fait, il n'est peut-être pas abusif d'écrire – ce qui permettrait de lever le paradoxe – qu'Harlé considère implicitement qu'avant la réforme des mathématiques modernes le savoir mathématique savant ne constitue pas un savoir de référence pour l'école primaire, que seules les pratiques de référence pour la vie courante peuvent jouer ce rôle. Il nous semble que ce point pourrait constituer une hypothèse de travail implicite pour Harlé.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Une dernière remarque

Nous ne l'avons pas signalé jusqu'ici mais Harlé reproche à de nombreuses règles énoncées dans les manuels de ne pas être claires. Nous ne savons pas dans quelle mesure cela s'inscrit dans un mouvement plus général d'analyse de l'enseignement ancien, toutefois en consultant certains manuels actuels on peut être frappé par la quasi absence de règles rédigées.

- D'Harlé à Brousseau

Sur certains points, il nous semble que les textes de Brousseau constituent un curieux écho au texte d'Harlé. Le premier semble déplorer que les élèves ne travaillent que sur des nombres, considérés directement comme des objets mathématiques, alors que le second cherchait désespérément des nombres dépourvus de toute unité. Ce dernier constatait que les parties qui sont au programme étaient « présentées d'une façon pratique et appliquée » et que « le cours sur la proportionnalité [se réduisait] à la reconnaissance de problèmes types » alors qu'aujourd'hui Brousseau regrette la « [réduction] du champ de problèmes lié à de nombreuses pratiques sociales ». S'agit-il d'épistémologies scolaires radicalement différentes ? Ou bien du signe d'évolutions curriculaires qui auraient dépassé les intentions de certains réformateurs ? d'innovations dont on aurait mal anticipé les conséquences ? Ou encore de dosages subtils entre plusieurs éléments, subtilité qui se serait perdue en 20 ans ?

4. Elargissement du questionnement

Les questions que nous avons évoquées jusqu'à présent se situent dans le cadre de l'école primaire française. Il est probable que certaines d'entre elles se posent dans d'autres pays, de façon différente éventuellement. Deux raisons simples en sont que :

- dans tous les pays, on enseigne les nombres entiers à l'école primaire. Nous ne savons pas, en revanche, si l'on enseigne partout les grandeurs non géométriques,
- la réforme des mathématiques modernes n'a pas été un mouvement limité à la France,
- plus généralement, la question de la légitimité des objets d'enseignement à l'école primaire a peut-être une certaine universalité.

Parmi les travaux internationaux nous avons retenu celui de Liping Ma (1999) qui est particulièrement éclairant dans la mesure où il compare deux cultures : celle des enseignants américains et celle des enseignants chinois.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

4.1. La légitimité des savoirs vue par Liping Ma

Liping Ma (1999) propose une comparaison de l'enseignement primaire américain et chinois. Elle évoque longuement les difficultés qu'elles a repérées chez les enseignants américains à connecter les notions entre elles alors que ce n'est pas le cas chez les chinois.

Elle aborde la question de la légitimité des savoirs (pp. 117-118). Elle présente des éléments tirés de la littérature américaine et donne son point de vue qui semble être celui qui est adopté dans l'enseignement primaire chinois.

Elle estime que dans la perspective d'atteindre une compétence mathématique, enseigner les mathématiques élémentaires ne signifie pas juste amener les élèves à la fin de l'arithmétique ou au début de la « pré-algèbre ». Cela signifie plutôt leur fournir les fondations sur lesquelles ils pourront bâtir pour leurs apprentissages mathématiques futurs.

Des spécialistes américains ont affirmé que des concepts avancés (topologie, géométrie projective, théorie des probabilités…) pouvaient être enseignés à des jeunes élèves, il y a trente ans (Bruner, 1960 / 1977) et récemment encore (Hirsh, 1996). D'autres ont suggéré une organisation par thème parce qu'ils considèrent que l'organisation actuelle n'étudie que peu de sujets (arithmétique, géométrie et algèbre) et les juxtaposent horizontalement pour former le curriculum (Steen, 1990). À la place, ils proposent une structure longitudinale avec davantage de continuité verticale pour connecter les racines des mathématiques aux branches des mathématiques dans l'expérience éducative des enfants. Les thèmes qu'ils proposent seraient : « dimension », « espace », « variation », etc. (Kaput & Nemirovski, 1995).

Ma n'adhère à aucune de ces propositions. Elle considère que les mathématiques élémentaires, constituées par l'arithmétique et la géométrie, contiennent déjà des idées mathématiques importantes. Elle précise que pour les enseignants chinois le curriculum est un agencement horizontal qui présente une forte continuité verticale. Elle précise que l'arithmétique a des qualités qui sont identifiées par Kaput & Nemirovski comme nécessaires dans leur projet de réforme : représentations multiples, mathématiques sérieuses, compréhension qualitative de modèles mathématiques, véritables discussions mathématiques. Elle considère que la métaphore utilisée par les enseignants chinois est plus pertinente : ils estiment que les mathématiques élémentaires sont les fondations pour les apprentissages mathématiques futurs de leurs élèves. Les apprentissages des élèves sont comme un immeuble à plusieurs étages. Les fondations peuvent être invisibles des étages supérieurs mais ce sont elles qui soutiennent les apprentissages ultérieurs et permettent à l'ensemble de tenir.

L'apparition et le développement de nouvelles mathématiques ne doivent pas être regardés comme un désaveu des mathématiques fondamentales mais devraient amener à une meilleure compréhension des mathématiques élémentaires, de leurs potentialités puissantes comme le sont les graines pour les branches élaborées.

Il semble donc que les auteurs américains évoqués par Ma proposent deux sortes de légitimation des savoirs :

- enseigner des « mathématiques modernes »,
- construire un curriculum par thème avec des mathématiques modernes qui comporte une forte continuité dans les thèmes des « racines » aux « branches » des mathématiques.

Liping Ma estime qu'en Chine la légitimité des savoirs est donnée par la cohérence du savoir mathématique enseigné (constitué par l'arithmétique et la géométrie primaire). Les exemples du livre de Ma laissent penser qu'une partie de ces savoirs est constituée par des « problèmes tirés de pratiques de la vie courante » mais qu'on ne peut les y réduire. Nous traduisons l'exemple de Ma à propos de la commutativité et de l'associativité (p. 109) :

> Dans le curriculum de mathématiques, les versions additives de la commutativité et de l'associativité sont introduites pour la première fois en 3ème année [CE2]. (…) Ils sont introduits comme des alternatives aux méthodes standard. Par exemple, le manuel scolaire dit : « quand deux nombres sont additionnés, si les places des deux termes sont échangées, le résultat ne change pas. Cela est appelé loi de commutativité de l'addition. Si les lettres *a* et *b* représentent deux termes arbitraires, nous pouvons écrire la loi de l'addition commutative comme suit : $a+b=b+a$. La méthode que nous avions apprise pour vérifier une somme en échangeant l'ordre des termes est tirée de cette loi ». (….) Le manuel illustre comment les deux lois peuvent être utilisées pour « une façon plus rapide de calculer ». Par exemple, les élèves apprennent qu'une façon rapide de calculer 258+791+642 est de le transformer en (258+642)+791, une façon plus rapide de calculer 1646-248-152 est de le transformer en 1646-(248+152). (Ma, 1999, p. 109)

Il nous semble qu'on peut lire dans cet extrait une triple légitimation du savoir enseigné :

- par le savoir mathématique et sa cohérence (l'arithmétique est un tout, les lois de commutativité et d'associativité en font partie),
- par les pratiques sociales engagées (calculer plus rapidement, vérifier ses calculs),
- les réseaux trophiques : on rappelle un savoir anciennement enseigné et dont on imagine qu'il avait été validé par « l'expérience », on le désigne par une loi qui constitue un nouveau savoir mathématique, on l'inscrit dans une nouvelle pratique sociale (optimisation des calculs).

Ajoutons aussi que la loi de commutativité est formulée dans le registre symbolique algébrique et dans la langue naturelle. À ces deux registres en est ajouté un troisième : celui

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

de l'écriture positionnelle des nombres utilisé pour les exemples à calculer. Il fait d'ailleurs intervenir, grâce aux exemples choisis, des connaissances de numération spécifiques à ce registre.

4.2. Rapports entre les grandeurs et les nombres dans les théories savantes

Il est probable que la question de la définition des savoirs savants de référence pour l'époque actuelle, tant pour les grandeurs que pour les nombres et les opérations ne soit pas très originale. D'ailleurs, la définition des nombres par les grandeurs n'est pas une question caduque, ni neuve. Par exemple, Frege critiquait déjà le manque de fondements ontologiques dans la géométrie de Hilbert car il n'y avait pas de connexion entre la géométrie et la réalité, il réfutait avec le même genre d'arguments les constructions des réels de Dedekind et Cantor. Sa principale critique était que « mesurer » aurait dû être impliqué dans leur définition. Il a fondé ontologiquement les nombres en utilisant la mesure pour les définir et a inventé la notion de *größengebiet* (traduite en anglais par *quantitative domain* et qu'on peut probablement traduire par *grandeur*). Sa construction n'est pas ensembliste mais conceptuelle. Toutefois, elle a pu être reprise par le néo-fregenisme avec les moyens actuels des mathématiques des structures (Griesel, 2007, pp. 31-32).

À travers les exemples de la théorie de l'intégration de Lebesgue et les tentatives de Frege, nous voyons bien que toutes les théories des grandeurs ou de la mesure n'entretiennent pas le même rapport aux nombres : certaines les supposent construits, quand d'autres visent à les construire. Quand il s'agit de fonder les nombres ou les grandeurs dans l'enseignement primaire, cette différence ne peut pas être anodine. On peut par exemple penser que les praxéologies mathématiques enseignées ne sont pas indépendantes des savoirs savants de référence, lorsqu'il y en a. De ces deux exemples, il nous faut tirer une autre question : dans quelle perspective les théories sont-elles évoquées dans les travaux de didactique ? S'agit-il d'étudier les nombres ou les grandeurs ? En effet, quand il évoque la théorie de l'intégration, Brousseau se place dans la perspective de l'étude des grandeurs alors que Frege est convoqué par Griesel à propos de l'étude des nombres et des opérations dans l'enseignement d'aujourd'hui en Allemagne. Une théorie unique peut-elle constituer un savoir savant de référence pour les nombres et pour les grandeurs ? Cela est-il possible ? A quelles conditions ? Cela est-il souhaitable ? Le choix d'une théorie unique pourrait-il, par exemple, avoir une incidence sur le développement, l'épanouissement de certains réseaux trophiques ?

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Que peut-on dire de ces questions pour l'enseignement ancien ? pour l'enseignement d'aujourd'hui ?

Nous nous plaçons dans la perspective de l'enseignement primaire. Dans la littérature didactique, les références aux théories des grandeurs ou de la mesure sont assez nombreuses. Qu'en est-il des théories savantes qui pourraient constituer des savoirs de référence pour l'étude des nombres et des opérations, théories effectivement transposées ou potentiellement transposables ? Les grandeurs enseignées ayant perdu toute légitimité savante au moment de la période des mathématiques modernes, on peut sans doute rapprocher certaines productions de théories des grandeurs ou de la mesure du besoin de leur donner une nouvelle légitimité. Plus précisément, certaines théories des grandeurs semblent avoir pour fonction principale de définir un objet « grandeur », de lui donner de « bonnes propriétés » de façon à le faire exister, à le légitimer ; d'autres vont plus loin dans cette démarche en construisant, après avoir défini les grandeurs, de nouveaux objets. Il nous semble qu'on peut mettre les définitions de Perrin (2005, p. 136), Rouche (1994) dans la première catégorie alors que la construction des rationnels et l'introduction de la proportionnalité à partir des grandeurs par Rouche (1992) entrerait dans la deuxième.

Par ailleurs, nous avons proposé de distinguer deux types de savoir savant. Nous voulons tenter de caractériser les théories des grandeurs ou de la mesure dans la perspective de l'enseignement primaire. Y en a-t-il qui seraient meilleures candidates que d'autres pour constituer un savoir savant de référence à l'école primaire ? C'est dans la perspective de l'identification d'un savoir savant de référence « mathématiquement correct » mais adapté à des élèves du primaire que nous posons cette question. Elle se décline selon deux axes pour nous :

- du point de vue du type de savoir savant qui, même s'il n'est pas toujours immédiatement identifiable car nous avons finalement peu d'exemples de traités, permet de discriminer des théories notamment par la complexité des concepts en jeu dans l'élaboration de la théorie,
- du point de vue des objets mathématiques que la théorie vise à étudier, à construire ou à légitimer et ceux qu'elles pré-supposent. Par exemple :
    - suppose-t-elle les nombres déjà construits ou en propose-t-elle une construction ? de quels nombres s'agit-il ?

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

- quelle est apparemment la « distance » entre la théorie et des praxéologies enseignées ou qu'il semble souhaitable d'enseigner ou qu'on souhaite enseigner à l'école primaire,

5. Deux exemples d'articulation entre enseignement des nombres et des grandeurs dans des manuels actuels

Nous proposons maintenant des extraits de deux collections de manuels scolaires actuels qui nous semblent révéler des différences possibles dans la prise en compte de l'articulation entre les nombres et les grandeurs dans l'enseignement actuel.

C'est nous qui voyons les grandeurs dans ces documents. En fait, elles y apparaissent d'abord comme la manifestation de la vie courante ou comme des usages des nombres. Pour nous, elles font aussi écho à ce que disent Brousseau et Harlé sur la présence des références à la vie courante dans l'enseignement primaire.

À ce moment de notre étude, pour « attraper » le travail sur les grandeurs éventuellement présent dans ces leçons, nous utilisons le cadre théorique des registres sémiotiques de Duval. Il nous semble particulièrement adapté parce que les documents présentent plusieurs registres : graphique, langue naturelle, nombres en écritures chiffrées tirés de la vie courante.

5.1. 1er exemple : imbrication entre usages des nombres et tâches relevant du numérique

Nous utilisons des leçons sur deux grandeurs différentes dans deux niveaux d'une même collection de manuels, la collection Math Élem (ME) : la longueur au CE1, le temps au CE2. Nous ne pouvons pas dire si ces exemples sont représentatifs d'un certain traitement des grandeurs dans cette collection, même si ce traitement a des points communs dans les deux leçons. Ce traitement nous semble toutefois significatif d'une certaine volonté d'utiliser les mathématiques pour élucider la vie courante.

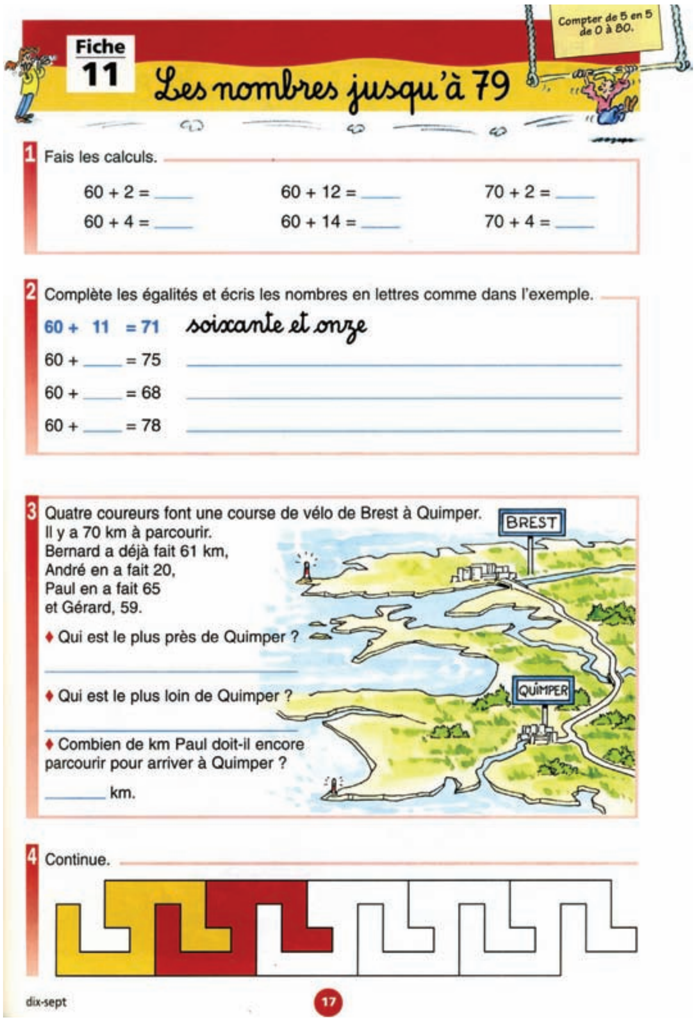
Nous avons d'abord retenu ces leçons parce qu'elles nous ont surprise dans le choix des grandeurs qu'elles utilisaient et dans la façon de les utiliser. La leçon 11 de ME CE1 (1995) propose un problème de la vie courante avec la grandeur longueur au CE1, le choix de cette grandeur pour de tels problèmes, qui plus est en début d'année, n'est pas généralisé dans les manuels que nous connaissons. La leçon 41 du CE2 (ME CE2, 1997) n'est pas la première sur

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

le temps[7], en revanche elle propose un traitement du temps qui nous a semblé tout à fait particulier. Nous cherchons à identifier l'activité de l'élève en utilisant une analyse en termes de registres. Il nous semble qu'un tel cadre nous permet de repérer le travail sur les grandeurs effectivement en jeu. En outre, pour chacune de ces leçons nous reconstruisons l'environnement, en termes de grandeur, proposé par le manuel. Ceci nous permet de voir dans quelle mesure les domaines mesure et numérique sont articulés. Nous cherchons à repérer si les connaissances sur les grandeurs nécessaires, selon nous, pour traiter ces deux leçons sont identifiés dans le manuel.

- Autour d'un problème de la « vie courante » sur la longueur au CE1

Ci-après, la leçon 11, vers le début du CE1.[8] Nous regardons en particulier l'exercice 3.


Compter de 5 en 5 de 0 à 80.

Fiche 11

Les nombres jusqu'à 79

1 Fais les calculs.

60 + 2 = ___	60 + 12 = ___	70 + 2 = ___
60 + 4 = ___	60 + 14 = ___	70 + 4 = ___

2 Complète les égalités et écris les nombres en lettres comme dans l'exemple.

60 + 11 = 71 soixante et onze
60 + ___ = 75 ___
60 + ___ = 68 ___
60 + ___ = 78 ___

3 Quatre coureurs font une course de vélo de Brest à Quimper.
Il y a 70 km à parcourir.
Bernard a déjà fait 61 km,
André en a fait 20,
Paul en a fait 65
et Gérard, 59.

- Qui est le plus près de Quimper ? ___
- Qui est le plus loin de Quimper ? ___
- Combien de km Paul doit-il encore parcourir pour arriver à Quimper ? ___ km.

4 Continue.

dix-sept 17

Le guide du maître précise pour l'exercice 3 (p. 134) : « Travail en ateliers autonomes ou avec le maître. En cas de difficulté, faites reformuler le problème ; les élèves suivent le parcours sur le dessin, ils localisent bien le départ et l'arrivée. »

---

[7] Dans notre travail nous ne nous intéresserons que de façon tout à fait marginale « au temps » en tant que grandeur. D'ailleurs, on distingue en général : instant et durée quand on parle de cette grandeur. Pour notre étude de ces leçons du manuel Math Elem, il nous semble suffisant de parler du « temps ».

[8] Dans l'édition suivante (2002), cette leçon est peu modifiée.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Compte tenu de sa place dans le manuel, l'objectif « mathématique » travaillé est la comparaison de nombres et le calcul du complément à 70.

Une proposition d'analyse des tâches en termes de registre

Nous proposons une analyse *a priori* en termes de registres pour la résolution de l'exercice 3. L'énoncé et les questions sont formulés dans la langue naturelle. Par ailleurs, un dessin de la côte bretonne avec une route et les deux villes concernées l'accompagnent. Pour résoudre les deux premières questions, plusieurs moyens semblent envisageables :

1) Le problème peut être résolu sans utiliser le registre graphique, en faisant des traitements dans la langue naturelle. Par exemple, on peut dire : « Plus on parcourt de kilomètres, plus on se rapproche de l'arrivée (Quimper). Celui qui a fait le plus de kilomètres est celui qui est le plus près de Quimper. »

   On peut aussi transformer la phrase « Qui est le plus près de Quimper ? » en restant dans le registre de la langue en « Qui est le plus loin de Brest ? ». Et conclure ensuite en utilisant les distances qui sont données par rapport à Brest.

   Dans les deux cas, pour conclure, il faut passer du registre des distances à celui des nombres dans lequel va se faire la comparaison.

2) Une autre approche consiste à utiliser le registre graphique et dispense des traitements langagiers précédents. Pour cela, il faut convertir le texte en graphique : les longueurs doivent être interprétées *sur le dessin de la route*. La « longueur déjà parcourue » doit être traduite en termes de position : A est avant B lorsque le nombre qui mesure la distance parcourue par A est inférieur au nombre qui mesure la distance parcourue par B (ou bien plus le nombre de kilomètres est grand, plus la longueur est grande à partir du départ). Ensuite, il faut extraire la mesure de ces longueurs, classer les nombres, puis convertir l'énoncé et la question sur le graphique, c'est-à-dire, « voir » sur le graphique les positions relatives des trois coureurs et repérer graphiquement celui qui est le plus près de Quimper.

L'aide du guide du maître se situe dans les deux registres : langagier et graphique. Néanmoins, l'expression « faites reformuler » ne pointe pas véritablement les traitements langagiers possibles. En revanche, l'aide semble plus précise sur la conversion entre les registres langagier et graphique.

On voit que résoudre cet exercice nécessite des connaissances spatiales qui se manifestent dans la langue (plus près – plus loin), sur un graphique et dans le double point de vue sur la

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

longueur (distance parcourue et position). En outre, ces connaissances ne sont pas isolées car elles doivent être reliées aux nombres, les longueurs étant mesurées.

Quelle articulation avec l'étude de la grandeur longueur ?

Pour les élèves, dans ce manuel, la leçon 11 constitue la première occasion de l'année de travailler avec la longueur, et c'est une leçon du « numérique ». Nous voulons maintenant voir l'articulation éventuelle avec l'étude des longueurs, dans le domaine « mesure ». En fait, le kilomètre n'est pas étudié dans le manuel : il est introduit au CE2 dans cette collection. Au CE1, les premiers exercices portant explicitement sur la longueur commencent à la leçon 16, il s'agit d'abord d'utiliser la règle graduée en cm / mm, puis en leçon 17 de travailler sur l'additivité des longueurs par des mesurages (longueurs données en cm).

Nous dirons que, dans le cas de l'exercice 3, des connaissances spatiales sont nécessaires et qu'elles sont à la charge de l'élève sans être intégrées dans la progression sur les longueurs dans le manuel. Ceci implique, selon nous, que les deux premières questions de l'exercice 3 (leçon 11) sont susceptibles de perturber l'avancée du temps didactique. Toutefois le fait que cet exercice existe est probablement le signe d'une certaine identification des savoirs qui y sont présents et de la volonté de les faire travailler.

- Autour d'un problème de la vie courante sur le temps au CE2

Comme la leçon à laquelle nous nous intéressons maintenant n'est pas la première dans ce manuel où les élèves rencontrent « le temps », nous présentons d'abord les autres problèmes de « la vie courante » dans lesquels les élèves ont rencontré cette grandeur avant la leçon 41.

Le temps dans les problèmes de la vie courante

Il existe des exercices de calcul de durées (ou de positions dans le temps) dans les leçons 8, 9 et 30 (sauf erreur, nous les avons tous relevés jusqu'à la leçon 41 qui nous intéresse particulièrement). Dans la leçon 8 (« Ajouter »), on trouve cet exercice de comparaison qui n'est pas raccroché aux autres exercices de la leçon, ni par le domaine numérique, ni par le type de problèmes[9] :

> Paul a 9 ans.
> Lily a 4 ans de plus que lui.
> Quel âge a Lily ?

---

[9] Le domaine numérique travaillé dans la leçon 8 est celui des nombres entiers de 2 ou 3 chiffres et on travaille des exercices de transformations d'états dans lequel on doit trouver l'état final.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Chloé a 10 ans de plus que Paul.

Quel âge a-t-elle ?

Combien Chloé a-t-elle de plus que Lily ?

Lily a 3 ans de plus que Rémi.

Quel âge a Rémi ? (Math Elem, CE2, leçon 8, exercice 4)

Pour résoudre l'exercice, il faut probablement être capable de transformer la question (traitement) : *Quel âge a-t-il ?* en *Combien d'ans a-t-il ?*

Un autre exercice se situe dans la leçon suivante (« réunir ») :

> Marion a regardé le dernier épisode de Zorro pendant 20 minutes, puis elle a regardé un dessin animé pendant 25 minutes.
>
> Pendant combien de temps a-t-elle regardé la télévision ? (Math Elem CE2, leçon 9, exercice 5)

Les connaissances relatives au temps nécessaires pour résoudre cet exercice concernent la durée et sa traduction dans le langage. C'est le mot « pendant » associé à « combien » qui semble être le pivot. Il faut ajouter deux durées pour en trouver une troisième.

En leçon 30, « Écrire les nombres jusqu'à 9999 », on trouve l'exercice 3 :

> Les premiers Jeux Olympiques modernes d'été ont eu lieu en 1896. Depuis ils se tiennent tous les quatre ans.
>
> Les Jeux Olympiques de 1916, de 1940 et de 1944 ont été annulés. Renseigne-toi pour savoir pourquoi.
>
> Écris dans l'ordre chronologique, les dates des Jeux Olympiques qui ont eu lieu après 1900. »

L'objectif « mathématique » consiste à compter de 4 en 4, à partir d'un nombre de 4 chiffres. Du point de vue des grandeurs, il s'agit, étant donnée une date (une position dans le temps), d'en déterminer une autre par ajout d'une durée mais c'est l'expression « tous les quatre ans » qui commande ce calcul.

Une leçon sur les nombres de quatre chiffres avec des connaissances spécifiques sur le temps

Venons-en à la leçon 41. Le guide du maître indique :

> Objectif de la fiche : donner du sens aux nombres.
>
> La notion de durée est sous-jacente à toutes les activités de la fiche.
>
> Déroulement du travail :
>
> Première phase : compréhension de la situation
>
> Travail collectif
>
> laissez les élèves découvrir l'illustration et sollicitez leurs remarques.
>
> Lisez ou faites lire le commentaire du début, puis posez quelques questions de compréhension sur les dessins et les dates.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

- En quelle année Philippe 1^er^ est-il né ?
- Qui est devenu roi en 1180 ?
- Quelle est la date de la mort de Louis VI le Gros ?

Cette phase préliminaire est importante pour que les élèves s'imprègnent du sens des données.

Deuxième phase travail individuel

Les élèves répondent par écrit aux questions de la fiche. Faites une mise en commun collective ou en petits groupes. Veillez à ce que les réponses soient justifiées.

La page du livre de l'élève est la suivante (nous numérotons les questions).


Fiche 41

Les dates de l'histoire

• Ajouter 100, 200, 300.
• Additionner 2 nombres de 2 chiffr[es] sans retenue.

1 Voici les sept premiers rois Capétiens. La première date inscrite sur la médaille est l'année de leur naissance, la deuxième, celle du début de leur règne et la troisième, l'année de leur mort.

1

Philippe Auguste :
a. Quel âge avait-il à sa mort ?
b. Combien de temps a-t-il régné ?
c. A-t-il pu connaître Louis VI ?

2

Quel est, de ces sept rois de France...
a. celui qui a vécu le plus longtemps ?
b. celui qui a été roi le plus jeune ?
c. celui qui a régné le plus longtemps ?

3

Qui était roi...
a. en 1000 ? b. en 1038 ? c. en 1055 ? d. en 1100 ?

quarante-sept 47

Cette leçon intervient après l'étude des nombres de 4 chiffres et avant celle des nombres de 5 chiffres. Les questions 1a 1b, 2a 2b 2c mobilisent un calcul de durée par différence entre deux positions dans le temps accompagné, pour les questions 2 a, b, c, d'une comparaison de durées. Les questions 1c et 3 demandent des comparaisons de positions dans le temps qui passent par la comparaison de nombres.

Nous proposons une analyse, en termes de registres, de cet exercice et des questions proposées dans le guide du maître.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Les questions introductives mobilisent un traitement dans la langue naturelle : est né / année de naissance, début du règne / est devenu roi, année de mort / date de la mort et une conversion de registre : la première date, la deuxième, la troisième doivent être associées aux trois écritures chiffrées sur chaque médaille.

Pour répondre à la question 1c, « [Philippe Auguste] a-t-il pu connaître Louis VI ? », le travail est plus complexe. Il faut d'abord comprendre, dans le registre de la langue naturelle, le verbe « connaître » et même la locution « pouvoir connaître » : *connaître* signifie avoir été vivant pendant un même moment ou encore que l'intersection entre les intervalles de temps qui correspondent à la vie des deux individus est non vide.

Nous pouvons alors envisager deux façons de résoudre l'exercice. On voit que le guide du maître ne donne pas d'aide pour cela.

1) Le problème peut se résoudre en se plaçant dans le registre graphique, en représentant linéairement le temps. Il s'agit de changer de registre : placer les dates de vie et de mort de Louis VI (LVI) et Philippe Auguste (PA) sur une ligne en respectant les positions relatives. Pour cela, il faut comparer les nombres. Les vies des deux hommes doivent être repérées sur le graphique en termes d'intervalles. Il faut aussi effectuer le changement de registre pour la question, c'est à dire repérer un éventuel chevauchement entre les deux « intervalles de vie ».
2) On peut aussi résoudre le problème sans passer par le registre graphique, en effectuant des traitements dans la langue naturelle et des conversions avec le registre numérique (complétés par des traitements, des comparaisons de nombres, dans le registre numérique). Par exemple, on peut essayer de répondre aux deux questions :
   a. PA est-il né après la mort de LVI ?
   b. PA est-il mort avant la naissance de LVI ?

   Elles peuvent se reformuler, pour se rapprocher du registre numérique, en :
   a. L'année de naissance de PA vient-elle après l'année de mort de LVI ?
   b. L'année de mort de PA vient-elle avant l'année de naissance de LVI ?

   On peut aussi suivre l'ordre des évènements des vies de LVI et PA : qui est né le premier ? qu'est-ce qui se passe ensuite ? etc. et conclure.

Les questions 3 a, b, c) sont un peu plus simples car elles reviennent à situer un nombre dans un intervalle. Il faut tout de même transformer, dans le registre de la langue naturelle, « être

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

roi en » par « avoir lieu après le début du règne d'un roi et avant l'année de sa mort » et passer du registre la langue naturelle à celui des nombres pour la comparaison.

Quant aux calculs de durées, il s'agit toujours de faire la différence de deux dates, mais les termes dans lesquels sont formulées les questions sont variés et certaines demandent un traitement probablement plus important que d'autres :

durée de vie = âge à la mort = année de mort – année de naissance

temps de règne = année de mort – année de début de règne

âge de début de règne = année de début de règne – année de naissance

Pour répondre aux questions 2 a, b, c, il faut, en plus de calculer des durées, les comparer. Pour déterminer, celui qui a vécu le plus longtemps, il faut calculer tous les âges à la mort et celui qui a vécu le plus longtemps est celui qui est mort avec le « plus d'âge » (comme la question 1a). Celui qui a été roi le plus longtemps est celui qui a eu le temps de règne le plus long (comme la question 1b). Celui qui a été roi le plus jeune est celui qui a le moins d'âge au début de son règne (ce point n'apparaît pas dans la question 1).

L'étude du temps

Dans ce manuel, l'étude du temps apparaît explicitement en leçon 94 avec la lecture de l'heure, elle est poursuivie en leçon 95 avec les calculs de durées qui impliquent des conversions dans le système (heure, minute) et du repérage dans le temps. On s'appuie sur un programme de télévision.

Les tâches convoquées ressemblent à celles rencontrées en leçon 41 mais elles semblent plus structurées et la langue utilisée peut-être moins riche :

- déterminer une heure de fin, connaissant l'heure du début et la durée,
- déterminer des durées connaissant les heures de début et de fin,
- comparaison de deux durées calculées d'après des heures de début et de fin,
- déterminer l'intersection entre deux intervalles de temps donnés par le début et la fin : « Noémie veut regarder les émissions « Une famille en or » et « Seconde B ». Le peut-elle ? Pourquoi ? »

Le guide du maître ne donne pas d'indication quant à des aides possibles pour ces exercices, si ce n'est de faire lire un programme réel de télévision. Il nous semble donc que les auteurs du manuel ne prennent en compte spécifiquement la complexité du repérage dans le temps ni

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

dans la leçon 41, ni dans la leçon 95. L'évolution du manuel dans l'édition suivante nous semble significative d'un regard différent sur cet aspect.

L'évolution entre deux éditions

Dans l'édition suivante du manuel (2001), la leçon 41 a disparu (si l'on peut dire), de même les exercices évoqués des leçons 9 et 30. En revanche on trouve davantage d'exercices de calcul d'âge par comparaison (type leçon 8) : dans les leçons 17, 18 et 43. Des exercices de conversion dans les systèmes (heure, minute) et (an, semaine) apparaissent en leçon 40. Autour de la propriété de conservation des écarts par ajout ou retrait du même nombre à chacun des deux termes (entre les leçons 81 et 82), on trouve des calculs de durée qui impliquent : date repérée par une année, durée d'un événement en années et âge. Les leçons 94 et 95 sont nettement avancées puisqu'elles apparaissent en position 54 et 55 (presque à l'identique). En leçon 64, on trouve un calcul d'heure, par heure de début et durée. En bilan sur la « soustraction », entre les leçons 81 et 82, bien que ce point ne semble pas avoir été spécifiquement préparé avant, on trouve deux problèmes impliquant date et âge (calcul d'un âge par différence de dates, calcul d'une date de mort par date de naissance + âge).

La fiche 41 de 1997 se retrouve partiellement dans la fiche 85 intitulée « ranger des nombres » (son domaine numérique est celui des nombres de 4 chiffres mais elle vient après la comparaison des nombres de 5 chiffres). On donne une liste de personnages célèbres avec leur date de naissance et de mort. Il y a un seul calcul de date, toutes les autres questions concernent le repérage dans le temps, sans calcul de durée, avec une langue riche du type de celle rencontrée en leçon 41 (mais réduite aux comparaisons de date) : « Vrai ou Faux. Léonard de Vinci aurait pu peindre le portrait de Christophe Colomb ». Par rapport à la leçon 41, il y a des niveaux de difficultés plus variés dans les questions et la difficulté maximale a été réduite. Le guide du maître suggère de représenter le temps sur un axe.

- Pour conclure

Il nous semble que ces deux extraits présentent des caractéristiques communes quant au traitement des grandeurs dans l'étude des nombres. On propose aux élèves des tâches relativement complexes qui impliquent comparaison des nombres via des comparaisons de grandeurs (qui sont exprimées par un ou plusieurs nombres accompagnés d'une ou plusieurs unités[10]). Cette complexité se manifeste d'abord par des formes langagières spécifiques des grandeurs d'une assez grande diversité. Elles sont aussi parfois le signe de notions mathématiques différentes : telles la distance à un point (ou la position dans le temps - instant) et la longueur (ou la durée). Dans les deux cas, il y a une conversion de registre à faire entre la langue naturelle qui exprime des grandeurs et les nombres. Cette conversion pouvant être réalisée éventuellement en deux temps : d'abord de la langue naturelle vers le registre graphique, puis du registre graphique vers celui registre des nombres. Dans les deux cas, l'activité permet d'élucider un usage social des nombres.

Il n'est pas sûr que les moyens de résoudre les problèmes et les difficultés spécifiques à ces exercices soient véritablement identifiés dans la première édition du manuel. De même (ou de plus), l'articulation entre ces grandeurs du numérique et celles du domaine « mesure » ne semble pas être envisagée de façon très stricte même si on peut noter certaines évolutions entre les deux éditions du manuel au CE2, évolutions dont on peut se demander d'ailleurs si elles ne concourent pas parfois à la suppression de certaines difficultés plutôt qu'à l'aménagement d'un chemin pour les dépasser.

5.2. 2ème exemple : séparation entre usages des nombres et tâches relevant du numérique

Nous nous proposons maintenant d'étudier une leçon d'un autre manuel. Il s'agit du manuel Nouvel Objectif Calcul au CE2 (Peltier, 1995). Là encore nous avons d'abord remarqué cette leçon parce qu'elle proposait une prise en compte particulière des grandeurs à travers des nombres tirés de la vie courante. De même que ce que nous avons dit pour la collection Math Élem, nous ne sommes pas en mesure de dire si ce traitement est caractéristique du manuel. Nous avons le sentiment que dans cette leçon, le traitement des nombres tirés de la vie courante est opposé à ce que nous avons écrit pour le premier exemple.

Il s'agit de la leçon 64 du manuel (sur 73 leçons). Elle est donc plutôt située en fin d'année. C'est une leçon sur « les grands nombres ». Ces grands nombres sont insérés dans un environnement social, un contexte : un extrait d'un livre de record.

---

[10] Ces grandeurs que nous qualifions de mesurées sont ce qu'on appelait autrefois les « nombres concrets », nous en reparlerons au chapitre 2.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

64 Numération : les grands nombres

Se familiariser avec de grands nombres que l'on rencontre dans divers documents, aborder la numération orale dans ce champ numérique.

Découverte

1. Lis le document ci-contre.
Recopie dans un tableau de numération les nombres du document qui sont écrits sur fond jaune.

		Classe des mille	Classe des unités
c d u	c d u	c d u	c d u

2. En t'aidant du tableau de numération, écris les nombres dans l'ordre croissant.
N'oublie pas de laisser des espaces entre les classes pour faciliter la lecture.

3. Pour lire ces nombres, tu as besoin de mots nouveaux qui désignent les classes.
Si tu les connais, écris-les dans le tableau.
Sinon, questionne ton maître ou ta maîtresse.

4. Écris en lettres les nombres de cinq chiffres ou plus qui sont dans le tableau.
Pour chacun écris les décompositions comme dans l'exemple :

sept cent quatre-vingt-cinq mille
[(7 x 100) + (4 x 20) + 5] x 1 000 = 785 000

(7 x 100 000) + (8 x 10 000) + (5 x 1 000) = 785 000
700 000 + 80 000 + 5 000 = 785 000

AIDE-MÉMOIRE N° 2 et 3 - PAGE 174, 1 et 2 PAGE 175

Exercices et problèmes

1 Décompose les nombres comme dans l'exemple :

12 560 = 10 000 + 2 000 + 500 + 60 = (1 x 10 000) + (2 x 1 000) + (5 x 100) + (6 x 10)

24 138 = ... 9 851 = ... 84 807 = ...
10 712 = ... 143 237 = ... 364 643 = ...

■ Intentions pédagogiques
Familiariser les enfants avec les grands nombres que l'on rencontre dans divers documents. Les amener à constater que les règles de la numération écrite s'étendent à ces nombres. Aborder la numération orale dans ce champ numérique.

■ Organisation de l'étape
2 séances.

■ Matériel
Livre de l'élève pages 150 et 151.
Calculatrices.
Pour le livre, étiquettes sur lesquelles sont inscrits les mots-nombres de l'exercice 4 pour chaque enfant.
Photocopies de tableaux du type suivant :

Je tape					
Je vois					

CALCUL RÉFLÉCHI

DICTÉE DE NOMBRES
Dicter aux enfants des nombres de 3 à 6 chiffres. Ils doivent les écrire sur leur ardoise. Corriger après chaque écriture.
Puis, à tour de rôle, chaque enfant choisit un nombre, l'écrit sur son ardoise et le propose à ses camarades. Veiller à ce que les enfants respectent l'espace des milliers.
Les nombres corrigés restent écrits sur le tableau.
Terminer par une lecture de tous les nombres.

DÉCOUVERTE

PREMIÈRE PHASE

• Exploration collective
Les enfants lisent le texte et le document puis racontent ce qu'ils ont compris et distinguent le document des consignes de travail.
Procéder à une lecture à haute voix du document car la lecture des nombres ne peut pas être exigée des enfants en ce début de séquence.
Puis, situer les différents pays sur une carte ou un globe. S'assurer de la compréhension des informations apportées par le document.
Avertir les enfants qu'ils ne doivent tenir aucun compte des signes et des unités qui accompagnent les nombres et rappeler que leur travail de rangement ne porte que sur les nombres écrits sur fond jaune.
Relire les consignes, les lister brièvement sur le tableau :
– recopier les nombres dans le tableau ;
– nommer les classes ;
– ordonner les nombres relevés.

• Travail individuel
Les enfants reproduisent le tableau. Ce travail doit renforcer la notion de classe contenant chacune des unités, dizaines, centaines. Puis ils y placent les nombres et les ordonnent.

• Mise en commun
A partir des propositions des enfants, réaliser un grand tableau représentant les quatre premières classes de la numération. Y ranger, dans l'ordre croissant, les nombres rencontrés dans le document.
La lecture des grands nombres peut se faire dans un premier temps de la manière suivante (par tranches muettes) :
22 402 200 → « vingt-deux, quatre cent deux, deux cents »
Cette lecture sera mise au point et améliorée au cours de la séquence.
Faire remarquer que les nombres s'écrivent en partant de la colonne de droite du tableau, c'est-à-dire en commençant par la classe des unités.
Déterminer la valeur successive des différents groupements et établir la relation qui existe entre eux.
Les enfants savent que :
10 unités → 1 dizaine
10 dizaines → 1 centaine
10 centaines → 1 unité de mille
10 unités de mille → 1 dizaine de mille
10 dizaines de mille → 1 centaine de mille
De plus, chaque groupement est dix fois plus grand que le précédent.
On peut alors poursuivre :
10 centaines de mille (ou mille milliers) → 1 unité de nouvelle espèce appelé « million ».
« Les millions vont être regroupés, sur le même principe que les milliers, en dizaines et centaines : c'est la classe des millions. »

(Peltier, 1995, livre de l'élève p. 150 et du maître)

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

La première partie du travail proposé par le guide du maître concerne le contexte : il s’agit de « s’assurer de la compréhension des informations apportées par le document ». Il y a donc la volonté d’élucider sa signification. Le travail mathématique sur les grands nombres commence ensuite.

Pour le mener à bien, l’enseignant doit d’abord « Avertir les enfants qu’ils ne doivent tenir aucun compte des signes et unités qui accompagnent les nombres. » Les élèves doivent ensuite « Recopier les nombres dans le tableau (…). Ordonner les nombres relevés ». Dans la deuxième question, on demande donc aux élèves de comparer des nombres qui mesuraient des grandeurs diverses : des aires, des populations, des années, des longueurs. Il nous semble tout d’abord que cette tâche n’a pas de légitimité autre que scolaire. Par ailleurs, on observe que le travail relatif aux grands nombres ne peut pas contribuer à élucider la signification du document.

Du point de vue l’activité cognitive, aucune conversion du registre de la langue naturelle vers celui des nombres n’est nécessaire pour réaliser les questions 1 à 4 puisque ces questions portent sur les nombres sortis de leur contexte et qu’« [on ne doit] tenir aucun compte des signes et unités qui accompagnent les nombres ».

On aurait pu proposer un travail portant par exemple sur la comparaison des superficies des différentes îles qui aurait pu conduire à la détermination d’un nouveau record. On peut supposer qu’un tel travail aurait renforcé la compréhension du document mais le choix qui est fait consiste à comparer des nombres qu’on a coupés du contexte qui les a produits. On aurait aussi sans doute pu proposer des nombres à comparer qui ne soient pas tirés d’un contexte. Dans cette leçon, les grandeurs sont dans le contexte mais l’activité demandée ne nécessite pas de conversion de registre qui aurait permis qu’elles contribuent à l’objectif mathématique de la leçon.

Cette leçon a été « supprimée » de l’édition suivante du manuel mais elle était présente dans celle qui précédait.

5.3. Conclusion

Il nous semble qu’il faut voir ces exemples comme des possibles, des choses qui existent. Ces différents extraits ne présentent pas le même traitement des grandeurs. Dans les leçons 11 et 41 de ME, les grandeurs semblent être mobilisées via la langue naturelle en utilisant un lexique spécifique qui implique un traitement langagier conséquent (ou une conversion dans

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

le registre graphique) et aussi une conversion entre le registre de la langue et celui des nombres qui passe par l'identification de grandeurs, mesurées. L'articulation avec le domaine mesure est plus ou moins convaincante, en tout cas elle ne semble pas avoir été à l'origine du choix de ces exercices. Dans la leçon 64 de (Peltier, 1995), on peut imaginer que la lecture du document donne lieu à l'identification d'usages des nombres mais le travail mathématique qui est proposé ne les éclaire pas. En termes de registres, le travail mathématique qui est demandé est interne au registre numérique. Il n'y a en particulier pas de conversion du registre de la langue naturelle dans lequel est formulé le document vers le registre numérique dans lequel le traitement qui consiste à comparer des nombres doit s'opérer, une telle conversion aurait sans doute mobilisé des grandeurs mesurées.

Il nous semble qu'à travers ces deux exemples, on voit dans le travail autour des nombres tirés de la « vie courante » deux types d'activités. L'une conduit à utiliser les mathématiques pour élucider la situation de la « vie courante ». Dans l'autre, on extrait les nombres d'une situation pour en demander un traitement qui n'a pas de lien avec le contexte, même si on s'« assure » au préalable que les élèves ont compris le contexte. Il est pourtant possible de proposer un travail autour des mêmes notions mathématiques, prenant en compte le contexte. Ce travail accroîtrait probablement la compréhension du contexte. Il passerait nécessairement par une conversion entre deux registres : la langue naturelle ou un graphique et les nombres écrits en chiffres. Dans ces deux documents nous voyons des appuis différents sur les usages des nombres. Ils ne développent sans doute pas le même rapport au nombre et aux mathématiques chez les élèves.

6. Synthèse sur les questions

Ce premier tour d'horizon nous permet de relever deux axes pour notre étude :

- ce qui donne sa légitimité au savoir enseigné, aujourd'hui et hier,
    - les savoirs savants de référence et leur légitimité,
    - les pratiques sociales dans l'enseignement d'hier et d'aujourd'hui, leur rôle, leur légitimité,
    - les réseaux trophiques,
- du point de vue des connaissances des élèves d'aujourd'hui, nous cherchons à identifier les liens que les élèves sont capables de faire entre les savoirs qui leur sont enseignés. En quoi ces liens (ou leur absence) sont-ils le reflet des conditions actuelles de l'enseignement ?

Qu'est-ce qui donne leur légitimité aux savoirs enseignés ? Nous avons évoqué plusieurs sources possibles : les savoirs de référence, parmi lesquels des pratiques sociales et des savoirs savants mais aussi la qualité des réseaux trophiques. Si la qualité des réseaux trophiques peut d'abord être vue comme un moyen d'accroître l'efficacité de l'enseignement, nous considérons que c'est aussi un moyen de légitimer l'enseignement de certains objets. En effet, c'est alors l'accroissement de l'efficacité du système qui légitime *a posteriori* qu'on ait enseigné ces objets.

La question de la distance entre le savoir enseigné et le savoir savant (ou les savoirs savants) est cruciale pour nous. Elle se décline de plusieurs façons. Si par exemple Brousseau semble penser qu'il est nécessaire d'enseigner des mathématiques « actuelles » pour former les scientifiques de demain, ce n'est pas le cas de Ma qui semble considérer que c'est un savoir cohérent « mathématiquement correct » et mis en réseau qui est nécessaire. Enfin, il semble bien qu'à l'époque classique, étudiée par Harlé, les savoirs enseignés à l'école primaire étaient tirés d'une source savante pour l'époque, alors que l'intention première n'était sans doute pas de former des futurs scientifiques. Aujourd'hui, à l'école, quelle est la « distance » entre le savoir enseigné et le savoir savant selon les deux types de savoir que nous avons envisagés ?

Dans l'enseignement primaire, comment la question de la légitimité du savoir à enseigner est-elle résolue à différentes époques ? Quels sont les savoirs de référence relatifs aux grandeurs, aux nombres et opérations à l'œuvre dans les programmes d'aujourd'hui et hier ? Sont-ils savants ou relèvent-ils de pratiques de référence pour la vie courante ? Sont-ils toujours bien définis ? Sont-ils caduques ou non ? Sont-ils pertinents du point de vue des besoins trophiques nécessaires pour les enseigner ? Pour l'époque actuelle, s'il faut les modifier, qu'est-ce qu'ils pourraient être ?

L'élucidation de la fonction des références à la vie courante dans l'enseignement des grandeurs constitue un enjeu important pour notre étude. En effet :

- A l'école, primaire en particulier, une pratique de la vie courante peut être un objet d'apprentissage ou un moyen pour l'apprentissage d'autres choses. Autant, il semble facile de supprimer un objet d'apprentissage, autant, avant de supprimer un moyen, il convient de repérer ce à quoi il sert. La situation est en fait encore plus complexe car ce qui constitue une fin à un moment donné peut constituer un moyen plus tard.
- Nous avons dit que les pratiques de la vie courante sont en vigueur notamment à l'extérieur de l'école. Si les pratiques enseignées ne reflètent plus les pratiques de

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

référence pour la vie courante du fait de l'évolution de ces dernières, au fil du temps les deux mondes peuvent se désarticuler et le savoir enseigné perdre en légitimité. Ceci reste vrai, que l'enseignement d'une pratique constitue une fin ou un moyen. Aujourd'hui, pour partie au moins, les pratiques de référence pour le mesurage et le calcul dans la vie courante semblent être éloignées de ce que sont apparemment les moyens didactiques pertinents pour enseigner les nombres et les grandeurs. Ce point est donc particulièrement sensible.

- Selon le rôle qu'une société veut donner à son école, elle est susceptible, dans une vision parfois simpliste, d'avoir des idéologies différentes vis à vis de l'enseignement des pratiques de la vie courante : valorisation pour un enseignement « pratique » ou dévalorisation pour un enseignement « intellectuel ». Peut-on interpréter nos deux extraits de manuels en termes de valorisation et de dévalorisation de l'enseignement de telles pratiques à l'école ?

Par ailleurs, les grandeurs sont omniprésentes dans les références à la vie courante mais elles constituent aussi une sorte d'interface entre le *réel* et les mathématiques. On ne peut donc repérer simplement ce qu'elles représentent quand elles sont là. En effet, si une théorie de la mesure des grandeurs gouverne les nombres et les opérations, les grandeurs peuvent être là au titre des mathématiques. Elles peuvent aussi être là comme représentantes de pratiques de référence pour la vie courante qu'on voudrait enseigner. Ces deux positions peuvent s'exclure ou être complémentaires. Ces éléments sont susceptibles de rendre complexes certaines analyses. Par exemple, Harlé semble voir presque exclusivement dans la présence des grandeurs au début du 20ème siècle le signe de l'enseignement de pratiques sociales alors que nous y voyons aussi le signe du savoir savant de référence de cette époque.

Les réseaux trophiques peuvent être envisagés dans deux directions. D'une part, il peut s'agir de regarder ce qui se passe, à un niveau donné, horizontalement, de regarder comment les objets vivent ou ne vivent pas ensemble. Brousseau considère par exemple que les grandeurs et les opérations vivent mal. Parouty (2005) semble montrer que les rapports entre les grandeurs et les nombres sont dégradés dans le discret. Peut-être, les objets, nombres, grandeurs et opérations vivent-ils mal séparément parce qu'ils vivent mal ensemble. Il nous est alors apparu essentiel de comprendre le mieux possible le fonctionnement du bloc, grandeurs, nombres, opérations, hier et aujourd'hui.

D'autre part, les questions de *continuité verticale* semblent avoir leur importance. En effet, si Brousseau les évoque plus ou moins explicitement du point de vue de la légitimation de

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

l'enseignement primaire par le programme de la classe de fin d'études et pour enseigner au plus vite les mathématiques actuelles, il semble bien en confrontant les travaux de Bronner à ceux d'Harlé qu'il faille aussi envisager l'écologie des objets tout au long de la scolarité, sur le plan des savoirs savants de référence, même si le prolongement des études primaires par le secondaire est loin d'avoir toujours été un objectif de l'école et même si Neyret (1995, p. 87) signale l'apparition d'un traité spécifique pour le lycée à la fin du 19ème siècle.

Les liens que sont susceptibles de faire les élèves entre les savoirs qu'on leur enseigne ne sont pas très éloignés des considérations précédentes. En effet, il est connu que la juxtaposition de praxéologies mathématiques, chacune cohérente, ne garantit pas la cohérence de l'ensemble des praxéologies juxtaposées (Bosch, Fonseca & Gascon, 2004). Nous considérons pourtant cette dernière comme nécessaire pour que les élèves fassent des liens. Nous formulons une hypothèse de travail :

La cohérence des savoirs enseignés est un élément important pour que les élèves fassent des liens entre ces savoirs. Cette cohérence ne se limite pas à la cohérence interne des savoirs de référence et ne peut être à laissée à la charge de l'organisation didactique, c'est-à-dire en grande partie à ce que fait l'enseignant dans sa classe. Elle passe par la cohérence mathématique interne des praxéologies mathématiques enseignées, notamment des différentes techniques et technologies entre elles.

Dans quelle mesure les liens entre les savoirs enseignés sont-ils pris en charge par le système d'enseignement ? Pour ce qui relève du savoir mathématique, sont-ils pris en charge par les organisations mathématiques à l'œuvre ou bien en partie par les organisations didactiques (que nous n'étudierons pas) ? On peut penser que l'étude des réseaux trophiques dans les organisations mathématiques est un outil adapté pour mettre à jour ces liens (ou leur absence).

7. Hypothèses

Nous formulons maintenant les hypothèses de notre thèse.

Hypothèse 1

Pour l'école primaire et pour l'étude des grandeurs, nombres et opérations, outre son intérêt historique, l'étude des organisations mathématiques anciennes est susceptible d'éclairer des choix pour les organisations mathématiques actuelles et ce pour deux raisons :

- on peut supposer que les organisations anciennes sont les « produits d'une évolution longue et complexe » (Chevallard, 1992) et de ce fait sont susceptibles de constituer des organisations mathématiques régionales ou globales. Cette propriété potentielle légitime qu'on s'y intéresse, notamment pour l'école primaire où malgré des modifications l'étude des grandeurs, nombres et opérations a de tout temps été objet d'enseignement,

- la reconstruction des organisations mathématiques anciennes permet de faire un pas de côté pour étudier les organisations actuelles.

Hypothèse 2

La réforme des mathématiques modernes a profondément détérioré les chaînes trophiques, notamment pour l'étude de la numération de position et des grandeurs. On peut interpréter certaines difficultés des élèves actuels dans ces domaines comme la conséquence de ces détériorations, les remaniements qui l'ont suivie n'étant pas parvenu à remédier à ce problème.

Hypothèse 3

Certaines théories mathématiques sont susceptibles d'être plus adaptées que d'autres du point de vue de la transposition didactique.

En d'autres termes, dans certaines théories quand les besoins trophiques sont élevés, le passage à la « pratique de la théorie » (du point de vue des praxéologies) se fait au prix de grands sacrifices théoriques qui éventuellement dénaturent de façon assez substantielle la théorie initiale. La « pratique de la théorie » évolue (au moins certaines fois) en une nouvelle théorie qui peut s'interpréter dans (ou comme) une autre théorie, une théorie effective, plus ou moins complète, mais dont les besoins trophiques sont inférieurs à ceux de la théorie initiale. En général, la mise en œuvre de cette théorie effective comporte des trous, peut-être car elle n'est pas pensée comme celle de la mise en œuvre d'une théorie complète.

8. Méthodologie et plan d'étude

Pour étudier nos questions et nos hypothèses, nous nous appuierons sur quatre types de données :

- les programmes et instructions officielles de l'école primaire de 1882 à 2002,

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

- de la littérature noosphérienne, parmi laquelle des ouvrages qui ont pu constituer des traités de référence
- des manuels scolaires de la fin du 19ème siècle à aujourd'hui,
- un test réalisé auprès d'élèves d'aujourd'hui.

Les problèmes relatifs au savoir savant transposé et à sa légitimité occupent une place importante dans les questions qui nous préoccupent. Nous commençons par caractériser globalement les changements intervenus au moment de la réforme des mathématiques modernes de ce point de vue, moment qui semble crucial pour notre étude dans la mesure où il marque la création du domaine « mesure » dans l'enseignement primaire et la séparation des nombres et des grandeurs. Une étude précédente des programmes (Chambris, 2004) montre en effet que, dans les programmes, le système métrique et la numération se sont articulés en 1923 et que cette articulation a été maintenue, malgré quelques modifications en 1945, jusqu'en 1970. Nous pointons les difficultés relatives au savoir savant repérées en 1970, comment elles ont été résolues et des conséquences des solutions sur les programmes qui ont suivi. Nous tentons ensuite de faire une synthèse sur le savoir savant relatif aux grandeurs, l'épistémologie des théories des grandeurs, leurs différences, ressemblances, leurs fonctions. Certaines théories savantes ne seraient-elles pas plus adaptées que d'autres pour l'école primaire ? Au fond, nous faisons l'hypothèse que les mathématiques savantes sont suffisamment souples pour résoudre de nombreux problèmes posés par les transpositions scolaires de théories savantes : on peut notamment changer de théorie ou en écrire une nouvelle si celles dont on dispose ne conviennent pas pour se rapprocher d'un savoir savant adapté au niveau de développement des élèves de l'école primaire (type 2). Nous présentons ensuite d'autres solutions que celle trouvée en 1970, elles aussi globales pour résoudre les mêmes problèmes. Cette première étude est *globale* au sens où elle englobe tout le numérique et les grandeurs (en un sens non géométrique) du primaire, sans distinction de niveau.

Nous voulons mieux comprendre l'écologie des grandeurs dans l'enseignement ancien, avant la réforme des mathématiques modernes. Nous voulons préciser ce qu'indique notre étude des programmes : à savoir l'articulation entre grandeurs et nombres en 1923. Comment, concrètement, l'enseignement des grandeurs contribuait-il à celui des nombres et des opérations ? Notre « concret » sera limité à ce que nous voyons dans des manuels scolaires anciens. Nous conduisons deux études assez générales en nous appuyant principalement sur les sommaires de manuels : les rapports entre numération et système métrique puis le sens des opérations ; et aussi une étude plus fine de l'enseignement du système métrique. Cette

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

dernière étude est complétée par une étude bibliographique sur les connaissances didactiques actuelles relatives à l'apprentissage de la numération de position et des grandeurs, nous essayons d'évaluer ainsi la pertinence des praxéologies anciennes en utilisant les connaissances didactiques d'aujourd'hui. Cette triple étude contribue pour nous à ouvrir un « champ de possibles ». Nous pensons en effet que l'étude de praxéologies anciennes, qui auraient eu une certaine longévité, peut nous permettre de repérer des conditions écologiques viables dans l'enseignement ancien pour des objets d'enseignement encore actuels. Par suite, il nous semble pertinent d'interroger l'actualité de ces conditions pour éclairer des choix possibles pour l'enseignement actuel.

Compte tenu d'une première connaissance de l'enseignement primaire actuel, liée à notre expérience professionnelle de formatrice d'enseignants du premier degré, d'une étude des évaluations nationales d'entrée et 6$^{\text{ème}}$, de notre étude des programmes actuels et d'une première connaissance de l'enseignement primaire antérieur à la réforme apportée par l'étude des programmes et manuels anciens, nous élaborons un questionnaire pour les élèves actuels. Il s'agit de poser des questions qui nous permettent de voir s'ils mobilisent leurs connaissances relatives aux grandeurs, nombres et opérations dans différents contextes. Ces contextes peuvent ne pas être habituels pour eux dans la mesure où nous empruntons une partie de nos questions à l'enseignement antérieur à la réforme où grandeurs et nombres étaient probablement mieux articulés qu'aujourd'hui. Pour simplifier, on peut dire que depuis 1980, pour les nombres entiers, on apprend les nombres, pour eux-mêmes, puis on les applique aux grandeurs. En fin de scolarité primaire, les élèves sont-ils capables d'utiliser conjointement leurs connaissances sur les grandeurs et les nombres pour traiter les situations qui impliquent des grandeurs ? Étant donnée une rupture possible dans l'enseignement entre les grandeurs et les nombres, il se peut que les élèves ne parviennent pas à « faire des liens entre les deux domaines », voire à capitaliser leurs apprentissages dans chacun des domaines. Il ne s'agit pas de comparer les connaissances des élèves actuels à celles des élèves d'hier (ceci poserait des problèmes d'ordre méthodologique que nous n'avons pas tenté de résoudre). Nous comparons leurs connaissances relatives aux grandeurs et au numérique dans différents contextes : numériquement pur, avec des grandeurs discrètes ou continues. L'analyse des résultats de notre questionnaire nous permet de pointer certains phénomènes relatifs aux connaissances des élèves d'aujourd'hui sur les grandeurs, les nombres et les opérations. Elle nous permet notamment de poser des questions d'ordre écologique. Pour la suite, pour des

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

questions de temps, nous restreignons notre travail à celles qui impliquent numération de position et système métrique.

Enfin, nous réalisons une étude de manuels scolaires actuels sur la numération de position et le système métrique. Nous voulons mettre à jour les organisations mathématiques à l'œuvre aujourd'hui. Une nouvelle étude de la numération de position dans l'enseignement ancien nous apparaît nécessaire. Devant la diversité de l'étude de la numération de position dans les manuels actuels, l'uniformité des manuels anciens nous semble rassurante. Elle nous permet de mettre en évidence une organisation mathématique de cet enseignement avant la réforme. Nous utilisons cette OM pour faire un pas de côté pour décrypter la période actuelle. L'étude de l'OM classique nous permet de nous donner les moyens de prendre du recul, d'interroger l'OM actuelle, de comprendre pourquoi elle n'est apparemment pas efficace sur certains points et peut-être de donner des pistes pour la modifier. Par ailleurs, même si le but n'est pas de caractériser l'enseignement de la numération à différentes périodes qui ont suivi la réforme, une étude chronologique de cet enseignement, de la réforme à aujourd'hui, nous permet de mieux comprendre comment les objets se transforment au fil du temps, elle nous permet de repérer les filiations. Nous faisons l'hypothèse que le repérage des évolutions nous permettra de mieux comprendre la situation actuelle.

Compte-tenu de ce que nous avons indiqué dans ce chapitre, dans le prochain nous étudions l'évolution des rapports entre les grandeurs et les nombres dans les programmes de l'école primaire au 20$^{\text{ème}}$ siècle. Nous voulons aussi relier les praxéologies mathématiques des grandeurs et des nombres que nous y voyons à des théories savantes des grandeurs. Nous tentons enfin de caractériser ce que pourrait être une « bonne » théorie des grandeurs pour l'école primaire.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Chapitre 2. Relations entre programmes et savoirs savants

Dans ce chapitre, nous menons tout d'abord une étude des programmes de primaire en mathématiques au 20$^{\text{ème}}$ siècle. Nous cherchons à dégager les grandes lignes des évolutions des relations entre les grandeurs et les nombres en particulier au moment de la réforme des mathématiques modernes. Cette étude tente aussi de caractériser les savoirs savants à l'œuvre aux différentes époques. Pour caractériser ces savoirs savants, nous avons deux méthodes. La première consiste à repérer des textes qui ont pu servir de savoirs savants de référence. La deuxième est plus originale. À partir des discours sur les rapports entre les grandeurs et les nombres que nous lisons dans les programmes et instructions d'une part, de diverses théories savantes des grandeurs d'autre part, nous proposons des reconstructions. Ainsi, même s'il est clair que certains programmes ne s'inspirent pas d'une théorie des grandeurs, nous nous efforçons à les interpréter dans de telles théories. Ceci nous permet d'identifier des besoins théoriques en termes de théories des grandeurs pour l'école.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

1. Introduction

Dans ce chapitre, nous interrogeons, à un niveau global, c'est-à-dire pour l'ensemble du primaire, les relations entre les grandeurs et les nombres dans les programmes et la place du savoir savant relatif aux grandeurs dans ces relations.

Que peut-on dire des transformations des programmes relatives aux relations entre les grandeurs et les nombres à la charnière de la réforme des mathématiques modernes ? À quels besoins répond la création du domaine mesure en 1970 ? Qu'en est-il de ces besoins, aujourd'hui ? Quand les grandeurs disparaissent de l'étude d'une notion en 1970, quel genre de conséquence peut-on observer à la lecture des programmes au niveau des organisations mathématiques ? Comment comprendre les évolutions récentes des programmes dans le numérique qui réintroduisent localement, explicitement ou implicitement, des grandeurs ? Fondamentalement, il semble qu'on ne peut se passer d'elles dans l'enseignement des mathématiques en primaire, elles y semblent partout denses.

Nous nous plaçons dans la perspective d'un savoir « mathématiquement correct » mais pas nécessairement utile à la sphère productrice des savoirs (cf. chapitre 1). Peut-on interpréter les grandeurs et les nombres présents dans les différents programmes à l'aide d'un savoir savant relatif aux grandeurs ? Nous souhaitons élargir la question car des discours parfois contradictoires circulent quant à certaines des qualités mathématiques des grandeurs. Que peut-on dire des grandeurs du point de vue du savoir savant ? Toutes les théories des grandeurs se valent-elles ? Certaines ne seraient-elles pas meilleures que d'autres du point de vue de l'apprentissage ?

Pour étudier ces questions, dans une première partie, nous conduisons une étude du programme de 1970 que nous replaçons dans une étude plus globale des programmes de l'école primaire depuis le début de l'école obligatoire jusqu'à aujourd'hui.[11] Nous essayons d'abord de repérer les déterminants de la création du domaine mesure en 1970. Ensuite, comme l'âge des élèves qui nous intéressent implique nécessairement « une bonne dose de concret » dans les mathématiques qu'on leur enseigne, en comparant avec les programmes plus anciens nous essayons de comprendre en quoi les grandeurs disparaissent des

[11] Nous avons consulté les programmes et instructions de 1882, 1923, 1938, 1945, 1970, 1980, 1985, 1995, 2002. Nous désignons les programmes et instructions publiés en 1977 pour le CP, 1978 pour le CE, 1980 pour le CM par « programmes de 1980 ». En 1938, il ne s'agit que de programmes pour le cours supérieur mais des instructions sont susceptibles d'avoir infléchi le travail pour les niveaux antérieurs.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

programmes en 1970. Nous tentons ensuite de caractériser les retours des grandeurs dans les programmes récents. Ce point nous amène à notre deuxième partie, nous présentons trois théories avec quelques détails et nous les utilisons pour interpréter certains programmes. Nous voulons utiliser des savoirs savants relatifs aux grandeurs pour étudier la cohérence du savoir enseigné sur les grandeurs et les nombres. Nous abordons notre troisième partie avec des paradoxes naïfs sur les grandeurs que nous tentons d'élucider du point de vue des savoirs savants. Nous tentons de proposer quelques questions simples pour caractériser les théories des grandeurs, de la mesure ou de leur mesure dans la perspective de l'enseignement des grandeurs, des nombres et des opérations à l'école.

Rappelons que nous sommes préoccupée par la cohérence des praxéologies mathématiques enseignées. On peut aussi interpréter ce chapitre comme une étude de la question suivante : si on considère qu'à l'école primaire on construit les nombres à partir des grandeurs, plus précisément comme mesures de grandeurs, quels sont les besoins que cela engendre au niveau d'une théorie savante des grandeurs ? C'est donc le savoir mathématiquement correct qui nous préoccupe et non les théories les plus sophistiquées qui existent dans le domaine.

De ce point de vue nos trois parties peuvent être interprétées comme suit :

1) Que peut-on dire, à l'aide des programmes, des besoins nécessaires en termes de théories des grandeurs pour l'apprentissage des grandeurs et des nombres présents à différentes époques ? Les besoins exprimés par les programmes définissent les contours d'un champ de possibles quant aux relations entre les grandeurs et les nombres dans les savoirs savants pouvant servir de référence pour l'apprentissage.
2) Quelles théories permettent de satisfaire les besoins identifiés dans les programmes que les programmes aient ou non été écrits en référence à ces théories ?
3) En étudiant d'autres théories, peut-on mieux déterminer le contour du champ des possibles ?

Nous aurions pu organiser ce chapitre dans l'ordre inverse, à savoir une caractérisation générale des théories, puis quelques théories pour éclairer la lecture de certains programmes, puis l'évolution des grandeurs dans les programmes. Ceci aurait sans doute été plus correct sur le plan de la logique. Ce n'est pas l'ordre que nous avons retenu, nous espérons que la lecture du chapitre en sera rendue moins aride. L'ordre finalement choisi devrait permettre notamment d'entrer plus progressivement dans l'étude des théories. L'inconvénient du choix que nous avons fait est que, notamment pour la première partie, nous sommes parfois amenée à utiliser des éléments que nous préciserons plus tard.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

2. Petite histoire des rapports entre grandeurs et nombres dans les programmes[12]

2.1. Histoire de la naissance du domaine mesure

▪ Éléments du contexte

Au primaire, le programme de 1970 est connu comme étant celui des mathématiques modernes. Pour ses auteurs, il s'agit de répondre à deux types d'impératifs qui découlent d'une part « d'une scolarité obligatoire prolongée », d'autre part « de l'évolution contemporaine de la pensée mathématique ». Il ne s'agit donc

> plus essentiellement de préparer les élèves à la vie active et professionnelle en leur faisant acquérir des techniques de résolution de problèmes catalogués et suggérés par « la vie courante », mais bien de leur assurer une approche correcte et une compréhension réelle des notions mathématiques liées à ces techniques.

En 1923 et 1938, mais pas en 1945, les instructions avaient suggéré d'introduire des démarches actives pour l'enseignement. L'introduction des instructions de 1970 se termine ainsi :

> C'est par des démarches de cette nature, faites d'actions et de réflexion, que l'enfant contribuera à construire son propre savoir et connaîtra la joie de découvrir et de créer.

En 1970, ce projet est en outre soutenu par « les progrès dans la connaissance du développement psychologique de l'enfant ».

En dépit de ces changements, le programme est une réécriture allégée de celui de 1945 :

> Alléger le programme [de 1945], en donner une rédaction différente qui réponde mieux aux finalités actuelles de l'école élémentaire, l'accompagner de commentaires qui, sans introduire pratiquement de terminologie nouvelle, annoncent et préparent une rénovation plus profonde et plus satisfaisante.

Avant 1970, le programme est intitulé : calcul, arithmétique et géométrie. En 1970, il devient « l'enseignement mathématique », puis « mathématiques » à partir de 1980.

Deux parties sont marquées clairement dans les programmes de 1882 et 1923 : calcul, arithmétique d'une part, géométrie d'autre part (sauf en classe enfantine et au CP où il n'y a pas de géométrie). Dans le programme de 1945, la séparation entre les deux parties n'est pas explicitée, cependant l'ordre des notions n'est pas très différent de celui de 1923.

---

[12] Une première version de cette partie a été publiée dans la revue Repères – IREM n°69 (Chambris, 2007).

Une modification très nette apparaît en 1970. À partir de cette date et jusqu'à aujourd'hui, le programme comporte trois parties. Les intitulés des différentes rubriques, voire leur nombre, varient au fil du temps, mais globalement on peut dire que depuis 1970 le découpage du programme du primaire est le suivant :

- le numérique[13],
- la géométrie,
- la mesure[14].

Le programme de 1970 est une « rédaction différente » du programme antérieur, une réorganisation aussi. Le domaine mesure rassemble d'une part l'étude des grandeurs continues usuelles, longueur, masse, durée, des instruments qui les mesurent et du système métrique qui apparaissait dans « calcul et arithmétique », d'autre part celle des grandeurs géométriques, aire et volume[15], qui relevait de la « géométrie ».[16] Les problèmes d'échelle, quant à eux, quittent le géométrique pour rejoindre le numérique et d'autres problèmes de « règle de trois ». Comment comprendre cette réorganisation du programme ?

- Le domaine mesure à sa naissance

Dès les premières pages des instructions du domaine « Mesures : exercices pratiques », on trouve des expériences ou situations sur les longueurs, masses, durées, volumes à propos d'objets déjà rencontrés dans le « numérique » : les nombres et les opérations. Nous rapprochons les prescriptions respectives des deux domaines. D'abord, nous nous intéressons à l'étude des nombres entiers et des opérations sur ces nombres, ensuite à celle des nombres non entiers, décimaux puis fractions.

Dans le domaine « Nombres et opérations », on indique que :

> L'emploi systématique de la correspondance terme à terme permet de classer des ensembles et d'attribuer à chaque classe un nombre : ainsi la classe de tous les ensembles qui ont autant d'objets que l'on a de doigts dans une main définit le nombre naturel « cinq ».

---

[13] Le numérique est, en fait, souvent découpé en plusieurs rubriques.

[14] En 1970, l'intitulé est « mesures : exercices pratiques », il deviendra ensuite « mesurer », « mesurer des grandeurs », « mesure », « grandeurs et mesure(s) » en 2002. Le plus souvent nous utiliserons l'expression *domaine mesure*, indépendamment de l'époque.

[15] La capacité, qui relevait de l'arithmétique, est assimilée au volume dans ce programme.

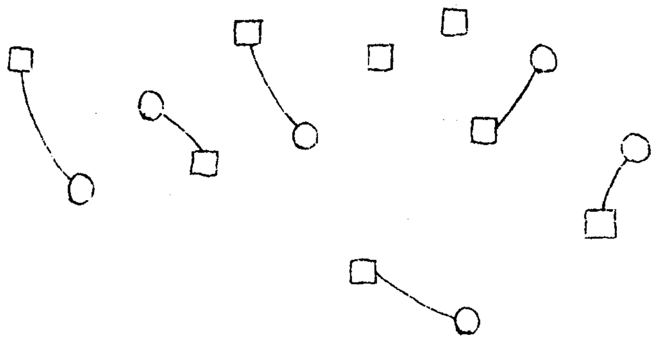
[16] En 1945, l'utilisation des instruments de mesure des longueurs apparaît en arithmétique au CP et en géométrie au CE.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

On définit donc le nombre comme une classe d'équivalence d'ensembles et ces ensembles sont des ensembles d'objets discrets.

Un peu plus loin, on évoque la comparaison :

> *Exemple* : des objets carrés et des objets ronds sont disposés sur la table. Comparer le nombre des objets carrés au nombre des objets ronds.



> l'impossibilité d'épuiser les objets carrés en faisant correspondre à chaque objet rond un objet carré permet de conclure, *sans dénombrer les objets*, que le nombre d'objets ronds est plus petit que le nombre d'objets carrés ou que le nombre des objets carrés est plus grand que le nombre des objets ronds.

Dans « Mesures », on retrouve la comparaison puis le nombre :

> 2.1 Une activité préparatoire à la mesure consiste, pour les enfants, à chercher des expériences permettant de répondre à des questions telles que :
>
> A est-il plus grand que B ?
>
> C contient-il autant que D ?
>
> E met-il moins de temps pour venir à l'école que F ?
>
> G est-il plus lourd que H ?
>
> Trouver des objets plus lourds que K et moins lourds que L.
>
> 2.2 Peu à peu au cours des activités précédentes, va se dégager l'idée que de nombreuses comparaisons peuvent s'exprimer en utilisant des nombres. Par exemple la longueur d'une certaine règle est double de la longueur d'un certain crayon.
>
> Si, de façon arbitraire on attribue à la longueur du crayon le nombre 1 (c'est-à-dire si on choisit ce crayon comme unité), la longueur de la règle est 2. Pour un objet donné, on peut s'intéresser à diverses mesures. (…)

Le nombre entier n'apparaît donc plus comme une classe d'équivalence d'ensembles d'objets discrets mais comme une mesure du continu : le rapport entre deux grandeurs continues de même espèce.

Dans « Nombres et opérations », l'addition est définie comme l'opération sur les nombres associée à la réunion d'ensembles :

> Soient les nombres 8 et 7.
>
> Prenons un premier ensemble de 8 objets, puis un second ensemble de 7 objets, tous distincts des précédents. La réunion de ces deux ensembles, quelle que soit la nature des objets, est un ensemble de 15 objets.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

> On dit que le nombre 15 est la somme des nombres 8 et 7, ce qui s'écrit, en utilisant le signe + (plus) :
>
> 8+7=15

Cette réunion est donc une réunion d'ensembles d'objets discrets. C'est une opération matérielle, qui plus est, sans équivoque : *on fait un tas avec deux tas*.

Si on considère que les objets *sont* les 8 cm et 7 cm qui constituent deux barres, que signifie réunir ces deux ensembles ? Combien a-t-on d'objets ?

En fait, l'addition de longueurs est évoquée dans le commentaire de « Mesures ». On y indique en effet que :

> Certaines expériences conduisent à effectuer la somme (…) de deux mesures.

Un exemple concerne alors le cas des longueurs :

> On forme une barre en mettant bout à bout deux règles dont les longueurs, l'unité étant le centimètre, sont 12 et 5. La longueur de la barre en centimètres est (12+5).

Dans « Nombres et opérations », on introduit la soustraction comme suit :

> *Exemple* : Parmi 15 fruits, 8 fruits seulement sont des pommes.
>
> Le nombre des fruits qui ne sont pas des pommes est alors celui qui complète l'égalité 8 + . = 15 ou . + 8 = 15
>
> (…) On dit que 7 est la différence des nombres 15 et 8 et on écrit en utilisant le signe – (moins) :
>
> 15 – 8 = 7

Dans « Mesures », on évoque, sans donner d'exemple, les

> expériences qui conduisent à effectuer (…) la différence (…) de deux mesures.

Dans « Nombres et opérations », la multiplication est définie. On se place d'emblée dans un contexte d'objets déplaçables, on choisit une disposition en rectangle pour eux et on introduit la multiplication :

> Des objets sont disposés en lignes et colonnes de la façon suivante :
>
> \+ + + + + + + +
> \+ + + + + + + +
> \+ + + + + + + +
> \+ + + + + + + +
> \+ + + + + + + +
>
> On peut répartir ces objets en 5 ensembles de 8 objets.
>
> Le nombre d'objets est (8+8+8+8+8) qu'on écrit selon une convention généralement adoptée (8×5).
>
> Le nombre des objets est (5+5+5+5+5+5+5+5) que l'on écrit avec la même convention (5×8)
>
> Ceci justifie l'égalité (8 × 5) = (5 × 8)

La multiplication est donc introduite comme une addition itérée. On aurait pu écrire 3+3+3+3+3=3×5 par définition et éventuellement associer à cette définition sur les nombres différents contextes matériels, ce n'est pas ce qui est fait. L'exemple choisi ici permet, au changement d'orientation près du quadrillage, d'obtenir la commutativité tout de suite. La disposition proposée, et c'est volontaire, ne permet pas de mettre en évidence la dissymétrie des facteurs : la définition de la multiplication est noyée dans la commutativité. Cette propriété semble même aller de soi, c'est donc à peine une propriété. À la fin de la présentation de l'étude de la multiplication, on peut d'ailleurs lire (nous soulignons) :

> (8 × 5) = (5 × 8) = 40
>
> La multiplication est commutative. <u>Les deux nombres 8 et 5 jouent le même rôle.</u>

Par suite, de quelle commutativité s'agit-il ? L'égalité sur les nombres obtenue dans le cas discret est-elle transférable au cas du continu sous prétexte qu'on mesure aussi le continu avec des nombres ?

S'il s'agit de 5 baguettes de 8 cm mises bout à bout, sera-t-il toujours aussi évident d'une part que la longueur se calcule avec une multiplication, d'autre part que 8×5=5×8, autrement dit qu'on obtient la même longueur en mettant bout à bout 8 baguettes de 5 cm d'une part, 5 baguettes de 8 cm d'autre part ?

De même qu'on trouvait l'addition et la soustraction dans le domaine mesure, on y trouve aussi la multiplication. On assiste cependant à un *dérapage* puisqu'il est alors question d'

> expériences qui conduisent à effectuer (…) le produit (…) d'une mesure par un nombre entier

On retrouve un multiplicande, la mesure, et un multiplicateur, le nombre entier. Le discours commutatif n'est pas tenable car <u>les deux facteurs ne jouent pas le même rôle</u>.

Pour la première fois, en 1970, on évoque dans le programme de l'école primaire les deux divisions : exacte et euclidienne. Cette distinction apparaît dans « Nombres et opérations ».

À propos de la division exacte, on écrit :

> *Exemple* : On a obtenu un ensemble de 56 objets en réunissant 7 ensembles qui comprennent chacun le même nombre d'objets.
>
> Il est naturel de désigner ce nombre par un signe (., $\square$ ou une lettre quelconque) et d'écrire une égalité entre les deux expressions du nombre de tous les objets.
>
> 56 = 7 × $\square$ ou 56 = $\square$ × 7 (commutativité de la multiplication)
>
> $\square$ représente un nombre que l'on peut désigner directement par l'expression (56 : 7).
>
> La division exacte est l'opération qui associe aux nombres 56 et 7 leur quotient exact (56 : 7)

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

À propos de la division euclidienne, on écrit notamment :

> *Exemple* : on veut distribuer équitablement 17 cerises entre 3 enfants. (…)
>
> On constate que $(3 \times 5) < 17 < (3 \times 6)$
>
> Et aussi que $17 = (3 \times 5) + 2$
>
> *Le plus grand* nombre de cerises que l'on puisse donner à chaque enfant est 5 ; 2 cerises ne sont pas distribuées.
>
> La division euclidienne de 17 par 3 fait correspondre au couple de nombres (17 ; 3) le couple (5 ; 2). (…)

Dans « Mesures », on indique que :

> Certaines expériences conduisent à effectuer (…) le quotient d'une mesure par un nombre entier.

Comme il s'agit ici de partager une grandeur continue en un nombre entier de parts, il ne peut y avoir de reste. Dans ce cas, la division euclidienne n'a pas de pertinence car le quotient est toujours exact mais ce n'est pas relevé.[17] Comme pour les autres opérations, aucune allusion au paragraphe « Nombres et opérations » n'est faite dans « Mesures », si ce n'est la reprise des mots *quotient* et *produit*.

Les trois exemples du programme relatifs à la division s'appuient donc sur les grandeurs : discrètes dans « Nombres et opérations », continues dans « Mesures : exercices pratiques ».

Dans le domaine mesure, le nombre sert à mesurer le continu, il n'y a plus d'ensembles d'objets et plus de correspondance terme à terme pour le définir. L'addition correspond à une *expérience* qui ne consiste pas en la réunion de deux ensembles. À propos de la multiplication, on passe d'une approche commutative par une disposition d'objets en rectangle au « produit d'une mesure par un nombre entier ». Quant à la « division d'une mesure par un entier », elle ne peut pas être euclidienne. Ainsi, dans « Mesures », retrouve-t-on des objets du domaine « Nombres et opérations » : nombre, comparaison, addition, soustraction, multiplication, division, mais redéfinis si besoin.

En fait, le domaine « Nombres et opérations » semble restreindre l'étude du nombre entier à la mesure du discret, la mesure du continu étant cantonnée à « Mesures ». Le même choix est fait pour l'étude des opérations. D'un point de vue didactique, on peut penser que l'étude des nombres et des quatre opérations dans « Mesures », sur le continu donc, va compléter l'étude des nombres et des opérations prescrite dans le domaine numérique, sur le discret. La question

---

[17] Il existe néanmoins des « situations de division euclidienne » sur le continu. Par exemple : combien de morceaux de 6 cm peut-on découper dans une baguette de 57cm ? Il s'agit alors de « diviser une mesure par une mesure ». Ce cas n'est pas évoqué par les instructions.

de l’articulation entre les deux domaines n’affleure pas dans le commentaire. Une phrase sibylline conclut d’ailleurs l’introduction de la rubrique « Opérations. Propriétés. Pratique. » dans le domaine « Nombres et opérations » :

> Il est essentiel de comprendre que l’addition, la multiplication ne portent que sur des nombres. Il est tout aussi important que les enfants reconnaissent les situations auxquelles correspondent ces opérations.

Rien n’est dit sur la contribution du domaine mesure pour la reconnaissance des situations, c’est-à-dire la connaissance du sens des opérations.

Poursuivons notre confrontation du contenu des deux domaines avec l’étude des nombres non entiers. En 1970, ce sont les changements d’unités qui fondent le nombre décimal :

> [Au cours moyen] les enfants savent écrire et nommer les nombres naturels à partir de groupements d’objets d’un ensemble.
>
> On peut chercher à mettre en évidence le nombre des groupements d’une certaine espèce.

Tous les exemples détaillés dans la rubrique « nombres décimaux » portent sur des grandeurs discrètes. Le premier exemple est un changement d’unité en nombre entier :

> Le nombre d’habitants de la France est cinquante millions. Si l’on imagine une répartition des français en groupements comprenant chacun un million d’habitants, le nombre de ces groupements est 50. Il exprime la population de la France, le million étant choisi comme unité.
>
> Si les groupements choisis comprennent cent habitants, la population s’exprime par le nombre entier qui s’écrit : 500 000.

Un peu plus loin, il s’agit d’une population de 10 850 habitants.

> Le millier étant choisi comme unité, la population s’exprime par le nombre décimal 10,850.

Suit un autre exemple en base 4 :

> - Lorsque l’enfant est choisi comme unité, la population de la classe s’exprime par l’écriture 123,
> - Lorsque le « groupe » (quatre enfants) est choisi pour unité, la population de la classe s’exprime par l’écriture 12,3.

De même, le seul exemple d’opération sur les nombres décimaux fait référence au discret.

À la fin de la rubrique « définition et écriture des nombres décimaux », après la liste d’exemples de conversions d’entiers en décimaux arrive, enfin, une phrase relative au système métrique, au continu donc :

> D’autres exemples pourront être trouvés à l’occasion d’exercices de mesure utilisant le système métrique.

Nous pensons qu’il faut voir là un renvoi aux exercices du domaine mesure. Aucun exemple n’est développé dans ce paragraphe. Comme en écho, les instructions de « Mesures » se terminent par :

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

> 2.5. Système métrique.
>
> L'étude du système métrique permet aux élèves de connaître notre système d'unités légales et aussi d'utiliser les nombres décimaux.

Nous indiquons maintenant le seul exemple des instructions relatif à la définition du nombre décimal qui relève du continu, on le trouve dans « Mesures » (avec un renvoi à la rubrique du numérique où on définit le nombre décimal), à propos du changement d'unités, c'est en base 10 :

> Prenons comme unité le carreau, la mesure de la surface A ou aire de A que l'on peut noter mes A ou aire A peut être obtenue par un simple dénombrement de carreaux.
>
> Dans cet exemple aire A=28 (…)
>
> Si on choisit comme unité de surface un rectangle de dix carreaux, l'aire de A est le nombre 2,8.

Ici, comme dans le numérique, le nombre décimal sert à réécrire un nombre entier dans une unité « plus grosse ». Puisque la définition du nombre décimal ne repose pas sur un fractionnement de l'unité, elle ne permet pas d'affiner la précision d'une mesure, elle ne fait que proposer une écriture nouvelle d'une information qu'on a déjà. L'approche utilisée dans les deux domaines est identique et les nombres décimaux sont étudiés sans qu'on fractionne le continu.

Par ailleurs, les nombres décimaux sont exclusivement décrits à partir du discret, dans le numérique. Ils sont évoqués, à propos du continu pour les « exercices pratiques de mesure ». Pour cette étude, on retrouve que la rupture entre discret et continu correspond effectivement au découpage entre numérique et mesure.

Venons-en aux fractions. Dans le domaine numérique,

> Les fractions sont présentées à partir de la notion d'opérateur. (…)
>
> D'une façon générale, x et y désignant des nombres naturels, avec $y \neq 0$, multiplier par $\frac{x}{y}$ revient à multiplier par x puis diviser le résultat par y.

Les tâches suggérées pour l'étude des fractions consistent essentiellement à remplir des tableaux de nombres sans contexte. Cette approche ne concerne *a priori* pas davantage le discret que le continu mais il s'agit toujours d'opérer sur des entiers avec les limites que cela implique : à savoir que les divisions exactes ne sont pas toujours définies et que cela pose problème notamment quand il faut composer les opérateurs et les faire commuter car les domaines de définition ne coïncident pas en général. Cela est constaté par le programme. La rubrique qui suit la définition des fractions est consacrée aux opérateurs équivalents et on y définit les fractions équivalentes par ce moyen.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Retenons que la définition des fractions permet, elle aussi, de se passer du fractionnement de grandeurs.

La seule évocation d'*utilisation* des fractions se trouve dans l'introduction du domaine mesure, on précise que :

> Des expressions telles que un quart d'heure, un demi-litre, avoir parcouru les trois quarts du chemin, un quart de beurre, utilisent le vocabulaire des fractions. L'étude des situations correspondantes peut donner lieu à des calculs numériques.

On se trouve dans le domaine mesure et on se réfère au continu.

Ainsi, comme pour les décimaux, d'une part les instructions séparent l'étude des fractions en deux parties : ce qui relève du discret dans le « numérique », ce qui relève du continu dans « mesures » et d'autre part cette construction évite de fractionner les grandeurs.

À sa création, « Mesures » semble être le lieu du continu et le « numérique », celui du discret. Des objets identiques semblent être étudiés dans les deux domaines avec des approches plus ou moins compatibles. Ainsi la création du domaine mesure semble-t-elle marquer la volonté d'éclater l'étude des nombres et des opérations en deux : ce qui mesure le discret d'une part, ce qui mesure le continu d'autre part. On peut probablement dire que les nombres et opérations sont construits à partir des grandeurs discrètes puis utilisés sur le continu. La part réservée au continu est cependant modeste :

> Les notions numériques qui constituent l'essentiel du programme sont présentées dans le paragraphe 1. Les paragraphes suivants proposent des thèmes d'activités plus divers (…).

Comme le programme de 1970 est une réécriture du programme antérieur, il nous semble que la rédaction des instructions de « Mesures » nous renseigne aussi sur l'importance probablement accordée à l'étude du sens des quatre opérations sur les grandeurs continues usuelles, dans les pratiques antérieures.

- Point de vue mathématique

Jusqu'au milieu du 19ème siècle, les nombres non entiers sont pensés en prenant appui sur les grandeurs, objets sensibles idéalisés. Par exemple :

- l'unité c'est :

- 3 quarts ou 6 huitièmes de l'unité c'est :

Au 19ème siècle, au moment de la crise des géométries non euclidiennes, l'ensemble des nombres réels n'existe pas encore. Néanmoins, on utilise déjà ces « nombres » depuis longtemps.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Cette crise n'implique pas directement les grandeurs. Cependant, elle a conduit à évacuer toute référence au « monde sensible » dans les axiomatisations contemporaines des objets mathématiques. Les grandeurs sont progressivement écartées des mathématiques. Dans la construction des rationnels fondée sur les nombres entiers (vers 1860), le nombre trois quarts est l'ensemble des couples d'entiers équivalents à (3 ; 4). La relation (a,b)~(c,d) signifie $a \times d = b \times c$. Le couple (3 ; 4) est donc équivalent à (6 ; 8) car $3 \times 8 = 6 \times 4$. Les nombres entiers sont considérés comme des objets premiers. Les premières constructions de l'ensemble des réels (vers 1870) ne feront pas référence aux grandeurs. Un peu plus tard, ce sont les ensembles qui deviendront les objets premiers et on tirera les entiers des ensembles. (Bourbaki, 1984, pp. 20-63)

Revenons aux instructions de 1970. Compte-tenu notamment de l'insistance sur le vocabulaire ensembliste dans le domaine numérique, il semble assez clair que la création du domaine mesure répond à la volonté de changer la théorie qui sert de référence pour l'étude des nombres et des opérations. Exclure l'étude des grandeurs continues de l'étude de l'arithmétique constitue sans doute la condition pour construire, sans les grandeurs, les nombres non entiers et les opérations. L'intention semble donc être de prendre les entiers comme objets premiers. Il s'agit de faire, dans l'enseignement primaire, ce qui s'est passé un siècle plus tôt dans les mathématiques savantes. Les constructions adoptées sont toutefois assez loin de suivre la construction savante, malgré une tentative de définition des fractions équivalentes. De plus, comme on ne peut véritablement se passer des grandeurs au primaire, on s'appuie sur les grandeurs, discrètes, pour la construction des nombres entiers (et non entiers[18]). On peut penser que c'est la façon qu'ont les programmes de primaire de s'adapter à un nouvel environnement théorique. Rappelons que Bronner (2007) a qualifié celui du secondaire comme un « ensemble structuré à partir des développements décimaux » ? Nous ne savons pas dans quelle mesure, les deux environnements sont compatibles.

2.2. Comment les grandeurs disparaissent…

Nous avons vu comment la création du numérique scinde l'étude du continu et du discret, nous voulons maintenant repérer des statuts, éventuellement différents, des grandeurs à travers les programmes. Il est en effet commun d'entendre dire que la réforme des mathématiques modernes les a quasiment fait disparaître. Néanmoins, compte-tenu du public

[18] Sur le plan mathématique, il nous semble toutefois difficile de construire un ensemble de nombres non discret en mesurant des grandeurs mais sans les fractionner.

auquel on s'adresse, elles sont nécessairement omniprésentes dans les mathématiques en primaire. La situation était-elle stable avant la réforme des mathématiques modernes ? Qu'est-il advenu des grandeurs en 1970 ?

Avant de parcourir les programmes du primaire depuis la création de l'école obligatoire jusqu'en 1970 à la recherche des grandeurs pour étudier les nombres, les opérations et la proportionnalité, nous donnons quelques précisions relatives à trois mots qu'on rencontre souvent à propos des grandeurs.

- Objets, grandeurs, mesures

Ce préambule vise à poser des définitions que nous utilisons dans la suite du texte. Les discours théoriques sur les grandeurs distinguent souvent ce que nous appelons des *niveaux*.

Considérons des **objets** tous dotés d'une qualité donnée. Deux objets « égaux » du point de vue de cette qualité ont *même grandeur*. La **classe d'équivalence des objets** de *même grandeur* est alors une **grandeur**. Nous appelons **mesure** d'un objet ou d'une grandeur, un **nombre** (caractérisé diversement selon les théories). Pour une qualité donnée, un objet a plusieurs mesures alors qu'il n'a qu'une seule *grandeur*.

Prenons l'exemple d'un récipient. Nous nous intéressons à sa contenance. Nous disons que l'objet est le récipient. La contenance du récipient détermine une grandeur : la classe d'équivalence des récipients ayant cette contenance. Nous dirons aussi que **20 litres est une grandeur** car *20 litres* constitue une « étiquette » pour la classe des récipients qui ont cette contenance. La mesure d'un récipient de 20 litres est 20 si l'unité est le litre ou 2 si on prend le décalitre comme unité.

Nous appelons **grandeur mesurée**, l'expression d'une grandeur utilisant un nombre et une unité. Par exemple, nous dirons que 20 litres ou 3 kg 250 g sont des grandeurs mesurées[19].

Souvent, *20 litres* est appelé *mesure*, *nous* considérons donc que c'est une grandeur, *nous* la qualifions de *mesurée*. Ce détail peut être source de confusions.

Nous croyons que les niveaux objet et grandeur ont pu être considérés diversement dans des écrits mathématiques relatifs aux grandeurs ou à leur enseignement : mathématiques ou non.

Ce qui précède n'est pas caractéristique du continu. Les trois niveaux, objet, grandeur et mesure concernent aussi le discret. Nous reviendrons sur ce point dans notre deuxième partie.

---

[19] Ces grandeurs mesurées ont une grande familiarité avec ce qu'on appelait les « nombres concrets ».

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

- Avant 1970 : des grandeurs au fil des programmes

3 pommes, 5 litres sont des *nombres concrets*, ce sont ce que nous avons appelé des grandeurs mesurées. Nous appelons *opérations simples sur les grandeurs* : l'addition, la soustraction de grandeurs, la multiplication et la division d'une grandeur par un nombre. Les multiplications et divisions de deux grandeurs entre elles, qui mettent en jeu des grandeurs produit et quotient, n'en relèvent donc pas.

D'après les programmes, de 1882 à 1938, le statut des grandeurs évolue peu. En 1882, on indique pour la classe enfantine :

> addition et soustraction sur des nombres concrets et ne dépassant pas la première centaine. (…) Le mètre, le franc, le litre.

Au CP, en 1923, on précise :

> *Premiers éléments de la numération* - Compter des objets ; en écrire le nombre jusqu'à dix, puis jusqu'à cent.
>
> *Petits exercices de calcul oral ou écrit* (sans dépasser cent). - Ajouter ou retrancher des groupes d'objets ; additionner ou soustraire les nombres correspondants. (…)

Les instructions indiquent à propos de l'étude des nombres, au CM :

> (…) Les élèves comprendront ce qu'est un dixième de mètre, un dixième de gramme, avant de comprendre ce qu'est un dixième d'unité.

Harlé (1984) a étudié de nombreux manuels des années 1882 à 1930 du CM au CS. Il indique que ce sont bien les nombres concrets et les opérations sur ces nombres, que nous avons appelées *opérations simples sur les grandeurs* mesurées, qui fondent toute l'étude de l'arithmétique. On « abstrait » progressivement les nombres des nombres concrets.

L'utilisation des opérations simples sur les grandeurs signifie notamment que pour le calcul de l'aire d'un rectangle de 3 m par 2 m, on écrit[20] 3 m² $\times$ 2 et non 3 m $\times$ 2 m ; et pour celui du prix de 3 m de toile à 6 fr le mètre : 6 fr $\times$ 3 et non 6 fr / m $\times$ 3 m. (Harlé, 1984, pp. 112-117)

Le programme de 1938 ne concerne que le cours supérieur mais il a pour ambition de donner des indications sur le traitement de certaines notions « au cours de tout l'enseignement primaire ».

En particulier, les opérations sur les grandeurs apparaissent dans les instructions :

> Les règles de calcul sur les nombres décimaux sont supposées acquises et partiellement justifiées dans les classes précédentes. Cependant des changements d'unités

[20] Nous précisons que dans certains manuels de l'époque on trouve aussi 1m²×3×2.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

> convenablement choisies permettront de les illustrer à l'occasion de problèmes précis. Ainsi le problème qui conduit à la multiplication : (3,50 fr. par l.) × (7,25 l.) peut être remplacé par : (0,035 fr. par cl.) × (725 cl.) = 25,375 fr.
>
> De même, le problème qui conduit à la division : (2,975 kg.) : (0, 79 kg. par l.) peut être remplacé par : (2. 975 g.) : (790 g. par l.) = 3, 7 l., reste 52 g.
>
> Ces exemples montrent en même temps combien peut être suggestif l'emploi de formules où les nombres sont suivis de l'indication des unités.

On trouve aussi, à propos de la résolution d'un problème de partage proportionnel :

> Le calcul par fractions conduit à la formule : 1. 000 g : $\left(1-\frac{1}{6}-\frac{1}{5}\right)$ (…)
>
> D'où la formule : $\underline{1.000g \times \frac{30}{19}}$

Nous avons souligné deux multiplications. Dans le premier cas, on multiplie deux grandeurs entre elles, dans le second, une grandeur par un nombre. La seconde multiplication est une opération simple sur les grandeurs, pas la première. Il semble que la multiplication « entre grandeurs » soit une nouveauté en 1938 par rapport aux programmes antérieurs. En 1938, la multiplication sur les grandeurs est donc présente avec deux statuts différents mais dont nous verront qu'ils sont complémentaires.

Le programme de 1945 est assez paradoxal sur le plan du statut des opérations sur les grandeurs. On retrouve les exemples de 1938, avancés au CM. De plus, au CE, on préconise d'écrire les unités avec les calculs. La façon de les écrire est toutefois modifiée pour les multiplications et divisions de grandeurs entre elles. Elles apparaissent maintenant au-dessus ou en-dessous du calcul et entre parenthèses. On écrit donc :

(f par kg)		(kg)	
75	×	5	= 375 francs

Et on ajoute :

> Le signe ×, comme le signe + et le signe -, n'indique que l'opération à faire sur les nombres et non sur les grandeurs.

On retrouve en revanche les exemples de multiplication et division d'une grandeur par un rationnel des instructions de 1938 : 1. 000 grammes : $\left(1-\frac{1}{6}-\frac{1}{5}\right)$ et 1. 000 grammes $\times \frac{30}{19}$. Là, on écrit des unités dans les calculs.

On parle encore des nombres concrets. Ce sont eux qu'on étudie au CE par opposition aux nombres abstraits et indépendants des unités du CM (pourcentages et fractions simples). On étudie aussi les décimaux au CM mais toujours dotés de leur unité, ils sont aussi concrets.

Paradoxalement, on ne parle plus vraiment d'opérations sur les nombres concrets, on dit même que :

> Il paraît évident qu'on doit additionner deux grandeurs de même espèce. Le nombre qui mesure la somme est la somme des nombres qui mesurent les grandeurs additionnées.
>
> Cependant cette opération soulève des objections assez graves. Que veut dire " de même espèce " ? Des pommes et des poires ne sont pas de même espèce et pourtant 8 pommes et 7 poires font 15 fruits. (…)
>
> En réalité, on n'additionne pas des grandeurs, fussent-elles de même espèce : on mélange les pommes et les poires (…)
>
> À toutes ces combinaisons de grandeurs correspond l'addition de leurs mesures.

Ici, après avoir critiqué *l'espèce de grandeur*, c'est aussi l'addition de grandeurs qu'on met en cause. Tous ces discours ne sont pas très cohérents mais laissent supposer que les opérations sur les grandeurs sont contestées à cette époque. Nous reviendrons sur cette question dans ce chapitre.

- 1970 : des grandeurs, faisons table rase

Nous parcourons maintenant les instructions de 1970. S'il y a un doute sur la contestation des opérations sur les grandeurs dans le programme de 1945, il n'y en a plus dans celui de 1970. On indique :

> Rappelons que l'addition (comme la soustraction, la multiplication…) porte sur les nombres et non sur les ensembles que ces nombres qualifient : on réunit des ensembles d'objets ; on additionne des nombres.

Et on informe que :

> Les phrases telles que :
>
> 8 pommes + 7 pommes = 15 pommes
>
> n'appartiennent en fait, ni au langage mathématique ni au langage usuel.

Cet exemple fait écho au texte de 1945. La condamnation est plus radicale en 1970 au sens où qui écrit des opérations sur les grandeurs n'écrit ni du français, ni des mathématiques. De plus, des exemples sont donnés pour expliquer au maître la différence entre les deux langages : usuel (ou courant) et mathématique.

> *Ajouter*, *et* sont des mots du langage courant, ce ne sont pas des mots du langage mathématique. À l'inverse, le mot « plus » n'est pas habituellement employé dans le langage courant pour exprimer l'action d'ajouter. (…)
>
> Dans la pratique de classe, les deux langages sont mêlés mais il importe de les distinguer. On pourra écrire par exemple :
>
> Le nombre de pommes est :
>
> 8+7=15
>
> et conclure : « la corbeille contient 15 pommes »

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Les opérations sur les grandeurs disparaissent donc. En lisant attentivement les instructions, on remarque que le mot générique « grandeur » en a disparu, et de façon plus surprenante encore le niveau grandeur, aussi. Il en reste en fait quelques occurrences, dans le langage courant, quand on donne des exemples de traduction en langage mathématique. Les mots longueur, aire… sont encore dans le programme mais ils désignent la *mesure des grandeurs* et non plus les grandeurs. On écrira ainsi que :

> La longueur* d'une certaine règle est double de la longueur* d'un certain crayon. (…) l'unité étant le crayon, la longueur** de la règle est 2.

Dans cet extrait où nous avons ajouté les astérisques, longueur* désigne le niveau grandeur, il s'agit du langage courant ; longueur** désigne la mesure de la grandeur, il s'agit du langage mathématique. Ceci implique notamment que la longueur, mathématique, d'un objet dépend de l'unité choisie pour le mesurer. Autrement dit, une règle donnée peut avoir, en mathématiques, plusieurs longueurs.

Cette disparition des grandeurs s'accompagne de l'apparition de nouvelles désignations. Les indispensables références au concret vont être des *situations* ou des *expériences*. Peut-être faut-il lire ces deux mots comme un signe de l'activité de l'élève, une marque constructiviste. Toutefois, on trouve ces mots là où autrefois on aurait pu parler de grandeurs. Il va sans dire que ces situations ou expériences ne sont pas des mathématiques pour les auteurs du programme.

La disparition du niveau grandeur n'est-elle qu'une question d'écriture ou de vocabulaire ? A-t-elle une incidence sur l'approche de certaines notions, sur l'étude des praxéologies mathématiques enseignées notamment ?

Un aspect important du programme de 1970 réside dans l'apparition des opérateurs et des *relations numériques* qui deviendront des fonctions numériques en 1980. Cela est extrêmement visible dans les instructions dans la mesure où 14 pages sur 35 leur sont consacrées, avec force tableaux de nombres et chaînes d'opérateurs. Ces relations sont notamment le support à l'étude des fractions et de la proportionnalité.

Nous avons vu précédemment que les fractions sont introduites comme des opérateurs sur des entiers et non comme des nombres qui mesurent une grandeur ni comme des opérateurs sur des grandeurs.

La présentation de la proportionnalité qu'on trouve exclusivement dans la partie numérique constitue une exception notable par rapport à la rupture entre discret et continu, étudiée précédemment, car on y mentionne deux « expériences », sur les trois proposées, qui relèvent

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

du continu. Toutefois, nous retenons de cette nouvelle approche du thème que la proportionnalité n'est plus une relation entre grandeurs mais entre nombres. C'est une relation multiplicative entre deux séries de nombres qui a des propriétés : coefficient numérique, linéarité additive et multiplicative. On adopte un point de vue fonctionnel et c'est la fonction linéaire numérique qui sert de référence pour cette étude. Il s'agit là encore de relations numériques dont la présentation s'effectue par des tableaux.

Ces relations sont numériques parce que les grandeurs en sont exclues. Ce n'est donc pas tant le continu qu'on rejette dans ces relations, mais plutôt le fait qu'il puisse y avoir des relations entre autres choses que des nombres dans les mathématiques.

Ainsi, pour l'étude de la proportionnalité et des fractions, on se place dans un contexte « presque pur numériquement ». Ces objets apparaissent comme des calculs sur des nombres. Les liens, entre les objets sensibles et ces deux concepts mathématiques, dont les grandeurs étaient probablement pourvoyeuses sont, au mieux distendus, au pire rompus.

Par ailleurs, la suppression des opérations sur les grandeurs semble avoir une incidence sur l'étude du sens des opérations. Nous avons déjà signalé la distinction qui apparaît implicitement dans les instructions entre multiplicande et multiplicateur dans le cas des grandeurs continues alors qu'on tente de l'éliminer dans la définition de la multiplication, élaborée dans un contexte discret.

Nous avons déjà cité tous les exemples des instructions relatifs à la division. Dans chacun d'eux, on cherche la « valeur d'une part ». Il s'agit de trois problèmes de *partage*. À aucun moment, on ne donne d'exemple pour l'autre *usage* de la division : la recherche du « nombre de parts ». Aucun des deux usages n'est en réalité explicité dans le programme de 1970. Ceci constitue un changement notable par rapport au programme de 1945.

En effet, si le programme de 1923 n'évoque, au CP, que le premier type de problèmes et n'indique rien pour les autres niveaux, celui de 1945 évoque les deux au CP et les instructions du CE précisent (nous numérotons) :

> *Division*. - La division est l'inverse de la multiplication, c'est-à-dire la recherche d'un facteur inconnu d'un produit (1). En réalité l'opération n'est en général qu'approchée et il y a un reste. Comme on distingue, dans la multiplication, multiplicande (valeur de l'unité(3)) et multiplicateur (nombre d'unités(3)), il y a deux cas dans la division suivant qu'on cherche l'un ou l'autre. On peut les distinguer d'une façon sommaire en disant qu'on peut chercher la valeur d'une part ou le nombre de parts (2). Exemples : (4)
>
> (oranges) (enfants)
>
> 33 : 7 = 4 oranges par enfant ; reste 5 oranges.

(oranges) (orange par enfant)
33 : 4 = 8 enfants ; reste 1 orange.

(fr.) (kg)
375 : 5 = 75 fr. par kg.

(fr.) (fr par kg)
375 : 75 = 5 kg

Nous voyons dans ces quelques lignes plusieurs approches du « sens de la division » qui, pensons-nous, se complètent. Pour reconnaître une situation de division, on peut repérer qu'on cherche :

1) un facteur inconnu d'un produit (c'est une approche numérique de l'opération),
2) un nombre de parts ou la taille d'une part dans un problème de partage,
3) un nombre d'unités ou la valeur d'une unité et utiliser une formule :

   nombre d'unités = valeur totale / valeur de l'unité

   valeur de l'unité = valeur totale / nombre d'unités.

Ces formules sont, en fait, explicitées à propos de la multiplication au CE et reprises au CM pour l'étude de la proportionnalité :

> En fait, dans le cas le plus fréquent, la multiplication est une convention commerciale : le prix total d'une grandeur (poids, longueur, volume, nombre d'objets) est obtenu en multipliant le prix de l'unité (g, m, l, objet) par le nombre d'unités. Cette règle s'étend quand on cherche un salaire total (produit du salaire horaire, journalier... par le nombre d'heures, de jours ...) ; elle s'étend aussi à la recherche du poids total d'un volume de liquide, d'une longueur de fil, etc.

Enfin, nous voulons voir dans l'écriture des unités dans les calculs (bien qu'elles soient apparemment un peu controversées) :

4) des rudiments de raisonnements sur les dimensions, raisonnements néanmoins probablement difficiles d'accès pour des élèves du CE.

Soit maintenant les deux problèmes :

a) (valeur d'une part) Une baguette mesure 406 cm. On veut la couper en 7 parts égales sans reste. Quelle est la taille d'une part ?
b) (nombre de parts) Une baguette mesure 406 cm. Combien de morceaux de 7 cm peut-on couper, au plus, dans cette baguette ?

Le programme de 1970 ne donne d'exemples que de problèmes de type a). On peut supposer que c'est la multiplication sur les nombres, en particulier la commutativité, qui permet de ne pas étudier de problème de type b). En effet, avec les nombres, dans l'esprit du programme de

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

1970, il faut penser : 406 = $\square \times 7$ pour a) et 406 = $7 \times \square$ pour b), voire ne pas distinguer les deux. Comme la multiplication est commutative et que la division est l'opération inverse de la multiplication, les deux nombres cherchés sont un seul et même nombre. C'est le quotient de 406 par 7. La recherche de l'opération inverse de la multiplication devient apparemment le seul moyen de reconnaître les situations de division en 1970. On retrouve la première des quatre approches de 1945, et elle seulement.

Toutes ces approches ne sont pas liées aux opérations sur les grandeurs. La première repose sur une approche numérique de l'opération, la dernière sur des opérations sur les grandeurs quotient et produit.

Nous avons évoqué quatre opérations simples sur les grandeurs, on peut en « définir » une cinquième : la division d'une grandeur par une grandeur de même espèce. Nous appelons *rapport de deux grandeurs de même espèce* cette deuxième division. Dans ce cadre, la réponse au problème a) est donnée par la division d'une grandeur par un nombre, 406 cm : 7, la réponse au problème b) par le rapport de deux grandeurs de même espèce, 406 cm : 7 cm.

Ainsi, il nous semble que les opérations simples sur les grandeurs permettent, mieux que les opérations sur les nombres, de distinguer entre recherche du nombre de parts et celle de la valeur d'une part : (406 cm : 7 cm) et (406 cm : 7).[21]

Il semble donc que la suppression des opérations sur les grandeurs réduise les moyens disponibles, c'est-à-dire des techniques ou des technologies, pour « reconnaître la bonne opération » dans un problème d'arithmétique puisqu'on ne peut plus se référer qu'au niveau « mesure ».

Depuis le début de l'école obligatoire, on observe des modifications dans les rapports entre grandeurs, nombres et opérations. Dans les praxéologies relatives aux opérations, nous avons notamment repéré qu'en 1938 on voit apparaître des multiplications comme opérations internes à un ensemble de grandeurs alors qu'avant on n'avait probablement que des multiplications par un nombre. La réforme de 1970 marque la suppression du niveau grandeur des mathématiques enseignées, suppression qui semble avoir notamment deux conséquences :

---

[21] Nous avons consulté des manuels antérieurs à 1970. Il semble que si l'écriture 406 cm : 7 est très fréquemment utilisée ; 406 cm : 7 cm ne l'est en revanche que très rarement. À la place, les auteurs écrivent en général « 406 : 7 ». Ceci est peut-être à rattacher à la difficulté historique des rapports de grandeurs d'exister en tant que nombres.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

- comme on ne peut se passer des grandeurs en primaire, elles continuent à exister dans les instructions mais sont implicites et relèvent de la « vie courante »,
- elles sont éliminées de certains objets ou raisonnements mathématiques qui désormais se conçoivent uniquement comme du calcul sur des nombres. Ceci signifie que si certains types de tâches ne sont éventuellement pas modifiés les technologies le sont. Et il semblerait que la suppression des grandeurs réduise les champ des technologies possibles pour traiter une tâche (cf. le cas de la division).

2.3. Un certain retour des grandeurs depuis 1980

Ainsi, dans nos deux premiers paragraphes avons-nous étudié l'élimination du continu du numérique puis celle du niveau grandeur en 1970. Dès 1980, ces deux objets sont partiellement réintégrés. Quelles niches viennent-ils occuper ? Quelles sont les raisons qui semblent guider ces nouveaux choix ? Comment sont-ils légitimés dans le savoir de référence constitué par le numérique ? Comment le numérique peut-il intégrer ces objets contre lesquels il s'est construit ? En 1970, voire dès 1945, les grandeurs ont perdu leur statut d'objet mathématique dans les programmes, le retrouvent-elles après ?

▪ Comment expliquer les retours des grandeurs et du continu à partir de 1980 ?

Nous nous intéressons au continu puis aux grandeurs dans le numérique, ensuite aux grandeurs dans le domaine mesure.

Dès 1980, dans le numérique, on introduit du continu pour étudier les décimaux et fractions. On parle principalement de… *situations*. Elles permettront de « prendre conscience de la nécessité de disposer de nouveaux nombres ». Cette approche est confirmée par les programmes suivants. Ce n'est qu'en 2002 qu'on utilise le mot grandeur à son propos. On dit alors par exemple :

> « utiliser, dans des cas simples, des fractions ou des sommes d'entiers et de fractions pour coder le résultat de mesurages de longueurs ou d'aires, une unité de mesure étant choisie explicitement ».

En 1970, le repérage sur une droite apparaît en géométrie. À partir de 1980, il bascule dans le numérique. Il est depuis largement utilisé pour étudier des objets du numérique : représenter les nombres entiers, les instants (programme de 1980 seulement), les fonctions numériques et aussi construire les nombres décimaux. On ne considère pas en général que la droite numérique relève des grandeurs, en revanche, elle est emblématique du continu.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Ainsi, dès 1980, le continu intervient-il dans le numérique. Cela est justifié, pour ce qui concerne l'étude des nombres non entiers, par la volonté que les élèves construisent leur savoir.

En 1980, dans la rubrique relative aux fonctions numériques, les situations vont permettre de générer des ensembles de *données numériques* qu'on cherchera à mettre en relation :

> par exemple : achat d'articles à l'unité, à la longueur, au poids, etc. ; masse et volume ; compteur de pompe à essence ; tarif d'une course en taxi ; affranchissement postal ; etc.

On est ici dans la continuité de 1970 : les *données numériques* sont les produits <u>mathématiques</u> des situations et expériences <u>pédagogiques</u>. *Données numériques* apparaît comme une locution inventée pour dire *mesures de grandeur*. Elles dispensent de parler des grandeurs et disqualifient le niveau grandeur. En 2002, elles sont toujours là puisqu'elles apparaissent dans le titre de la première rubrique du programme : exploitation de données numériques. Cette rubrique inclut d'ailleurs l'étude de la proportionnalité, comme le faisait la rubrique fonction numérique en 1980.

Malgré la permanence de ce nouvel objet, on observe néanmoins des modifications assez importantes en 2002 du point de vue des grandeurs dans le numérique. À propos de la proportionnalité, puis de la multiplication par un décimal, on présente des « raisonnements personnels » du type suivant :

> « Il faut mettre 400 g de fruits avec 80 g de sucre pour faire une salade de fruits. Quelle quantité de sucre faut-il mettre avec 1000 g de fruits ? », les raisonnements peuvent être du type :
> - pour 800 g de fruits (2 fois plus que 400), il faut 160 g de sucre (2 fois plus que 80) (…). Pour 1000 g (800 g + 200 g) de fruits, il faut donc 200 g (160 g + 40 g) de sucre ;
> - la masse de sucre nécessaire est cinq fois plus petite que la masse de fruits ; il faut donc 200 g de sucre (1000 : 5 = 200).
>
> (…) pour résoudre le problème « 2 cm sur le papier représentent 5 km sur le terrain. La distance à vol d'oiseau entre deux villes est de 7 cm. Quelle est la distance réelle ? », le raisonnement peut être du type :
>
> 1 cm sur le papier représente 2,5 km (deux fois moins que 2 cm), donc 7 cm sur le papier représentent 17,5 km (sept fois plus que 1 cm) (…).

Même si elles n'apparaissent que dans la langue naturelle ou dans un langage symbolique non convaincant, nous considérons que c'est bien d'opérations simples sur les grandeurs, toujours mesurées, qu'il s'agit. L'argument institutionnel qui justifie leur introduction est visiblement la prise en compte des « raisonnements personnels » des élèves. Elles sont donc un outil pour la « construction des connaissances » prescrite par les instructions. Cet argument, comme celui qui légitime la réintroduction du continu pour l'étude des fractions, se situe dans l'organisation didactique.

En 1980, dans le domaine « mesurer », les grandeurs réapparaissent. On théorise les notions de *grandeur* et de *mesure d'une grandeur* et même l'*« addition » de grandeurs*. On utilise ces mots et on explicite les trois niveaux, objet, grandeur et mesure.

Plusieurs indices nous conduisent cependant à penser que les grandeurs ici réintroduites ne doivent pas être considérées comme mathématiques :

- une bonne partie des activités est située dans la partie « activités d'éveil », par exemple égalité et somme de longueurs au CE,
- on écrit dans la partie « mathématiques », à la fin du thème mesurer, que :

> Certaines activités ne relèvent pas spécifiquement des mathématiques, bien que traditionnellement proposées dans les programmes ; par exemple la lecture de l'heure ne doit pas être dissociée de la notion de durée mise en place au cours des activités d'éveil.

- enfin, on écrit :

> [Les activités] doivent permettre une première prise de conscience de la notion de grandeurs mesurables, celles pour lesquelles on sait définir sur les objets une opération induisant une addition sur les nombres qui expriment leur mesure. (Les grandeurs pour lesquelles on ne sait pas définir une telle opération sont des grandeurs « repérables » ; exemple *les températures*.)

La théorie développée est donc « grandeur repérable / grandeur mesurable ». Elle est en usage en physique, même si elle a été axiomatisée, de façons diverses, par des mathématiciens. Il semble donc qu'on donne aux grandeurs un statut d'objets de la physique. Nous interprétons ceci comme un besoin de légitimer les grandeurs par un savoir savant. Toutefois, on fait appel non pas à un cadre mathématique mais à un cadre qui relève de la physique.

La caractérisation pour les grandeurs mesurables consiste donc en une addition sur les objets qui induit une addition sur les mesures. Nous verrons que c'est une caractérisation théorique possible des grandeurs. Avec elle, il est nécessaire d'avoir des nombres pour mesurer toutes les grandeurs de l'ensemble. Ceci implique qu'ils soient disponibles lors de la définition des grandeurs. Cette approche des grandeurs dans le domaine mesure ne semble *a priori* pas favorable à une articulation avec l'utilisation des grandeurs dans le domaine numérique où les nombres non entiers doivent apparaître comme une solution à un problème de mesure qu'on ne savait pas résoudre sans eux.

Enfin, l'addition est la seule opération sur les grandeurs qui soit étudiée et les calculs se font sur *les nombres exprimant des mesures*.

En 2002, l'étude des grandeurs dans la rubrique « grandeurs et mesures » ne relève plus de l'approche grandeur repérable / grandeur mesurable. Il n'y a plus, explicitement, d'addition de grandeurs. Plus généralement, à l'exception des fractions d'angle droit, on ne parle pas

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

d'opérations sur les grandeurs dans cette rubrique. Les instructions indiquent un programme d'étude. On met l'accent sur les procédés de comparaison sans la mesure. On prescrit du mesurage, en unités arbitraires ou non selon les grandeurs, avant l'utilisation des unités usuelles. Enfin, un troisième type d'activités consiste à utiliser ou prendre des informations pour en déduire, par calcul, d'autres mesures. Ces activités peuvent solliciter n'importe laquelle des quatre opérations sur les grandeurs continues, par exemple le découpage-recollement met en jeu l'addition ou la soustraction des aires mais ces opérations ne sont pas l'objet d'un apprentissage signalé par le programme.

Les problèmes théoriques posés par l'articulation entre les grandeurs du domaine mesure et celles du numérique ont disparu, de fait, en 2002 car on n'utilise plus l'additivité de la mesure pour caractériser les grandeurs. Néanmoins, en confrontant le programme à nos théories nous n'avons pas identifié de caractérisation générale des grandeurs dans le programme de 2002. De plus, de quatre opérations <u>explicitement objet d'enseignement</u> dans le domaine mesure en 1970, il n'en reste qu'une en 1980 et aucune en 2002.

- Quelle légitimité pour les grandeurs et le continu dans le numérique ?

À partir de 1980, on introduit donc des grandeurs et du continu dans le numérique. Souvent, la finalité est nettement didactique : cela semble être nécessaire pour que les élèves *construisent certains savoirs*. Comment le numérique absorbe-t-il ces objets, les grandeurs et le continu, contre lesquels il s'est construit ? Nous relevons les exemples du programme relatifs aux réintroductions des grandeurs et du continu dans le numérique, nous les interrogeons en termes de légitimité par rapport aux savoirs savants de référence.

Reprenons les exemples de « raisonnements personnels » évoqués à propos de la proportionnalité. Regardons ce qu'on écrit et aussi ce qu'on n'écrit pas. La seule opération sur les grandeurs mesurées écrite dans le symbolisme mathématique est l'addition : 800 g + 200 g, plusieurs exemples en sont d'ailleurs donnés. Pour les autres opérations, dans les cas où une opération sur les grandeurs serait nécessaire, on écrit un calcul sur les nombres (1000 : 5 et non 1000 g : 5) ou une expression en langue naturelle, comportant ou non une unité (2 fois moins que 80 et non 80 g : 2, ou encore sept fois plus que 1 cm et non 1 cm × 7).

Enfin, on n'écrit pas non plus une égalité comportant une opération sur des grandeurs, on se contente d'un seul membre (800 g + 200 g et non 800 g + 200 g = 1000 g) alors qu'on peut en écrire deux quand il s'agit de nombres (1000 : 5 = 200).

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Si l'utilisation de la langue naturelle et les variations dans les formulations renforcent l'impression de raisonnement personnel, nous pensons qu'elles n'expliquent pas à elles seules le caractère non abouti des formes utilisées dans les instructions.

C'est probablement une trace des interdits du programme de 1970 qui empêche les instructions d'énoncer convenablement dans la langue courante et dans le formalisme mathématique des opérations sur les grandeurs à propos de la proportionnalité. Ceci est sans doute en train d'évoluer :

> Puisque les grandeurs considérées (longueurs, aires, volumes, durées, masses) peuvent s'additionner, se soustraire, être multipliées ou divisées par un nombre, les écritures suivantes sont correctes et leur utilisation est recommandée :
>
> 3 kg + 500 g = 3,5 kg = 3500 g
>
> (…) Plusieurs unités de grandeur peuvent donc coexister dans un calcul, qui n'est pas alors un calcul portant sur des nombres, mais un calcul portant sur des grandeurs. (DESCO, 2005, p. 82)

Cet extrait du document d'accompagnement Grandeurs et mesure à l'école élémentaire, publié en 2005, constitue selon nous une réhabilitation des opérations sur les grandeurs. Toutefois, dans quelle mesure cette réhabilitation s'inscrit-elle dans le savoir savant « numérique » ?

Depuis 1970, la proportionnalité est une <u>relation numérique</u> particulière d'abord présentée dans des tableaux en 1970 puis qu'on a appelé fonction numérique et commencé à représenter avec des graphiques à partir de 1980. Graphiques et tableaux ne sont plus essentiellement vus comme des moyens de résolution en 2002 mais plutôt d'organisation des informations. Depuis 1970, c'est en fait l'application linéaire *numérique* qui supporte l'étude de la proportionnalité sur le plan théorique. Même si dans les instructions de 2002 la relation numérique multiplicative n'est plus explicitée et si le document d'accompagnement Articulation école / collège de ce programme (DESCO, 2005) évoque une relation entre grandeurs, le point de vue n'a apparemment pas changé, la proportionnalité apparaît en effet dans la rubrique « exploitation de données numériques ».[22] Pourtant, les raisonnements préconisés en 2002 et déjà évoqués ne relèvent pas selon nous d'opérations sur les nombres, du numérique, mais d'opérations sur les grandeurs.

Depuis 1980, les conversions relèvent de la proportionnalité dans le programme. En 2002, la méthode pour convertir est la suivante :

---

[22] Pour une vision plus fine des évolutions, on pourra se reporter à (Hersant, 2005). Hersant n'insiste cependant pas sur le fait que cette application linéaire est *numérique*, cette distinction est pour nous essentielle.

> Les quelques conversions d'unités envisagées seront aussi reliées à la proportionnalité : par exemple, pour convertir 43 dm² en cm², l'élève peut utiliser le fait que 1 dm² = 100 cm² ; 43 dm², c'est donc 4300 cm² (43 fois 100 cm²).

Le discours développé mobilise la multiplication externe d'une grandeur par un entier (43 fois 1 dm², 43 fois 100 cm²) qui ne relève pas véritablement du numérique.

Si on considère la proportionnalité comme une relation numérique, il y a bien deux « ensembles de données numériques » : les deux séries de mesures dans les unités dm² et cm² et il y a bien une relation multiplicative entre les deux, un coefficient 100. Il y a donc bien *proportionnalité numérique*. Cependant, si on considère la proportionnalité comme une relation entre grandeurs, nous verrons qu'il n'y a pas véritablement de proportionnalité mais plutôt de la mesure.

Il nous semble que le modèle de la relation numérique justifie qu'on écrive que les conversions relèvent de la proportionnalité mais qu'il est peu adapté pour soutenir les discours explicatifs.

À propos de l'étude des fractions et des décimaux, il y a aussi de nombreux exemples de « raisonnements ». On écrit ainsi,

> (…) $\frac{9}{3}=3$; $\frac{40}{10}=4$. Ces égalités peuvent être justifiées : $\frac{9}{3}$, c'est « 9 tiers de l'unité ou 3 fois 3 tiers de l'unité, donc 3 unités » ce qui peut être illustré à l'aide de segments.

On évoque « le tiers de l'unité » mais l'unité est le nombre 1, il ne s'agit pas d'une grandeur. Les segments *illustrent* les nombres et on n'écrit pas $\frac{9}{3}u$. Dans cette rubrique, contrairement à celle sur la proportionnalité, bien que formulés dans un mélange de langue naturelle et de langage symbolique, les raisonnements sont tous dépourvus d'opérations sur les grandeurs. Ils sont énoncés avec des nombres. Les décimaux et fractions codent pourtant explicitement des *mesures de grandeurs*. Il n'y a même pas, surtout pas peut-être, de fraction de grandeur.

On évoque à propos de l'étude des fractions un réseau de droites parallèles équidistantes : « ce réseau permet de partager une longueur en plusieurs longueurs égales, sans recours à la division », on ne dit pas qu'on *divise* une grandeur par un entier.

Dans toutes les instructions de 2002, malgré les demandes répétées de relier les grandeurs et les nombres, nous n'avons repéré que deux occurrences de fractions de grandeurs. Ce sont d'ailleurs des fractions de grandeurs mesurées : un centième d'euros et plusieurs exemples de fractions d'angle droit (moitié, quart, tiers, $\frac{5}{4}$ d'angle droit).

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

On peut considérer que ce ne sont que des détails. Toutefois, cette accumulation nous incite à penser qu'il y a, à propos des fractions et décimaux, un évitement des *fractions de grandeurs*. C'était déjà le cas en 1980, la différence est qu'en 2002 on dit que les nombres codent « le résultat de mesurages de longueurs ou d'aires ».

Nous étudions maintenant les instructions relatives au repérage sur la droite graduée, passé dans le numérique en 1980. Il peut arriver qu'on représente, de façon approximative, une grandeur sur une droite graduée. Cette tâche apparaît en 1980 dans l'étude des nombres, mais on n'indique pas comment la traiter. S'il s'agit par exemple de placer l'instant 3 h 17 min, sur une droite graduée d'heure en heure, on a deux grandeurs : les *moments qui passent* et les longueurs sur la demi-droite. Nous pensons qu'un raisonnement du type suivant est nécessaire :

> L'instant 3 h 17 min est situé entre les instants 3 h et 4 h. *17 min est plus court que 30 min*. 30 min est la moitié d'une heure donc la longueur qui représente 30 min est la moitié de celle qui représente 1 h car les durées sont proportionnelles aux longueurs des segments de la droite (par convention). Le point qui représente 3 h 17 min est donc plus près de celui qui représente 3 h que de celui qui représente 4 h.

Il s'agit de proportionnalité entre grandeurs. Dans le programme de 1980, la proportionnalité s'inscrit dans l'étude des fonctions numériques dont cette tâche ne relève pas : on ne cherche pas une valeur numérique, une mesure de la grandeur image, mais au contraire une position, un objet. Aussi, pensons-nous que le numérique ne suffit pas pour décrire cette tâche.

En 2002, des méthodes sont indiquées pour placer des nombres sur la droite. C'est à propos de l'étude de l'ordre des entiers naturels, au cycle 3, qu'elles sont les plus explicites (nous numérotons) :

> Par exemple, sur une droite graduée de 100 en 100 :
> - pour placer exactement 450, on peut utiliser le fait qu'il se situe à « mi-chemin » entre 400 et 500 ; (1)
> - pour placer approximativement 276, on peut utiliser le fait qu'il est plus près de 300 que de 200. (2)
>
> Le placement précis nécessite des compétences relatives à la proportionnalité (3) : les distances entre deux nombres sont proportionnelles aux écarts (différences) entre les deux nombres. (4)

On évoque des distances et on se réfère à la proportionnalité. Examinons le cadre mathématique sous-jacent.

La locution « distance entre deux nombres » existe dans les mathématiques savantes. Elle y est synonyme de *valeur absolue de la différence de deux nombres*. La proposition (4) n'a plus alors aucun sens. Il faudrait remplacer « distance entre deux nombres » par « distance entre deux points ». On pourrait également préciser que *les* ***nombres*** *repèrent les* ***points*** *sur la*

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

demi-droite afin de distinguer les points des nombres. Cet amalgame entre nombre et point se répète. Sans ellipse, (2) devient : pour placer approximativement **le point d'abscisse** 276, on peut utiliser le fait ~~qu'il~~ que **le nombre 276** est plus près de 300 que de 200.

Par ailleurs, les instructions adossent l'étude de la droite graduée à celle de la proportionnalité. Ce sont donc *les écarts entre les nombres* et *les distances entre* les points[23] qui doivent être en proportion. De plus, il nous semble qu'il n'y a pas nécessairement de la proportionnalité dans cette tâche mais éventuellement de la mesure. Le nombre qui repère un point est l'abscisse du point, c'est-à-dire, la mesure du segment délimité par l'origine de la demi-droite et ce point, quand on prend comme unité le segment délimité par l'origine de la demi-droite et le point repéré par le nombre 1. Ce sont les propriétés des fonctions mesure (linéarité, croissance notamment) qui peuvent permettre de placer les points. Par ailleurs, qu'on considère qu'il s'agisse de proportionnalité ou de mesure, cette tâche ne relève pas du « numérique » : elle met en relation des objets et des nombres.

Les instructions utilisent les expressions « 276 est plus près de 300 que de 200 » et « distance entre les nombres » comme si elles avaient une signification intrinsèque. Est-ce si évident ? Peuvent-elles constituer une aide pour placer des points ? On peut en effet se demander si ce n'est pas plutôt parce qu'on saura placer le point d'abscisse 276, grâce aux propriétés des fonctions mesure, qu'on deviendra capable de parler de « distances entre les nombres » et non l'inverse. À cet égard, les instructions ne distinguent pas ce qui se passe entre le début et la fin du primaire : on passe imperceptiblement de la suite numérique des entiers à la représentation des nombres sur une droite. Si dans le premier cas on peut admettre qu'on compte les nombres car on est dans le discret, dans le deuxième la situation est plus délicate car il s'agit de représenter les nombres par des longueurs.

La correspondance entre nombres réels et points de la droite géométrique est une question mathématique importante. Amalgame entre nombre et point, incursions du vocabulaire relatif à la longueur dans la comparaison des nombres, ces discours relèvent selon nous des mathématiques savantes. Ils n'y sont pas gênants car l'identification entre les deux ensembles est établie. La situation est sans doute plus complexe à l'école primaire et le rattachement, au niveau technologique, de la droite graduée à la proportionnalité n'est peut-être pas le seul à envisager.

---

[23] C'est nous qui rectifions

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Ainsi, depuis 1980, réintroduit-on des grandeurs et du continu dans les instructions officielles, souvent au titre de l'organisation didactique, mais ceci ne va pas apparemment sans poser de problèmes au niveau de la strate théorique de l'organisation mathématique. Ceci semble avoir notamment pour conséquence une rupture entre les mathématiques et le didactique : des discours explicatifs et des tâches prescrites ne semblent pas s'inscrire naturellement dans la théorie numérique.

Plusieurs discours ne semblent pas très satisfaisants : malgré une référence au numérique, certains d'entre eux relèveraient davantage de discours sur les grandeurs que sur les nombres ; le modèle de la fonction linéaire numérique pour caractériser la proportionnalité semble montrer des limites ; les fractions de grandeur qui semblent nécessaires pour décrire les équivalences entre fractions avec les tâches indiquées sont apparemment proscrites des instructions. En outre, la droite graduée, signe de l'utilisation du continu pour étudier le numérique, est accompagnée simultanément de discours savants peut-être peu compatibles avec les apprentissages des élèves et de discours didactiques peu adaptés à l'objet mathématique. Dans le programme, cet objet est dans le numérique. Dans les mathématiques savantes, il est à l'articulation du géométrique et du numérique. Les difficultés repérées sont-elles à relier à cette place particulière qui pourrait être celle des grandeurs ?

2.4. Conclusions sur l'évolution des grandeurs dans les programmes

Les instructions de 1970 contiennent un double bouleversement. Au niveau du modèle de référence pour l'apprentissage, on demande que les élèves construisent leurs savoirs quand ils apprennent les mathématiques en primaire. Au niveau du savoir à étudier, on sépare l'étude du continu et du discret, on élimine les grandeurs de l'étude des nombres, opérations et proportionnalité. À ces modifications, sans doute faut-il ajouter la volonté de s'éloigner de l'apprentissage de techniques pour la résolution de problèmes directement suggérés par la « vie courante ».

La naissance du numérique se manifeste visiblement par la création d'un domaine mesure qui englobe l'étude des nombres et des opérations sur le continu. Parallèlement le numérique rassemble l'étude des nombres et des opérations sur le discret. Elle peut correspondre à la volonté de changer de théorie de référence pour l'étude des nombres et des opérations.

L'élimination globale du niveau grandeur des mathématiques de l'école est un autre aspect important de la partie numérique de ce programme Elle se manifeste notamment dans l'omniprésence des « relations numériques » qui réduit l'étude des fractions et de la

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

proportionnalité à des calculs sur des nombres et semble rendre impossible certains discours technologiques. Toutefois nous avons vu que les rapports entre les opérations et les grandeurs ont sans doute varié dans les programmes au fil du 20$^{\text{ème}}$ siècle : s'il semble qu'on n'utilisait que des opérations simples sur les grandeurs au début du siècle, des opérations sur les grandeurs quotients et produit ont apparemment été introduites en 1938. Par ailleurs, la légitimité des grandeurs semble être déjà questionnée en 1945.

Les évolutions des programmes depuis 30 ans, reflet déformé, mais reflet quand même, des recherches de didactique ne tendent-elles pas à montrer, pour les objets que nous avons regardés au moins, que les grandeurs et le continu sont nécessaires pour que les élèves *construisent* de nombreux savoirs « numériques » ? La situation est paradoxale.

À partir de 1980, on introduit des grandeurs et du continu dans le numérique ce qui, au regard de sa création, est étonnant. Il semblerait que ces objets reviennent au nom de la physique dans le domaine mesure et, notamment, de la construction des connaissances par les élèves dans le numérique, c'est-à-dire qu'ils sont légitimées par l'organisation didactique. Apparemment, ces réintroductions sont parfois à l'origine de discours inadaptés du point de vue des savoirs savants de référence. Dans quelle mesure un savoir savant relatif aux grandeurs peut-il permettre d'accroître la légitimité de ces réintroductions ?

3. Programmes et savoirs savants

Après avoir fondé les nombres, les opérations et la proportionnalité dans les mathématiques savantes, les grandeurs sont éliminées de cette étude et les nombres entiers deviennent les objets premiers. La réforme des mathématiques modernes constitue un écho de ce bouleversement, un siècle après, dans l'enseignement. La situation se complique ensuite puisque les grandeurs pénètrent, un peu plus le numérique à chaque changement de programme, le plus souvent pour des raisons didactiques. Une étude des grandeurs dans les programmes actuels montre que leur statut mathématique doit être précisé.

Dans cette deuxième partie nous essayons de voir dans quelle mesure on peut mettre en relation le savoir savant relatif aux grandeurs et les programmes. Perrin (2002) aborde une question de ce type dans son exposé des théories des grandeurs. Son projet est d'« assurer les professeurs de la possibilité de rendre tout à fait rigoureux un discours sur les grandeurs ». Le nôtre est plus exigeant, il s'agit d'assurer la possibilité de rigueur dans le discours entendu par les élèves.

Pour ce faire, nous entrons dans le détail de trois théories et nous les confrontons aux textes de différents programmes. Nous nous arrêtons d'abord sur les instructions de 2002 où nous regardons, en prenant comme filtre une théorie des grandeurs particulière, les réintroductions des grandeurs dans le numérique repérés dans notre précédente partie. Nous revenons ensuite sur les programmes de 1945 et 1938 en nous appuyant sur deux autres théories.

Signalons aussi que nous développons assez longuement les trois théories que nous étudions dans ce chapitre car il nous semble que ces trois exemples constituent des repères utiles pour comprendre les autres théories. Ces développements un peu longs permettent d'alléger la troisième partie.

3.1. Un cadre théorique mathématique minimal et naïf (Rouche, 1992, 1994)

Rouche a élaboré un cadre théorique pour l'étude élémentaire des grandeurs, des nombres et des opérations qui inclut une première approche de la proportionnalité. Nous qualifions cette théorie de minimale en ce sens qu'elle ne permet pas de traiter les produits de grandeurs. Elle est naïve également car elle ne permet pas de traiter le cas des grandeurs incommensurables, pas plus du point de vue de la construction des nombres que de l'étude de la proportionnalité. Elle est proche de l'*expérience* sans y être réductible, toutefois. Nous utiliserons l'expression « théorie naïve » pour évoquer cette théorie.

Nous présentons ce cadre mathématique[24] puis l'utilisons pour relire le programme de 2002.

Pour présenter son cadre théorique, Rouche propose d'une part une étude des grandeurs proche de l'expérience, d'autre part une axiomatique au plus près de cette étude. Selon les points abordés, nous avons retenu l'une ou l'autre de ces positions.

Rouche repère *dans le réel* des axiomes nécessaires à la construction d'un ensemble de grandeurs et d'objets *ad hoc*. Il définit axiomatiquement un ensemble d'objets doté de *bonnes* propriétés. Il tire ensuite de son ensemble d'objets un ensemble de grandeurs puis, de cet ensemble de grandeurs, l'ensemble des rationnels. Un des projets de Rouche est de faire en sorte que les nombres remplacent les grandeurs dans les calculs. Ils sont, en effet, plus faciles à manier. Pour ce faire, il faut parvenir à remplacer les grandeurs par leur mesure.

---

[24] Nous nous appuyons sur l'ouvrage « Le sens de la mesure » (Rouche, 1992) et l'article « Qu'est-ce qu'une grandeur ? Analyse d'un seuil épistémologique » (Rouche, 1994). Nous ne rapportons pas l'ensemble des arguments de Rouche et renvoyons à la lecture du livre et de l'article.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

- Préambules

L’esprit du livre « Le sens de la mesure » (Rouche, 1992)

Rouche a fondé le Groupe d'Enseignement Mathématique (GEM) et est actif au sein du Centre de Recherche sur l’Enseignement des Mathématiques (CREM) en Belgique. Son livre ne nous apparaît pas nécessairement comme le modèle théorique à suivre, nous lui consacrons néanmoins un temps assez conséquent. En effet, il nous apparaît comme une tentative d’élaboration d’un traité de mathématique, au sens de Neyret, relatif à la construction des nombres et de la proportionnalité (cf. chapitre 1). Le savoir nous y semble en partie préparé pour l’enseignement mais pas encore décliné en technologies, techniques et types de tâches même si certains de ces éléments sont évoqués et même convoqués au cours de la présentation de la théorie, comme nous allons le voir. Il n’est d’ailleurs pas rare que dans les publications du GEM et du CREM, au cours de la description des activités et de leurs enjeux, on fasse très explicitement référence à des pages de (Rouche, 1992). Nous ne savons pas si une organisation didactique de type socio-constructiviste a guidé l’élaboration de cette théorie mathématique ou bien si elle est plutôt le produit d’une certaine épistémologie des mathématiques indépendante du didactique. Toutefois il est clair que les propositions d’activités publiées par le GEM et le CREM s’inscrivent dans un tel paradigme pour l’apprentissage.

L’esprit de la théorie

Nous interprétons cette théorie en faisant un anachronisme. Nous la voyons comme une théorie de la mesure des grandeurs qui aurait pu exister avant la découverte (ou la crise) des irrationnels. C’est un anachronisme pour au moins trois raisons :

- c’est une théorie d’aujourd’hui, elle est donc exprimée dans le formalisme actuel qui n’existait évidemment pas au moment de la crise des irrationnels,
- elle utilise une axiomatique qui n’est pas de la même nature que celle de l’antiquité,
- nous considérons que Rouche fait *comme si* la question des irrationnels ne se posait pas. Il propose en fait des outils qui permettent de travailler « autour » d’eux sans se heurter au problème de l’incommensurabilité. Par exemple, il ne pose pas d’axiome qui assure la complétude mais il ne fait jamais appel au rapport de deux grandeurs, prises au hasard, ce qui confronterait inévitablement à cette question.

Par ailleurs, ce cadre ne présuppose pas d’axiomatique géométrique en « amont ». La longueur n’y est donc pas une classe d’équivalence de segments isométriques. Ceci signifie aussi que la longueur et l'aire n'y sont pas « mathématiquement » reliés. On pourra imaginer qu'on compare des aires (non géométriques donc) en superposant et en découpant des morceaux de papier, voire en les plaçant sur les deux plateaux d'une balance et qu'on compare des volumes en transvasant des liquides.

On voit facilement des limites à cette théorie, elle ne permet pas par exemple de chercher une formule pour calculer l'aire du disque. Elle permet en revanche, avec peu d'axiomes, qui plus est des axiomes probablement peu coûteux intellectuellement, de construire l'ensemble des nombres rationnels et d'avoir une première approche de la proportionnalité.

- Éléments de la théorie[25]

Rouche suppose N construit.

Le niveau objet

> Comme annoncé, ce système d'axiomes ci-après a été choisi tel qu'il apparaisse le plus proche possible de l'expérience commune. L'ensemble *X* pourra être interprété en imagination comme constitué de baguettes que l'on compare en les disposant côte à côte, que l'on additionne en les mettant bout à bout, etc. On pourra aussi penser à des boules de plasticine que l'on compare en les posant sur les plateaux d'une balance à fléau, que l'on additionne en les collant l'une à l'autre, etc.

Les objets peuvent être comparés et des opérations peuvent être définis avec eux.

Ainsi, l'ensemble *X* est doté d'un pré-ordre total, d'une relation symétrique et transitive qui deviendra d'équivalence mais qui, pour être proche de l'expérience, n'est pas d'emblée réflexive car on ne compare pas un objet à lui-même. La réflexivité est *remplacée* par :

iii) étant donné un objet, il en existe un autre, distinct, qui est en relation avec lui.

X est finalement doté d'un pré-ordre total, d'une relation d'équivalence compatible et de la propriété *iii*) supplémentaire.

Rouche impose, à l'ensemble *X* des objets, des axiomes qui préparent à la définition de quatre opérations sur les objets.

L'ensemble *X* est doté d'une addition définie pour deux objets distincts car on n'additionne pas un objet à lui-même. Cette addition, lorsqu'elle est définie, est commutative, associative, compatible avec la relation d'équivalence.

Un axiome relie l'ordre et l'addition. En outre, cet axiome permet de définir la soustraction :

---

[25] Les citations des paragraphes « objets » et « grandeurs » sont extraites de (Rouche, 1994), les autres de (Rouche, 1992).

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

(x) $\forall a, b \in X\ a \langle b \Leftrightarrow \exists c \in X\ a \oplus c$ est défini et $b \sim a \oplus c$.

Dans cet axiome, l'implication de gauche à droite permet de définir une soustraction b-a, dès que a<b ; l'implication de droite à gauche implique que l'addition agrandit.

Enfin un dernier axiome prépare la division d'une grandeur par un naturel.

(xi) $\forall a \in X\ \forall n \in \mathrm{N}\ n>0\ \exists b_1, b_2, b_3,\dots, b_n \in X\ b_1 \sim b_2 \sim b_3 \sim \dots \sim b_n$,

$(\dots((b_1 \oplus b_2) \oplus b_3) \oplus \dots \oplus b_n)$ est défini et équivalent à a.

Pour multiplier un objet *a* par *n*, il faudrait ajouter *n* objets distincts équivalents à cet objet *a*. Dans (Rouche, 1992), un axiome assure l'existence de ces *n* objets. (Rouche, 1994) fait une proposition plus proche de l'action du report d'un étalon, qui ne nécessite pas d'axiome d'existence supplémentaire : grâce à (*iii*), $\exists\ a' \in X$, $a \sim a'$ et $a \neq a'$, $(((a \oplus a') \oplus a)\dots \oplus a)$. Cette somme est la multiplication cherchée.

Rouche explique les raisons du choix des onze axiomes en se ramenant de façon systématique à l'exemple des baguettes. Il précise bien qu'il s'agit de choix parmi d'autres possibles et que, par exemple, Freudenthal (1983) définit l'ordre à partir de la somme.

On dispose donc d'un ensemble d'objets doté d'un pré-ordre total et de « quatre opérations ».

Le niveau grandeur

Une *grandeur* est par définition un élément de l'ensemble quotient de *X* par ~.

Notons $\tilde{X}$ cet ensemble et A, B,… ses éléments

Les structures introduites sur *X* induisent sur $\tilde{X}$ les structures que l'on attend pour répondre aux manipulations familières sur les grandeurs concrètes.

En utilisant la structure quotient de $\tilde{X}$, on définit l'ordre, l'addition, la soustraction, la division et la multiplication par un entier, sur l'ensemble des grandeurs. L'addition de grandeurs agrandit. Ces opérations ont des propriétés qui vont permettre d'obtenir les propriétés usuelles des nombres rationnels. Nous donnons des éléments de cette construction.

À partir de la multiplication et de la division d'une grandeur par un entier, Rouche construit un ensemble d'opérateurs sur $\tilde{X}$ qu'il enrichit progressivement. D'abord, les double, triple d'une grandeur, de façon plus générale la multiplication d'une grandeur par un entier définissent un premier type d'actions dont on établit des propriétés en lien avec les opérations sur les grandeurs et les propriétés de N. Par exemple, ajouter le triple d'une grandeur au triple d'une autre revient à prendre le triple de la somme. Formellement, les propriétés s'expriment ainsi :

- régularité : $mx=nx \Leftrightarrow m=n$ et $mx=my \Leftrightarrow x=y$,
- ordre (P1) : $mx>nx \Leftrightarrow m>n$, (P2) : $mx>my \Leftrightarrow x>y$,

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

- pseudo-distributivité de l'addition : $(m+n)x=mx+nx$ et $n(x+y)=nx+ny$,
- pseudo-associativité de la multiplication : $m(nx)=(mn)x$

Un deuxième type d'actions est constitué avec les moitié, tiers, quantième d'une grandeur, grâce à la division d'une grandeur par les entiers. (Dans les écritures formelles, nous notons $\cancel{n}x$ la division de la grandeur x par l'entier n. Nous retardons l'écriture $\frac{1}{n}x$ car « $\frac{1}{n}$ » n'est pas encore un nombre). On établit également des propriétés de ces actions. Par exemple, il revient au même de prendre le tiers puis la moitié, que la moitié suivie du tiers, que le sixième d'une grandeur. Formellement on a notamment les propriétés :

- $m(\cancel{m}x)=x$ par définition et par suite : $m(\cancel{m}x)= \cancel{m}(mx)=x$,
- on peut commuter les divisions successives par un entier : $\cancel{m}(\cancel{n}x)=\cancel{mn}x=\cancel{n}(\cancel{m}x)$. $\cancel{mn}x$ désigne l'élément t de $\tilde{\mathrm{X}}$ tel que : $(mn)t=x$ puisqu'on n'a pas encore de multiplication sur les opérateurs

Étant donnée la structure ordonnée de $\tilde{X}$ et établie la compatibilité de l'ordre sur $\tilde{X}$ avec celui de N, l'ensemble des opérateurs sera doté d'un ordre découlant de celui de $\tilde{X}$. Il est établi comme suit, par exemple pour les opérateurs de division par un entier :

Soient à comparer $\cancel{n}x$ et $\cancel{m}x$. Supposons $m>n$, comme $mn(\cancel{n}x)=mx$ et $nm(\cancel{m}x)=nx$ et $mx>nx$ (d'après P1) alors d'après P2 on a $\cancel{n}x>\cancel{m}x$. Quand on aura défini l'ensemble des opérateurs, on en tirera que $\cancel{n}>\cancel{m}$.

Vient ensuite la composition de ces deux types d'actions. La propriété qui affirme qu'il est équivalent de commencer par la multiplication ou la division, par exemple le tiers de 2 cm a la même longueur que 2 fois le tiers d'un cm, fait l'objet de plusieurs commentaires (pp. 99-102). On élabore sur les grandeurs, les propriétés qui évolueront vers l'addition des fractions : un tiers d'une grandeur auquel on ajoute la moitié de la grandeur a la grandeur des 5 sixièmes de la grandeur. On caractérise ensuite les couples d'entiers qui ont la même action sur les grandeurs par composition de multiplication et division, ce qui constitue des classes d'équivalence d'opérateurs.

- si m et n sont deux entiers, alors $m(\cancel{n}x)=\cancel{n}(mx)$,
- $p(\cancel{q}x)+m(\cancel{n}x)=(pn+mq)(\cancel{qn}x)$

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

- soient $p(\cancel{q}x)$ et $m(\cancel{n}x)$, en divisant $\cancel{q}x$ par n et $\cancel{n}x$ par q, on obtient une commune mesure[26] entre $p(\cancel{q}x)$ et $m(\cancel{n}x)$: $\cancel{qn}x$, autrement dit des « $(qn)^{ème}$ de x », on a donc l'égalité des grandeurs $p(\cancel{q}x)$ et $m(\cancel{n}x)$ lorsque $pn=qm$. Une classe d'équivalence de composés est appelée *opérateur de fractionnement*.

Cet ensemble d'opérateurs dits de fractionnements sera Q_+ quand il sera doté des opérations.

Le niveau mesure

Rouche définit la mesure d'une grandeur x dans l'unité y comme : l'opérateur de fractionnement r, <u>s'il existe</u>, tel que $ry=x$. Ce sera donc un élément de Q_+ quand cet ensemble sera construit.

L'existence d'une commune mesure entre x et y est équivalente à celle d'un opérateur de fractionnement. Il existe bien sûr des situations dans lesquelles il n'y a pas de commune mesure entre deux grandeurs ou d'opérateur de fractionnement et donc pas de mesure : les cas d'incommensurabilité.

Nous définissons des *fonctions mesures partielles* : étant donnée une grandeur y, on considère la fonction qui à x dans $\tilde{X}$ associe, s'il existe, r dans Q_+, tel que $x=ry$. Une telle fonction est définie éventuellement (selon la nature de l'ensemble des objets) sur une partie seulement de l'ensemble des grandeurs. Par exemple, si on considère l'ensemble des segments de mesure rationnelle dans l'unité cm (c'est un cas courant à l'école primaire), il y a alors une seule fonction mesure partielle.

Les opérations dans Q_+

Il faut prendre quelques précautions pour définir les opérations sur les opérateurs de fractionnement car, comme il peut exister, étant donnée une unité, des grandeurs sans mesure, on ne peut se contenter d'écrire : soient u une unité, a et b deux grandeurs, α et β leur mesure dans u, $\alpha+\beta$ est, par définition, la mesure dans u de a+b. Néanmoins, l'addition des opérateurs vient de l'addition des grandeurs. La multiplication de deux opérateurs est définie par l'opérateur équivalent à la composition de deux opérateurs.

[26] On dit que x et y ont une commune mesure, lorsqu'il existe z dans $\tilde{X}$, m et n dans N, tels que : $mz=x$ et $nz=y$, z est appelé *commune mesure* à x et y (une commune mesure est donc une grandeur).

Les propriétés des grandeurs permettent d'assurer les propriétés usuelles de l'addition et la multiplication pour les opérateurs de fractionnement : régularité, distributivité, ordre, commutativité, associativité…

L'existence des fonctions mesures partielles permet, dans le cas de calculs portant sur des grandeurs qui ont une mesure dans la même unité, de remplacer les grandeurs par les nombres dans ces calculs. En particulier l'action d'un opérateur de fractionnement sur une grandeur se traduit par la multiplication de la mesure par « l'opérateur ».

À propos de la multiplication des rationnels

Rouche souligne que le produit de deux grandeurs ne peut pas être une opération interne à un ensemble de grandeurs. Il propose plusieurs voies pour interpréter le produit de deux rationnels (pp. 125-143) :

- la composition des opérateurs de fractionnement (voie choisie pour la définition du produit),
- si on applique un opérateur de fractionnement sur une grandeur mesurée, la mesure de la grandeur fractionnée est le produit des fractions (conséquence de la définition),
- on peut voir un opérateur de fractionnement comme un moyen d'agrandir ou de réduire une grandeur (fois plus, fois moins) : l'effet de l'agrandissement (ou de la réduction) sur les mesures est le fractionnement de la mesure par le facteur d'agrandissement (ou de réduction),
- enfin, on peut *lire* dans l'expression $V = \frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}U\right)$ que la mesure de $\frac{c}{d}U$ dans l'unité U est $\frac{c}{d}$ et que celle de V dans l'unité $\frac{c}{d}U$ est $\frac{a}{b}$. Les propriétés de composition des opérateurs indiquent alors que : $V = \left(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\right)U$, par suite la mesure de V dans l'unité U est $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$. Autrement dit, on peut voir le produit comme un changement d'unités (une conversion).[27]

---

[27] Rouche ajoute la formule du calcul de l'aire du rectangle à partir de la mesure des côtés lorsque :

- l'unité de longueur et les longueurs des côtés sont commensurables,

- l'unité d'aire est le carré de côté une unité de longueur.

La première restriction vient du fait qu'on ne sait pas prendre en charge l'incommensurabilité. Peut-être une définition géométrique de l'aire est-elle nécessaire pour le deuxième tiret mais Rouche ne l'indique pas.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Par ailleurs, Rouche examine la « traduction » des opérateurs de fractionnement dans la langue naturelle (pp. 104-106). Il signale que, le plus souvent, le mot « de » exprime l'action d'un opérateur « inférieur à 1 » : deux tiers de tarte. C'est plutôt le mot « fois » qu'on utilise quand l'opérateur est « supérieur à 1 », même s'il n'est pas entier : il a reporté deux fois et un tiers l'unité de mesure. L'expression « de fois » peut aussi apparaître, même si elle est désagréable à l'oreille : j'ai fait deux tiers de fois le tour.

Une théorie naïve des proportions

Des indications sur la théorie

Dans le cadre de sa construction des ensembles de grandeurs, Rouche développe une « mini-théorie » des proportions, en effet, elle n'est intéressante que dans le cas des rapports commensurables. Il utilise pour ce faire une application linéaire entre deux ensembles de grandeurs, ce qui implique qu'elle n'est *a priori* pas numérique

Soient X et Y deux ensembles d'objets munis chacun d'une relation d'équivalence que nous notons ~ et ^. Les deux relations ~ et ^ engendrent par quotient deux espèces de Grandeurs $\tilde{X}$ et $\hat{Y}$. Notons $\tilde{+}$ et $\hat{+}$ les additions respectives sur $\tilde{X}$ et $\hat{Y}$.

Supposons qu'il existe une bijection f^* de X dans Y ayant la propriété suivante :

1) elle conserve les classes d'équivalence :

pour tout U et V dans X, $U\sim V$ ssi $f^*(U)\wedge f^*(V)$.

Par suite on peut définir une bijection f, de $\tilde{X}$ dans $\hat{Y}$, par $f(u)=f^*(U)$ si U est un objet de u.

Supposons que f a la propriété suivante :

2) elle est additive : pour tout u et v dans $\tilde{X}$, $f(u\,\tilde{+}\,v)=f(u)\,\hat{+}\,f(v)$

f est une application linéaire sur un ensemble de grandeurs.

Alors on a la propriété :

3) pour tout u dans $\tilde{X}$, pour tout r dans Q_+, $f(ru)=rf(u)$ ou ce qui revient au même :

pour tout u dans $\tilde{X}$, pour tout couple (m,n) d'entiers, $f\left(\frac{m}{n}u\right)=\frac{m}{n}f(u)$.

Cette mini-théorie permet de résoudre des problèmes de proportionnalité par retour à l'unité, et de façon plus générale, par linéarité additive et multiplicative quand le rapport interne est

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

rationnel. L'application f est linéaire, mais f n'est pas une fonction numérique : elle n'est pas définie de R dans R, mais d'un ensemble de grandeurs vers un autre.

Nos commentaires sur le coefficient de proportionnalité

Nous proposons maintenant quelques commentaires qui nous sont propres à propos de la question du coefficient de proportionnalité.

On suppose que X est un ensemble d'objets tel que $\tilde{X}$ est constitué de grandeurs toutes commensurables entre elles, on peut alors écrire : $\tilde{X} = Q_+[u]$ où u est un élément de $\tilde{X}$ (n'importe quel élément non nul) qu'on appelle unité et Y est un autre ensemble d'objets.

Nous allons étudier trois cas : un premier dans lequel nous supposons que les deux ensembles de grandeurs sont de la même nature, un deuxième dans lequel nous les supposons de natures différentes, dans le troisième nous nous intéressons au cas des conversions.

Supposons que les deux ensembles de grandeurs sont de la même nature, par exemple, une situation d'agrandissement ou de réduction et on s'intéresse aux transformations des longueurs. On a, si l'échelle est rationnelle, pour toute longueur u à transformer : $f(u)=ku$, avec k nombre rationnel, coefficient numérique donc, et f qui n'est pas une fonction numérique. Le coefficient peut s'exprimer dans la langue courante, par exemple : sur le dessin, les longueurs sont le double, les trois-quarts, valent deux fois et demie celles du modèle…

De même, pour le cas d'un mélange de peinture, s'il faut par exemple 20 cl de bleu pour1 l de blanc, on dira qu'il faut cinq fois moins de peinture bleue que de peinture blanche. Le coefficient de la relation linéaire entre grandeurs ne dépend pas des unités, mais des rapports de grandeurs. On a alors pour toute quantité u de peinture blanche, la quantité de peinture bleue $f(u)$ donnée par : $f(u)=\frac{1}{5}u$. En revanche, si on s'intéresse aux relations entre mesures des différentes grandeurs en proportion, les fonctions linéaires sont numériques et le coefficient dépend des unités choisies (des rapports entre unités plus précisément) : 20 ou $\frac{1}{5}$ par exemple pour notre mélange avec des grandeurs exprimées respectivement en (l , cl) ou (l , l).

Considérons maintenant une relation de proportionnalité entre deux grandeurs de natures différentes, entre longueur et durée par exemple : on court régulièrement et, en 5 s, on a

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

parcouru 15 m. Appelons *f*, la fonction qui, au temps, fait correspondre la distance. On a : *f*(5 s)=15 m.

On pourrait être tenté d'écrire que : si *d* est une durée alors *f(d)* = (3 m/s) × *d*. Dans cette dernière expression on multiplie deux grandeurs entre elles et on a une grandeur quotient, ceci n'est pas pris en charge par le cadre théorique que nous présentons. Dans ce cadre, il est *seulement* légitime d'écrire : *d*=*x*s (avec *x* rationnel positif) et *f*(*d*) = *f*(*x* s) = 3 m × *x*, ce qui revient à écrire : *f*(*x* s) = *f*(1 s) × *x* et s'apparente à un retour à l'unité. Ici, 3 m n'est pas un coefficient car il ne multiplie pas (et n'est pas non plus multiplié par) la grandeur *d* dont on cherche l'image. Il n'y a pas de coefficient.

Une grandeur ne dépend pas de l'unité dans laquelle on la mesure. On a : *f*(1 s) = 3 m = 0,003 km. Par suite, *f*(*x*s)=3 m × *x*= 0,003 km × *x*. On appelle *h*, *g* et *j*, les fonctions qui, à la mesure d'une durée, associent la mesure de la distance dans les unités (m,s), (km,s) et (km,h). On a : *h*(*x*) = 3 × *x*, *g*(*x*) = 0,003 × *x*, *j*(*x*) = 10,8 × *x*. Ce sont des fonctions linéaires numériques, puisque les nombres existent dans le cadre de Rouche, elles existent aussi. Elles ont toutes un coefficient : il est numérique et dépend des unités choisies pour exprimer les mesures.

Quand les grandeurs ne sont pas de la même nature, de même qu'il n'y a pas de coefficient numérique entre les grandeurs en proportion, la relation entre les grandeurs ne s'exprime pas ordinairement dans la langue courante : on ne dira pas qu'on court 3 fois plus de mètres que de seconde et encore moins (?) qu'on court trois fois plus de longueur que de temps.

Il nous semble que le cas des grandeurs de natures différentes n'est pas très éloigné de celui des grandeurs de la même nature exprimées dans des unités différentes. Il y a bien un discours possible mais il ne coïncide pas avec le calcul : s'il faut 20 cl de peinture bleue pour 1 litre de blanche, on peut bien sûr dire qu'il faut 20 fois plus de centilitres de bleu que de litres de blanc mais ce n'est pas très habituel, le sens de la situation suggère qu'on dise qu'il y a « 5 fois moins de peinture blanche que de peinture bleue » mais ça ne coïncide pas avec le calcul. Plus précisément, dans la langue, dans les deux situations, il est d'usage de dire « X pour Y ». Ce rapport peut être exprimé dans le registre des nombres (5 ou $\frac{1}{5}$ ici) si les deux grandeurs sont de même nature, pas dans l'autre cas. C'est le cas bien connu de l'échelle d'une carte : elle peut être décrite par un rapport entre deux unités de longueur, « 1 cm pour 250 m » par exemple, et par un nombre, 1/25000.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Enfin, observons une situation de conversion comme relation entre grandeurs : par une fonction *conv*, à 10 m on associe 1000 cm, *conv*(10 m)=1000 cm. Cette fonction *conv* a bien les propriétés 1 et 2. Elle n'est autre que l'identité. Elle a un coefficient : le nombre 1. Cela n'a donc que peu d'intérêt, dans un cadre de grandeurs de ce type, de dire qu'une conversion relève de la proportionnalité.

L'axiome d'Archimède

Rouche 1992 évoque l'axiome d'Archimède mais ne l'impose pas pour un ensemble de grandeurs. Cet axiome n'est pas nécessaire pour construire Q_+. L'ajouter permettrait notamment de pouvoir encadrer n'importe quelle grandeur par deux multiples consécutifs d'une autre de même espèce, ce qu'on ne peut pas faire dans ce cadre.

- Discussion : Théorie des grandeurs discrètes

À la suite de cette présentation nous donnons des éléments pour une théorie des grandeurs discrètes. On utilise en général un vocabulaire un peu différent pour le discret et le continu. Considérons un ensemble infini de « choses ». Nous appelons « collection » ou « objet » (au sens précédent) toute partie finie de cet ensemble. Une grandeur discrète est une classe d'équivalence de collections équipotentes, à savoir qui peuvent être mises en relation par bijection. Le mot quantité est parfois, semble-t-il, utilisé pour désigner une grandeur discrète. L'ordre est défini par l'inclusion, via la relation d'équivalence éventuellement. On définit l'addition de deux collections disjointes par la réunion, celle de deux quantités quelconques en réunissant des représentants, disjoints, pour chacune des quantités (ce qui est possible car l'ensemble est infini).

Considérons des billes. La quantité 12 *billes* est la même que 1 *douzaine de billes*. On peut changer d'unité pour décrire une quantité. En général, une grandeur est sécable, divisible par un entier. Les grandeurs discrètes ne le sont pas nécessairement. Par exemple, on ne peut pas diviser une *bille* en deux. Autrement dit, il n'existe pas deux collections de l'ensemble qui, réunies, donneraient une collection de une *bille*.

3.2. Relecture du programme de 2002

Nous revenons maintenant aux réintroductions des grandeurs et du continu dans le numérique à partir de 1980. Nous avons dit qu'ils sont principalement réintroduits au titre de la constructions de leurs savoirs par les élèves, dans l'organisation didactique donc. Il n'y a pas de grandeurs dans le « numérique ». Nous avons montré qu'effectivement ces réintroductions

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

produisent parfois des discours inaboutis du point de vue des savoirs savants de référence ? Peut-on rapprocher les discours des programmes relatifs aux réintroductions des grandeurs et du continu d'une théorie mathématique des grandeurs ? Qu'est-ce que cela est susceptible d'apporter ?

- Les opérations sur les grandeurs

Une première catégorie de difficultés réside dans le statut des opérations sur les grandeurs.

Au niveau technologique

Les mots pour dire les opérations sur les grandeurs

À propos de l'étude de la proportionnalité, nous avons relevé, dans les instructions de 2002, des opérations sur les grandeurs : formulées dans la langue naturelle ou avec des écritures symboliques non abouties. Dans cette théorie des grandeurs, qu'on choisisse de s'exprimer dans la langue naturelle ou dans un registre symbolique, on peut formuler complètement des opérations sur les grandeurs du type de celles qui sont ébauchées dans les instructions de 2002.

Nous sommes peut-être dans la situation suivante, héritée des instructions de 1970. Les opérations sur les grandeurs ne sont pas des mathématiques ce qui ne permet pas d'*écrire* des opérations sur les grandeurs dans le registre symbolique mais comme la langue naturelle ne semble pas être considérée comme des mathématiques, cela permet d'en *dire*.

Dans l'étude des rationnels, le programme n'utilise explicitement aucune fraction de grandeur. En revanche, il préconise des types de tâches qui en impliquent. Les technologies qui devraient leur correspondre n'apparaissent pas explicitement. Le cadre de Rouche permet de décliner une praxéologie complète (jusqu'au niveau théorique) à partir de ces types de tâches. Une raison possible de l'absence des fractions de grandeurs dans les instructions de 2002 est que les grandeurs non mesurées n'ont pas de statut mathématique ce qui interdit notamment de les diviser par un entier.

Une nouvelle technique de résolution des problèmes de proportionnalité

En 2002, les instructions proposent deux méthodes de résolution des problèmes de proportionnalité pour le problème :

> « Il faut mettre 400 g de fruits avec 80 g de sucre pour faire une salade de fruits. Quelle quantité de sucre faut-il mettre avec 1000 g de fruits ? »

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

On peut écrire formellement ces méthodes avec une fonction linéaire *f*, non numérique qui, à la masse de fruit, associe la masse de sucre. Pour rendre plus visible qu'il s'agit d'une fonction définie de l'ensemble des masses vers lui-même, nous retenons la notation fonctionnelle, $f(x)$.

La première méthode qui relève de la linéarité peut se résumer en :

$$f(400\text{g}) = 80\text{g et } 1000\text{g} = 2\times400\text{g} + \frac{400\text{g}}{2} \text{ donc } f(2\times400\text{g} + \frac{400\text{g}}{2}) = 2\times f(400\text{g}) + \frac{f(400\text{g})}{2}$$

La deuxième méthode fait intervenir le coefficient de proportionnalité entre les masses de sucre et de fruit. On peut l'écrire comme suit :

$$f(400\text{g}) = 80\text{g et } \frac{400\text{g}}{5} = 80\text{g donc } f(x) = \frac{\text{x}}{5}\text{; } f(1000\text{g}) = \frac{1000\text{g}}{5}$$

Le document d'accompagnement Articulation école / collège (DESCO, 2005, pp. 90-91) précise que « le coefficient de proportionnalité est (…) utilisé, en particulier dans le cas où est mise en jeu une relation entre grandeurs de même nature (…). » ce qui n'exclut pas qu'on l'utilise dans d'autres situations mais on ne dit pas comment faire. Il nous semble en fait qu'il n'est pas abusif de rapprocher ces méthodes de résolution de celles qui peuvent exister dans la théorie naïve du 3.1 : linéarité additive et multiplicative (rapports internes rationnels), coefficient de proportionnalité numérique rationnel dans le cas où les grandeurs en relation sont de même espèce. Rappelons que le coefficient de proportionnalité n'existe pas dans cette théorie quand les grandeurs en relation ne sont pas de la même nature, il n'existe pas non plus lorsque le rapport est irrationnel.

Il est presque sûr qu'il n'y a pas d'intention de se référer à une théorie des grandeurs, dans ce programme, pour l'étude de la proportionnalité. Cependant, dans la mesure où on veut privilégier les « raisonnements personnels » des élèves, nous pensons qu'on les place dans la situation de réinventer les théories mathématiques les moins sophistiquées pour traiter la proportionnalité. Le livre de Rouche est consacré à l'épistémologie des grandeurs et des nombres rationnels. En quelque sorte, il propose une telle théorie. Le coefficient de proportionnalité, en tant que rapport de grandeurs d'espèces différentes, relève d'un cadre mathématique plus sophistiqué, il est plus difficile à interpréter de façon élémentaire, probablement plus difficile à faire intervenir dans un « raisonnement personnel » à l'école primaire.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Les conversions

Nous l'avons vu, dans l'approche de Rouche, les conversions ne relèvent pas de la proportionnalité (ou alors de l'identité) mais simplement de la mesure des grandeurs. L'opération qui est dite dans la langue naturelle, dans les instructions, est bien une opération qui existe mathématiquement : la multiplication d'une grandeur par un entier.

Dans le cadre de Rouche, l'extrait du programme :

> 1 dm^2 = 100 cm^2 ; 43 dm^2, c'est donc 4300 cm^2 (43 fois 100 cm^2).

peut s'écrire dans le registre symbolique :

$$43\ dm^2 = 43 \times (1\ dm^2) = 43 \times (100\ cm^2) = (43 \times 100)\ cm^2 = 4300\ cm^2.$$

Au niveau des tâches

À propos des instructions de 2002, nous avons évoqué « l'illustration » des fractions par les segments et noté l'emploi, peut-être pas tellement discutable, du mot partager pour la division d'une longueur. Dans la théorie naïve, parce qu'elle est définie à partir des objets, ces tâches ont une existence tout à fait légitime. Dans le numérique, cette légitimité ne nous semble pas assurée.

Ce faisant, il nous semble que nous sommes en mesure de réhabiliter au rang des mathématiques les « expériences » apparues en 1970.

Conclusion

Dans les instructions postérieures à 1980, nous avons relevé plusieurs éléments quant à des discours qui impliquent des grandeurs :

- recours à la langue naturelle pour éviter le symbolisme des opérations sur les grandeurs ou utilisation d'un symbolisme non abouti,
- évitement, même dans la langue naturelle, des fractions de grandeurs non mesurées, en particulier dans l'étude des fractions et des décimaux,
- discours explicatifs sur la proportionnalité impliquant des grandeurs qui ne sont formulés que dans la langue naturelle ou dans un symbolisme non abouti.

On peut interpréter ces différents points en grande partie comme une conséquence du choix du numérique fait en 1970. Il semble en effet que le point de vue théorique retenu permet difficilement de justifier certains discours du programme. Un regard sur eux, à travers le filtre d'une théorie des grandeurs minimale et naïve, permet en revanche de reconstruire *a posteriori* des praxéologies complètes pour les types de tâches évoqués à propos des fractions

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

– décimaux et de la proportionnalité et même d'affirmer la légitimité de certaines tâches. Elles sont plus complètes en ce sens que les technologies s'inscrivent nettement dans un savoir savant, nous avons utilisé celui qui est constitué par la théorie de Rouche.

On peut faire l'hypothèse que la volonté affichée, depuis 1970, que *les élèves construisent leur savoir* conduit *spontanément* (au sens de *non contrôlé*) à l'émergence, à l'invention ou la réinvention d'une théorie mathématique minimale et naïve des grandeurs, assumée sur le plan didactique mais pas sur le plan théorique. Cette émergence vient en contradiction avec le choix théorique du « numérique », également fait en 1970, dont nous pensons, pour des raisons épistémologiques, qu'il est beaucoup moins *intuitif* qu'une étude de l'arithmétique reposant sur les grandeurs naïves.

Une théorie *spontanée* n'est pas forcément très éloignée de la théorie proposée par Rouche qui s'intéresse à une épistémologie des grandeurs et des nombres rationnels. Ceci peut expliquer que la théorie de Rouche intègre plutôt bien les évolutions du programme postérieures à 1970. Dans une certaine mesure, elle propose, à son insu, une formalisation mathématique d'un certain nombre d'objets des programmes récents. D'une certaine façon l'organisation didactique fait apparaître des praxéologies mathématiques peu compatibles avec le savoir savant de référence.

Nous avons déjà dit que les instructions de 2002 n'indiquent pas de caractérisation des grandeurs. Nous indiquons ci-après, à titre d'exemples, ce que pourraient donner, en termes d'activités pour les élèves, des axiomes énoncés dans la théorie présentée. Remarquons qu'on pourrait sans doute avoir un autre système d'axiomes que celui de cette théorie et qu'il ferait apparaître, éventuellement, d'autres tâches.

▪ D'autres tâches que la théorie permet d'enseigner

Nous avons signalé que l'explicitation des opérations sur les objets a progressivement disparu des programmes et instructions du primaire à partir de 1980. On voit, dans la théorie, que les opérations sur les objets et l'articulation de l'addition et l'ordre jouent un rôle essentiel pour la construction des nombres, des opérations sur les nombres et l'étude de la proportionnalité. Nous présentons ci-après quelques réflexions autour de ces questions.

Trois exemples de tâches

Dans la construction des rationnels, les instructions prescrivent des partages d'unités de longueur en 2, 4, 8 par pliages successifs en deux ou avec un réseau de droites parallèles équidistantes (guide âne) pour d'autres nombres entiers. Ces partages peuvent être vus comme des opérations sur les objets relevant de la division d'une grandeur par un entier. Ils peuvent être réalisés avec les techniques énoncées ou d'autres. Ils ont *a priori* une complexité moindre que les rationnels qu'ils vont servir à étudier. Pourquoi ne constitueraient-ils pas des tâches prescrites, pour elles-mêmes, dans les niveaux antérieurs (au cycle 2, 1ère et 2ème primaire, par exemple) ? Par exemple, on dispose d'une ficelle et il faut faire en sorte de la partager équitablement entre trois personnes, de façon à ce qu'il n'en reste pas ; résoudre le même problème, avec un bâton, quand on dispose, par exemple comme instrument d'une ficelle plus courte ou plus longue que le bâton, et aussi partager une bande de papier ou un trait à vue, par pliage, avec un guide âne. Ces tâches participent à la fois de la connaissance des grandeurs et de la division par un entier.

Lismont & Rouche (1999, pp. 40-41) donnent un exemple d'activité pour une approche de la proportionnalité au CP ou au CE1. On donne une boule de pâte à modeler et on demande de réaliser une copie stylisée d'un objet. On doit pouvoir reconnaître l'objet d'après la copie. Tous les enfants ont la même quantité de pâte mais des objets différents à copier, et il faut utiliser toute la pâte à modeler. Pour réussir, il faut implicitement choisir une échelle pour respecter en gros les proportions du modèle. Les rapports de grandeurs interviennent tant au niveau des proportions internes à l'objet que dans l'échelle choisie pour la diminution ou l'agrandissement.

Il nous semble d'une part que cette activité n'existe pas dans l'étude de la proportionnalité quand on considère qu'elle est une relation numérique multiplicative, d'autre part qu'on voit comment les opérations sur les objets peuvent permettre d'appréhender plus précocement des notions qui interviennent plus tardivement dans le curriculum.

Nous avons vu comment l'axiome de l'addition qui agrandit est important pour l'articulation de l'addition et de l'ordre. Existe-t-il des tâches particulières qui feraient travailler cet aspect ?

Considérons le problème générique suivant : soient deux traits, il s'agit d'en construire un troisième dont la longueur est ce qu'il faut ajouter au plus court pour obtenir le plus long. Il met en jeu l'ordre et l'addition de grandeurs.

Il peut être décliné avec différentes variables. Les traits initiaux peuvent être donnés sous la forme « objet » ou à l'aide d'un nombre et d'une unité. De même, la différence peut être donnée sous la forme d'un objet ou d'un nombre et d'une unité. Pour le traitement des objets, différents instruments peuvent être utilisés. On peut proposer aux élèves d'utiliser leur règle

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

graduée ou une bande cartonnée. La longueur des instruments est susceptible de constituer une variable didactique. Regardons le cas d'une bande cartonnée : par exemple, si la bande cartonnée est plus longue que le plus long trait, la différence des deux peut s'obtenir directement sur la bande en reportant les longueurs des deux traits ; si elle est de longueur intermédiaire entre les deux traits initiaux cette stratégie ne fonctionne plus. Avec une règle graduée, cette tâche peut être résolue dans le domaine du calcul sur les nombres ou par de simples reports si les longueurs des traits et de l'instrument sont « bien choisies ». On peut aussi imaginer une formulation mixte où un des traits est donné par un nombre et l'autre sous forme d'objet. Cette tâche peut aussi être regardée dans un pur contexte d'évocation, par exemple : « On a tracé un trait de 24 cm et un autre de 41 cm. De quelle longueur faut-il rallonger le plus court pour obtenir le plus long ? ».

Discussion

La présentation de ces tâches nous amène à formuler plusieurs réflexions. L'explicitation d'une théorie des objets-grandeurs (au sens où on manipule des objets en tant qu'ils représentent des grandeurs) qui met explicitement en jeu des opérations sur les objets fait apparaître certaines tâches. Nous pensons qu'il y a là un espace à explorer. Nous avons donné quelques exemples. Les opérations sur les objets et plus généralement les éléments de la théorie donnent une légitimité, par le savoir savant, à certaines tâches qui n'existent pas (ou de façon très marginale) dans le curriculum. On peut penser qu'une telle légitimité théorique est une condition nécessaire pour les faire exister, en revanche ce n'est certainement pas une condition suffisante.

Par ailleurs, dans certains cas, il est probable que les opérations sur les objets sont susceptibles d'abaisser les besoins trophiques pour aborder certaines notions mais pas toujours. La rareté (supposée) des tâches impliquant des opérations sur les objets dans le curriculum actuel est-elle un obstacle à certains apprentissages ? Y aurait-il un intérêt à leur développement ?

Ces questions peuvent se décliner de différentes façons. Existe-t-il un lien entre la réussite à une tâche dans le registre des objets-grandeurs et la même tâche dans un registre non matériel, un problème d'arithmétique ordinaire ? Une question naïve encore, faire travailler ces tâches dans un registre matériel fait-il faire des progrès dans leur résolution quand elles sont seulement évoquées par un texte et des nombres ? Y a-t-il un moment de la scolarité où ces tâches seraient particulièrement pertinentes ?

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Nous voyons précisément avec l'exemple des deux traits que, selon les variables qu'on choisit pour formuler le problème, il peut être vu comme un problème de mesure ou comme un problème du numérique. La rupture de 1970 entre numérique et mesures se présente en primaire apparemment d'abord comme une rupture entre discret et continu. Il semble qu'aujourd'hui la séparation concerne plutôt les objets-grandeurs (qu'on rencontre aujourd'hui dans le domaine mesure) et les grandeurs mesurées (qu'on rencontre surtout dans les problèmes d'arithmétique). Quelle serait la place des tâches que nous avons présentées dans l'institution scolaire ? Le découpage mesure / numérique n'est-il pas un obstacle à l'existence de certaines tâches sur les objets-grandeurs dans l'institution école primaire ?

Enfin, à notre connaissance, les tâches qui impliquent des objets-grandeurs sont assez peu développées dans les classes. On ne peut exclure que sur des problèmes « théoriques » d'existence se greffent des questions de mises en œuvre. En effet, la gestion, par un enseignant, de situations avec des objets-matériels est sans doute plus complexe que celles où les objets sont seulement évoqués par leurs mesures. Par ailleurs, les procédures de résolution d'un problème sont probablement très dépendantes du type de matériel dont on dispose. Par suite, les variables sont peut-être encore plus difficiles à maîtriser quand il s'agit de matériel que quand il s'agit de nombres.

- Retour sur la droite graduée

Nous avons relevé des discours impliquant un savoir savant peut-être inadaptés en primaire concernant le repérage sur une droite dans le programme. Nous avons fait l'hypothèse qu'ils pouvaient être dus à la position particulière de la droite numérique dans les mathématiques, à l'articulation du géométrique et du numérique. Nous proposons ci-après une approche théorique du repérage sur une demi-droite qui fait intervenir les grandeurs. En effet, nous essayons de prendre en compte, pour étudier la droite numérique, les savoirs des élèves relatifs à la longueur. Elle fait appel à une axiomatique géométrique en amont qui ne fait pas partie de la proposition de Rouche. Ensuite nous revenons aux instructions de 2002 en utilisant cette proposition.

Proposition théorique : repérage sur la demi-droite et mesure

Même si ce n'est pas l'usage, on peut définir le repérage sur une demi-droite géométrique comme une grandeur particulière.

> Soit [Ox) une demi-droite. On considère l'ensemble des segments [AB] où A et B sont deux points de la demi-droite. Les isométries définissent une relation d'équivalence sur l'ensemble des segments de la demi-droite. On peut définir un ordre sur l'ensemble

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

des segments via l'inclusion et les isométries, et une addition entre les segments via les isométries. Par exemple : soient [AB] et [CD] deux segments, soient J et M les points de [Ox) tels que [OJ] et [JM] sont isométriques à [AB] et [CD] avec J entre O et M. On définit : [AB]+[CD]=[OM].

L'ensemble des segments de la demi-droite est alors un ensemble d'objets-grandeurs.

À partir de cet ensemble, par quotient on définit la grandeur associée. Cette grandeur a ceci de particulier que toute classe d'équivalence a un représentant unique d'extrémité O, c'est à dire la *position* sur la demi-droite. L'ordre des segments est congruent avec l'ordre des points sur la demi-droite.

Les segments du plan peuvent être vus comme un modèle pour les objets longs. L'intérêt de cette construction est qu'elle nous semble montrer une approche possible pour le lien entre longueur et droite graduée.

Nous avons défini une grandeur, la position, qu'on peut mesurer et, par convention, le nombre qui repère un point est la mesure de la distance entre l'origine et ce point quand on prend comme unité la distance entre l'origine et le point repéré par le nombre 1.

Discussion

Il nous semble que les tâches et technologies relatives à la droite graduée que nous avons évoquées dans l'analyse des réintroductions des grandeurs dans les instructions de 2002 s'inscrivent convenablement dans cette approche théorique de la droite graduée.

Signalons que dans notre proposition, la droite *n'est pas* graduée au sens où nous n'étudions pas la graduation pour elle-même, la graduation n'est que l'indication de la mesure des positions de quelques points de la demi-droite, deux suffisent. Des travaux de didactique de la fin des années 70 et du début des années 80 (Bessot & Eberhard, 1983 ; Colmez, vers 1975) ont proposé d'autres approches théoriques du repérage sur la droite graduée. Le projet était alors plutôt de construire des graduations et de repérer des points par rapport à ces graduations. Ces travaux s'inscrivaient dans une approche de la « mesure ».

On peut donc voir l'étude du repérage sur une droite comme relevant de l'étude d'une grandeur particulière qu'on mesure, la position d'un point sur une demi-droite. Ce point de vue n'a, semble-t-il, jamais été explicité dans le programme de l'école primaire depuis que la droite graduée y a été introduite. La droite graduée est vue comme un outil pour *représenter des nombres*, mais la grandeur qui lui est naturellement associée, la position sur une demi-droite, ne semble pas être considérée comme une grandeur. La droite graduée n'est apparemment jamais apparue, depuis 1980, dans le domaine « mesures ». En fait, la

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

convention entre abscisse d'un point et mesure dans l'unité formée par le segment entre l'origine et le point « repère-unité » semble être toujours restée implicite dans les instructions.

Le modèle théorique de la droite numérique relève naturellement de la géométrie axiomatique. Nous n'avons pas envisagé de modèle de la droite graduée qui coïncide avec l'approche naïve et minimale de Rouche, modèle qui serait forcément artificiel du point de vue de la sphère productrice des savoirs notamment, mais qui permettrait de rester dans ce cadre et peut-être de mieux cerner les tâches qu'on peut prescrire à l'école.

- Sur l'apport d'une théorie naïve et minimale pour relire le programme de 2002

Nous avons relevé des éléments dans le programme de 2002 que nous avons attribués à un manque d'articulation entre le cadre de référence pour l'organisation mathématique et le cadre de référence pour l'organisation didactique. En résumé, l'organisation didactique semble imposer des grandeurs pour l'étude des nombres mais les grandeurs n'existent pas dans le savoir savant de référence pour cette étude. Il semble qu'une théorie minimale des grandeurs permet de « combler » une grande partie de ces manques :

- au niveau des discours justificatifs relatifs aux fractions et décimaux, à la proportionnalité,
- au niveau de tâches prescrites dans le numérique qui n'y existent pas « théoriquement »,
- au niveau d'une étude mathématique des grandeurs : quelle propriétés sont nécessaires pour élaborer des objets qui permettent de construire les nombres, les opérations et la proportionnalité.

On peut trouver cette théorie minimale et naïve peu satisfaisante car elle ne permet pas, à terme, de construire les réels comme mesures des objets. Néanmoins le caractère naïf, qu'on peut regretter, de la théorie nous semble éclairer la volonté constructiviste des programmes qui fait que les notions à enseigner semblent se retrouver, à l'exception de ce qui concerne la droite graduée, dans une telle théorie.

Ajoutons que si on adopte en amont de la théorie une axiomatique géométrique, toutes les tâches et techniques précédentes continuent à exister et les questions relatives à la droite graduée peuvent être abordées de la façon que nous avons indiquée.

Il nous semble qu'il faut retenir de cette partie que l'organisation didactique pilotée par « la construction de ses savoirs par l'élève » fait apparaître des types de tâches très éloignés du savoir savant de référence (le numérique) et qu'un savoir savant (qui n'est pas celui de référence) mais qui est adapté pour l'enseignement avant d'être transposé permet de rapprocher les quatre niveaux des praxéologies.

3.3. Les réels dans « La mesure des grandeurs » (Lebesgue, 1975).

Le livre de Lebesgue (1975), « La mesure des grandeurs », paraît sous forme d'articles dans la revue l'Enseignement Mathématiques de 1932 à 1935. Nous nous référons à la compilation des articles rééditée en 1975. Le chapitre I du livre propose une construction des réels mais n'explicite pas le cadre dans lequel on se place pour cette construction. Néanmoins, Lebesgue fait explicitement référence à un axiome de continuité et à l'axiome d'Archimède sur la droite, il écrit aussi « on sait ce qu'on appelle un segment somme de deux autres ». Cette théorie n'est pas naïve.

- Éléments de la théorie

Nous rapportons la construction des réels par Lebesgue. Étant construits les nombres entiers, Lebesgue propose de mesurer un segment AB en prenant un segment U comme unité, c'est-à-dire de comparer le segment AB au segment U. Il obtient un encadrement de la mesure par deux entiers consécutifs et deux segments AA_1 et AB_1. Il réitère son procédé après avoir choisi une nouvelle unité U_1, dix fois plus petite que U. Par récurrence, il construit deux suites de nombres entiers, chaque terme ayant un chiffre de plus à chaque itération, et deux suites de segments AA_i et AB_i. Il interdit à B de coïncider avec B_i (si le segment AB « contient » exactement un nombre entier de fois U_k, on décide que B coïncide avec A_{k+1}).

Il appelle **nombre** la suite inférieure des entiers obtenus lors du mesurage (l'écriture à virgule illimitée n'est qu'une autre écriture de cette suite). Il vérifie ensuite effectivement que sa définition est cohérente, c'est à dire qu'à toute écriture décimale d, à toute unité U, à toute demi-droite d'origine A, on peut associer un segment dont la mesure avec l'unité U est cette écriture. Pour ce faire, il utilise l'axiome des segments emboîtés : pour chaque rang *i*, il construit sur la demi-droite deux segments AA_i et AB_i dont les mesures diffèrent d'une unité U_{i-1}. Il obtient ainsi une suite de segments A_iB_i emboîtés. Ils ont donc au moins un point commun (axiome de continuité) et ils n'en ont qu'un (axiome d'Archimède) qu'on appelle B. Réciproquement, si un des B_i coïncide avec B, la mesure du segment AB ne sera pas d, ceci ne peut se produire que si d ne contient que des 9 à partir d'un certain rang, ce qu'il exclut donc.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Cette construction engendre deux « types de nombres » : les entiers et les réels. Les nombres décimaux apparaissent comme un cas particulier des réels (ceux pour lesquels, à partir d'une certaine position tous les chiffres sont des zéros, autrement dit les segments pour lesquels B coïncide avec A_i à partir de ce rang). Les rationnels n'y apparaissent pas spécifiquement. Le problème de l'incommensurabilité est contourné mais pris en charge par l'axiome des segments emboîtés.

Lebesgue construit aussi les quatre opérations sur ces nombres :

- l'addition comme mesure de la somme de deux segments,
- la multiplication comme mesure dans un changement d'unité (si *a* mesure de AB dans l'unité U, *b* mesure de U dans l'unité V, alors, par définition de la multiplication, la mesure du segment AB dans l'unité V est $a \times b$),
- la soustraction (a-b si a>b) et la division (a/b si $b \neq 0$) géométriquement ou comme opérations inverses.

Tout en définissant les opérations géométriquement, il élabore explicitement les règles de calcul sur les écritures décimales illimitées à partir des algorithmes sur les entiers pour l'addition et la multiplication et indique comment s'y prendre pour la soustraction et la division.

Signalons que Lebesgue ne s'intéresse pas à la proportionnalité dans sa construction (il s'y intéresse avec une autre théorie au chapitre 6). Par ailleurs, il n'évoque jamais le niveau grandeur. Il passe directement du niveau objet, les segments, au niveau mesure, les réels. Dans cette construction, nous nous autorisons à construire le niveau grandeur. On dispose de moyens, les congruences et l'inclusion, pour comparer, sans la mesure, les segments (qui sont alors les objets). De cette comparaison d'objets on peut tirer des classes d'équivalence. Une longueur est alors une classe de segments congruents. Nous parlerons de longueur géométrique. Toutefois, nous verrons qu'il est probable qu'une des raisons pour lesquelles Lebesgue élabore cette construction est justement d'échapper aux classes d'équivalence.

- ### Le programme de 1945 : une transposition du livre de Lebesgue ?

Dans « La mesure des grandeurs », Lebesgue regrette que l'enseignement n'utilise pas pleinement l'écriture décimale. Il écrit sa construction des réels en ce sens et envisage dans le livre une réforme de l'enseignement pour son utilisation. Sa réforme concernerait principalement le secondaire mais aurait aussi une incidence sur le primaire.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Il y a des similitudes troublantes entre le programme de 1945 et le livre de Lebesgue, mais tout n'est pas semblable, par exemple l'approche de la multiplication n'est pas du tout la même dans le livre et dans le programme : d'un côté une conversion et de l'autre un produit de grandeurs.

Neyret (1995, pp. 88-91, pp. 100-102) décrit assez précisément les évolutions du programme de 1945 par rapport à ceux de 1923 sur les décimaux. Il indique par ailleurs (p. 95) que « nous avons pu constater que même un nouveau traité, écrit par un pédagogue aussi éminent que l'était H. Lebesgue, n'avait eu que des effets limités au niveau de l'école primaire et des écoles normales. Ses idées n'auront d'impact au niveau des manuels que vers les années soixante. » Bronner (1997) indique que le rabattement des fractions sur les décimaux est visible à partir de 1945 dans les manuels du secondaire. Par ailleurs, il indique qu'il observe une numérisation du théorème de Thalès dans ces mêmes années. Néanmoins il indique aussi que les travaux de Lebesgue seront surtout sensibles dans les années 60.

Neyret ne s'appuie pas seulement sur La mesure des grandeurs, mais aussi sur d'autres textes contemporains de la parution du livre (fin des années 20 et début des années 30). Nous reprenons ses arguments sur les fractions et les complétons par de nouveaux en ce qui concerne l'étude des nombres décimaux.

« La mesure des grandeurs » n'est pas dépourvu d'humour, voici le sort réservé aux fractions (§17) :

> Mais parlerait-on encore des fractions dans l'enseignement primaire, dans les classes de 6^{me} et de 5^{me} de l'enseignement secondaire ? Non, puisque cela n'est pas indispensable à la théorie[28] et <u>ne sert pratiquement à rien</u> ; car on sera bien, je pense, d'accord avec moi pour déclarer que marier des 22^{ièmes} et des 37^{ièmes} est un martyre que nous infligeons aux gosses de douze ans par pur sadisme, sans aucune raison d'utilité comme circonstance atténuante.

Les programmes sont habituellement peu enclins à l'ironie. Dans les instructions de 1945, où les fractions apparaissent après l'étude des décimaux et celle de la règle de trois ce qui implique qu'elles ne sont pas nécessaires à ces deux études, on lit pourtant :

> L'addition et la soustraction des fractions doivent être étudiées dans des cas numériquement très simples et sur des problèmes pratiques. Les maîtres se rendront compte qu'avec nos habitudes actuelles, <u>ces problèmes pratiques sont de plus en plus rares</u>. En outre, dans chaque cas, il est possible d'utiliser des nombres proportionnels.[29]

---

[28] Il s'agit du rôle des fractions dans la construction des réels qu'il propose.

[29] L'utilisation des nombres proportionnels implique qu'on peut se passer des fractions. Le programme indique en fait :

Dans ces deux extraits, c'est nous qui soulignons. En fait, le statut accordé aux fractions, dans le livre et dans le programme est le même. Il s'agit soit de l'écriture du quotient de deux nombres qui ne sont pas nécessairement des entiers, soit d'une fraction de grandeur mesurée. Contrairement au programme de 1923, la fraction n'apparaît jamais, dans le programme de 1945, comme un nombre qui mesure une grandeur.

À propos de la fraction comme mesure, Lebesgue écrit :

> Pourtant la réforme serait effective si l'on consentait à ce que les enfants n'étudient plus deux numérations, la numération des n[ièmes] pour les nombres commensurables et la numération décimale ; si on leur permettait de trouver 0,428 là où la réponse est $\frac{3}{7}$.

Marijon, inspecteur général et rédacteur de manuels, écrit au sujet des fractions de grandeurs :

> On peut et on doit parler aux enfants de tiers, de quarts et même de septièmes. Le chapitre de la division y conduit tout naturellement. La division en parties égales ne demande pas une théorie des fractions. Et la notation 24 m/7 pour représenter la longueur du septième d'un ruban de 24 m peut être employée sans parler de fractions. Ce symbole 24 m/7, qui indique une longueur non exprimable exactement en mètres, décimètres, centimètres…, mais évaluable avec telle approximation que l'on veut ne comporterait pas plus de difficultés au cours moyen que $\sqrt{2}$ n'en comportera plus tard. (Marijon, 1931, p. 75, cité par Neyret, p. 91).

Venons-en à la signification des entiers et des décimaux dans les deux textes (programme et livre de Lebesgue). La signification du nombre entier est rappelée au CE :

> un vase de 15 cl est rempli quand on y met 15 fois 1 cl d'eau.

On compte des unités de grandeur. Pour le CM, le programme comporte :

> Nombres décimaux en liaison avec les unités théoriques et pratiques de monnaies, de longueurs, de distances, de poids et de capacités. Changements d'unités (décimales) ; multiplication et division par 10, 100, 1.000.

Les instructions ajoutent :

> Il importe de préciser [les] connaissances [des élèves] et de leur faire comprendre l'équivalence des deux expressions d'un nombre concret, soit avec deux unités, soit avec une virgule :
>
> 2 mètres et 15 centimètres = 2,15 m. (…)
>
> Il importe également de faire comprendre et apprendre la règle du déplacement de la virgule soit par changement d'unité, soit par multiplication ou division par 10, 100, 1.000. Pour cela, il est au moins commode d'utiliser toutes les unités décimales du système métrique.

Les choix faits pour cette étude impliquent que les seuls nombres nécessaires pour la mesure sont les entiers. On a parfois reproché à cette réécriture des mesures en nombres entiers pour

---

> Fractions très simples <u>de grandeurs</u> : demi, tiers, quart, cinquième, dixième, soixantième. Calculer une fraction d'une grandeur et problème inverse. Additionner, comparer et soustraire des fractions dans des problèmes très simples.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

définir les décimaux d'être responsable de difficultés des élèves dans la connaissance des décimaux.

Revenons à la construction de Lebesgue. Supposons que l'unité U a pour longueur un mètre et qu'on mesure un certain segment AB. On pourrait avoir : $AA_1 = 2$ m et $AB_1 = 3$ m ; on divise l'unité U en 10, on a alors $U_1 = 1$ dm, on poursuit le processus de mesure : $AA_2 = 21$ dm, $AB_2 = 22$ dm, puis avec $U_2 = 1$ cm, $AA_3 = 215$ cm, $AB_3 = 216$ cm…

Dans cette construction, avant l'écriture décimale illimitée, seuls des nombres entiers apparaissent. On peut introduire des écritures décimales qui ne seraient autres que la réécriture de ces entiers. Par exemple : $AA_2 = 2{,}1$ m, $AA_3 = 2{,}15$ m… La place de la virgule permet de « déconstruire » le processus. Le nombre de chiffres après la virgule indique le nombre d'itérations et par suite la taille de l'unité utilisée : 2,15 m signifie que l'unité, le mètre, est divisée par 100 et qu'on a reporté 215 fois le centième de l'unité, 215 cm donc. À ce moment là de la construction, le nombre décimal n'est pas vraiment indépendant de son unité.

Faut-il voir dans le programme de 1945 (au primaire et au secondaire) une tentative de transposition de la mesure des grandeurs, d'application de ce qui pourrait être le *programme de Lebesgue*, à savoir :

> Toujours le même depuis l'enseignement primaire, jusqu'au seuil de l'enseignement supérieur, cet exposé serait plus ou moins développé suivant l'âge des élèves ; aux jeunes élèves, on affirmerait surtout, on ne démontrerait guère, exactement comme on le fait maintenant d'ailleurs ; aux plus âgés, on démontrerait davantage. (…). En tout cas ce que l'on démontrerait apparaîtrait bien aux yeux de tous comme la légitimation logique de faits déjà connus, acceptés, utilisés. (§16)

Et plus loin, dans un passage qui concerne probablement la classe de terminale :

> La modification que je propose consiste donc à remplacer en arithmétique les chapitres sur les fractions, sur les nombres décimaux, sur les fractions décimales périodiques, sur les calculs approchés par un unique chapitre sur la mesure des longueurs et les opérations sur les nombres.

Un tel programme implique probablement que les enfants de l'école primaire aient une conception du décimal comme réécriture d'un entier dans une autre unité, qu'ils « rabattent » les décimaux sur les entiers, mais nécessite aussi qu'ils soient habiles dans les changements d'unité.

Il suppose notamment qu'on étudie la division d'une grandeur par un entier, voire les fractions de grandeurs (pour construire les unités successives par division, pour interpréter la division, notamment), et aussi qu'on étudie la mesure des grandeurs comme processus itératif

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

pour construire les nombres décimaux et surtout, à terme, les réels, ce qui implique qu'on ne voit pas les décimaux comme fractions particulières.

Ceci ressemble, nous semble-t-il, au programme de 1945 en primaire mais le processus itératif est remis à plus tard. Dans le secondaire, il semble que comme au primaire, « La mesure des grandeurs » a pu être à la source du programme de 1945 d'autant plus que le livre propose une version « numérique » du théorème de Thalès qui ne fait pas appel aux grandeurs (§20).

- Épistémologie de la mesure des grandeurs

Comment faut-il entendre les revendications de Lebesgue à propos de l'éviction de la métaphysique des mathématiques ? La suppression des unités dans les calculs constitue-t-elle une revendication de Lebesgue comme cela a pu être écrit ?

Il a été écrit que le texte de Lebesgue avait été une caution pour les réformateurs des mathématiques modernes pour le rejet des grandeurs. Brousseau (2002 b) et Perrin (2005) considèrent qu'il a même été entendu comme une incitation à supprimer les unités des calculs. Tous deux citent cet extrait du livre :

> Ce sont ces nombres qui, seuls, servent en mathématiques ; libre à chacun de surajouter à ces notions mathématiques des notions métaphysiques, mais celles-ci ne doivent pas intervenir dans l'enseignement. (§39)

Pourtant Lebesgue écrit, plus tôt, au paragraphe 10 :

> Toute question qui conduit à une multiplication est un problème de changement d'unité, ou d'objet : 5 sacs de 300 pommes ; 2 m.75 d'étoffe à 28 fr.45 le mètre. (§10)

A propos de la fondation des nombres par la mesure des grandeurs, Griesel (2007, p. 33) présente une discussion épistémologique à propos des « principes d'abstraction » (appelés aussi définitions par abstraction). Ils ont été réhabilités par les neo-fregéenistes (Fine, 1998) et peuvent être considérés comme des fondations légitimes pour les théories mathématiques. En substance, Griesel indique : si ~ est une relation d'équivalence, il est possible de procéder à cette abstraction que tous les éléments d'une classe ont en commun et d'agir mentalement avec cette propriété E(x) de l'élément x comme objet mathématique. Il est valide d'écrire : $E(x)=E(y) \Leftrightarrow x\sim y$. Ici, ce qui semble poser problème est donc la possibilité de considérer la propriété commune à plusieurs objet comme un objet mathématique à part entière. La légitimation des « définitions par abstraction » permet donc étant donnée, par exemple, la relation « avoir la même longueur que », de considérer la propriété de « longueur » et de pouvoir parler de « la longueur de l'objet ». Cette discussion trouve sa source dans le paradoxe de Russel à l'origine de la « crise des fondements » (1902-1931) (Engel, 2006). Et il est connu que Lebesgue n'est pas resté étranger à cette crise.

Il nous semble que cette discussion permet d'avoir une autre interprétation de certains propos de Lebesgue quant à la métaphysique. Pour la définition du nombre entier, Lebesgue décrit l'action de dénombrement. Il conclut :

> « Pour compter ou dénombrer, on attache mentalement un objet différent de la collection envisagée à chacun des mots successifs de la phrase (ou suite) des nombres ; le dernier nombre prononcé est le nombre de la collection.
>
> *Ce nombre est considéré comme le résultat de l'opération expérimentale de dénombrement parce qu'il en est le compte-rendu complet* ». (§1)

Un peu plus loin, il précise en quoi son approche est différente de celles qui ont cours habituellement :

> Il n'est peut-être pas inutile de souligner en quoi l'exposé que je viens de résumer diffère de ceux qu'on trouve dans les traités d'arithmétique. J'ouvre celui de J. Tannery ; certes, j'y vois décrite l'opération de dénombrement d'une collection, je lis des démonstrations qui se réduisent à des descriptions d'expériences, pourtant il semble bien que le nombre expérimental ne soit là qu'une utilisation, qu'une application d'une entité métaphysique dont le second alinéa du livre nous donne une sorte de définition : « L'idée de nombre entier résulte, par abstraction, de l'idée d'une collection d'objets distincts : elle est indépendante de la nature des objets… ». On dit souvent « indépendante de la nature et de l'ordre de ces objets. »
>
> On présente ainsi le nombre comme un être bien mystérieux mais, le plus souvent, on s'empresse d'ajouter que rien n'est plus clair et plus simple. (§2)

Il écrit dans la synthèse sur les grandeurs (§85) :

> Nous avons renoncé à la distinction entre le nombre métaphysique attaché à une collection et le symbole qui le représente, entre la longueur métaphysique, le nombre métaphysique qui la mesure, le symbole qui représente ce nombre, et de même pour les aires et les volumes ; nous avons cherché à définir directement les nombres symboles, seuls importants en mathématiques, laissant à d'autres le soin de s'occuper des problèmes métaphysiques qui ne sont pas notre compétence. (§85)

Il nous semble possible que Lebesgue refuse en fait les définitions par abstraction.

Lebesgue propose aussi une nouvelle approche du théorème de Thalès (§20), avec des rapports « numérisés ». La situation est peut-être un peu différente de ce qui précède car, nous semble-t-il, deux débats sont entremêlés : il s'agit d'une part de rejeter les rapports « à la Euclide » et de proposer en remplacement une nouvelle technologie, numérique, pour le théorème de Thalès.

La situation serait assez paradoxale car les réformateurs qui se sont apparemment réclamé de Lebesgue ont assez massivement introduit les classes d'équivalence, en particulier une définition explicite du nombre entier par « abstraction » en primaire. Ils ont aussi rejeté les

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

constructions des nombres par la géométrie (Bronner, 1997) ce qui est pour le pour le moins troublant quand on lit les premières pages du livre de Lebesgue.

Il nous semble aussi qu'on ne peut exclure que les éléments que nous avons pointés, relatifs à la contestation des grandeurs dans le programme de 1945 soient aussi le reflet de cette discussion sur la métaphysique.

Tous ces éléments constituent plutôt des questions à explorer que des affirmations.

3.4. Multiplier et diviser des grandeurs entre elles

Nous présentons maintenant une troisième théorie et revenons ensuite sur les instructions de 1938 puis de 1945.

- Éléments de la théorie (Whitney, 1968 b)

Voici quelques éléments relatifs à la construction d'un Système de Grandeur par Whitney, la seule de nos théories qui permettent de multiplier et diviser des grandeurs entre elles.

Présentation sommaire

On suppose qu'on dispose d'un nombre fini d'espèces de Grandeurs (à savoir de *demi-droites vectorielles sur* R_+) G_1, G_2, …, G_n. Le but est de construire une structure contenant tous les éléments de tous les G_i et ceux de R_+, stable par multiplication et munie d'une opération d'exponentiation. En d'autres termes, on souhaite, étant données plusieurs grandeurs pouvoir les multiplier entre elles, les diviser, pouvoir prendre la racine d'une grandeur, etc…. Cet ensemble est une structure formelle, il n'a pas nécessairement de correspondance physique.

Soit g_1, g_2, …g_n, dans G_1, G_2, …G_n, pour λ dans R_+, r_1, r_2, …r_n dans Q, on définit un produit formel $\lambda g_1^{r_1} g_2^{r_2} ... g_n^{r_n}$. On identifie :

- tous les éléments de la forme : $0 g_1^{r_1} g_2^{r_2} ... g_n^{r_n}$ à l'élément 0 de R,
- tous ceux de la forme $\lambda g_1^0 g_2^0 ... g_n^0$ à l'élément λ de R,
- tous ceux de la forme : $\lambda g_1^0 g_2^0 ... g_i^1 ... g_n^0$ à l'élément λg_i de G_i.

On définit formellement sur l'ensemble de ces éléments qu'on appelle S^+ une multiplication et une exponentiation. On définit l'addition de deux grandeurs de même nature qui ne sont plus cette fois des éléments de G_i mais de S^+.

Il est intéressant de noter que si x est dans S^+ (et non plus seulement dans l'un des G_i), S^+ contient l'ensemble des λx et donc, la demi-droite vectorielle $R_+[x]$ engendrée par x dans S^+.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

S^+ peut alors être considérée comme la réunion de l'ensemble des demi-droites vectorielles engendrées par les éléments qu'elle contient. Ceci induit une addition partielle dans S^+. Deux éléments, pris au hasard, ne s'additionnent pas, en revanche, deux éléments *de même nature* (de la même demi-droite vectorielle) s'additionnent. On définit ainsi de nouvelles espèces de Grandeur.

Calculs avec unités et conversions

Cette construction justifie les calculs multiplicatifs et de division avec les unités. Elle justifie également qu'on les y supprime. Les conversions correspondent à des changements de base.

Par exemple, soit à résoudre le problème suivant que nous empruntons à Whitney :

> John ran a quarter of a mile in two and a quarter minutes. What was his average speed, in ft per sec ?

On se place dans le système de Grandeurs engendré, formellement, par [mile] et [min] ou n'importe quel autre système d'unités de longueur et de temps. On écrit par exemple (nous utilisons le signe « : » là où Whitney écrit des puissances négatives) :

$$\mathrm{v} = \left(\frac{1}{4}\mathrm{mile}\right) : \left(\left(2+\frac{1}{4}\right)\mathrm{min}\right) = \left(\frac{1}{4}\times 5280\ \mathrm{ft}\right) : \left(\left(2+\frac{1}{4}\right)\times 60\ \mathrm{sec}\right)$$

$$\mathrm{v} = \left(\frac{1}{4}\times 5280\right) : \left(\left(2+\frac{1}{4}\right)\times 60\right)\left(\mathrm{ft\ sec}^{-1}\right) = \frac{88}{9}\ \mathrm{ft\ sec}^{-1}$$

À titre d'exemple, le calcul de la vitesse dans les unités initiales peut s'écrire :

$$\mathrm{v} = \left(\frac{1}{4}\mathrm{mile}\right) : \left(\left(2+\frac{1}{4}\right)\mathrm{min}\right) = \left(\frac{1}{4} : \left(2+\frac{1}{4}\right)\right)\left(\mathrm{mile}/\mathrm{min}\right) = \frac{1}{9}\mathrm{mile}/\mathrm{min}$$

La construction justifie qu'on supprime les unités dans les calculs. En effet, calculer sans les unités revient grossièrement à calculer avec les coefficients des vecteurs dans une base donnée. De façon formelle, étant donnée une base (g_1, g_2, …g_n), on considère le morphisme unique qui à g_i associe 1. Le morphisme a la particularité de transformer les opérations sur les grandeurs en les opérations correspondantes sur les nombres.

Proportionnalité

Nous ne présentons que le cas de la proportionnalité simple. Si f est une fonction de G dans G_1 et homogène de degré 1, à savoir, pour tout x dans G, pour tout $\lambda \in \mathrm{R}^{*+}$, $f(\lambda x)=\lambda f(x)$, alors il existe une constante k dans G_1G^{-1} telle que $f(x)=kx$. k est donc un coefficient, non numérique en général ; k ne dépend pas des unités choisies pour exprimer les grandeurs en proportion.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Par suite, si u et u_1 sont des unités de G et G_1, alors il existe un unique α dans R_+ tel que $k = \alpha \frac{u_1}{u}$ et on a $f(ru)=(\alpha r)\,u_1$, où r est dans R_+. En composant avec les fonctions mesure, on retrouve donc une fonction linéaire numérique.

Si nous reprenons l'exemple de vitesse développé à propos de la théorie naïve (développée au 3.1) : on a $f(d)$=3 m/s×d, 3 m/s est maintenant un coefficient. On pourrait aussi écrire ce coefficient 10,8 km/h, c'est à dire la même vitesse exprimée dans une autre unité. Quant au nombre α, nous l'avons déjà rencontré avec Rouche à propos de nos fonctions h, g, j, il dépend, lui, des unités de longueur et de temps.

- Sur les programmes de 1938 et de 1945

Nous n'avons pas fait de recherche relative à la naissance de l'analyse dimensionnelle, néanmoins (Cazin et Kotcharian, 1984) estiment que c'est Joseph Fourier (1768-1830) dans son traité *Théorie analytique de la chaleur* (1822) qui a exposé pour la première fois les conceptions de base de l'analyse dimensionnelle, mais qu'elle n'a pris toute son importance que depuis les années 1930. Maxwell avait également publié un article sur la question en 1863.

La lecture des instructions de 1938 fait apparaître des produits et quotients de grandeurs tant pour justifier les techniques opératoires sur les décimaux que pour étudier les problèmes de règle de trois. Les méthodes de résolution prescrites dans ces instructions s'inscrivent tout à fait dans une théorie du type de celle proposée par Whitney en 1968. Rappelons qu'ils intégraient aussi des opérations simples sur les grandeurs. Il n'y a pas de contradiction entre ces deux aspects, la seconde théorie étant susceptible d'englober ces dernières.

Nous avons dit dans notre première partie que les instructions de 1945 reprennent beaucoup d'éléments de celles de 1938, en les avançant d'un ou plusieurs cours, notamment pour ce qui concerne les grandeurs quotient et produit. Ainsi, il semble qu'on pourrait considérer que le programme de 1945 emboîte deux théories complémentaires : la théorie des réels de Lebesgue pour l'étude des nombres, une théorie avec des grandeurs produits et quotients pour la proportionnalité. Mathématiquement ces deux théories sont compatibles. Sur le plan didactique, elles ont des objets en commun : toutes les deux permettent de résoudre des problèmes multiplicatifs, avec des techniques différentes. Nous avons, dans notre première partie, présenté quatre approches de la division dans le programme de 1945. On pourrait approfondir cette question et les confronter à nos théories.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

3.5. Pour conclure sur les rapports entre savoirs savants et programmes

Il nous semble qu'à partir de nos trois exemples de théories nous avons identifié des phénomènes différents.

La situation actuelle semble montrer une distorsion entre le savoir savant mathématique de référence et ce qui est prescrit pour l'apprentissage. Il semble qu'on peut dire qu'au niveau de l'institution programmes de l'école primaire : l'organisation mathématique est pilotée par une théorie du numérique et l'organisation didactique est pilotée par la « construction de leurs savoirs par les élèves ».

En fait, quand on considère les organisations mathématiques pour l'étude de la proportionnalité par exemple, telles qu'elles sont préconisées, les technologies sont très éloignées du savoir mathématique de référence, de même que certains types de tâches. Pour l'étude des fractions, ce seraient les types de tâches qui seraient étrangers au savoir savant plutôt que les technologies.

On peut d'abord interpréter cette hétérogénéité en faisant référence à l'organisation didactique sous-jacente. Cette référence impose certaines technologies et des types de tâches dans l'organisation mathématique visibles dans les instructions qui s'inscrivent mal dans le savoir savant de référence (le numérique).

En revanche, on peut aussi interpréter, avec la théorie de Rouche, les tâches et technologies repérées dans les programmes ce qui permet en fait de constituer *a posteriori* une autre praxéologie avec une strate théorique différente qui rendrait la praxéologie mathématique plus homogène sur ses quatre composantes et lui permettrait d'être décrite complètement par la théorie mathématique.

Cette nouvelle praxéologie mathématique donne des possibilités pour des technologies qui semblent plus satisfaisantes notamment quant à l'utilisation du langage symbolique et naturel. Elle permet aussi de repérer des tâches qui n'existent pas dans l'étude actuelle et dont il est notamment difficile de dire si elles relèvent du domaine « mesure » ou du numérique (distinction qui n'a pas de raison d'être dans la praxéologie que nous envisageons). L'existence de ces tâches ouvre peut-être des perspectives pour une approche plus précoce et moins formelle de certains savoirs.

Les deux autres théories que nous avons présentées ne sont pas naïves. Il semble possible d'envisager que le chapitre I de « La mesure des grandeurs » a été transposé dans le

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

programme de 1945 en primaire et au secondaire. Ce point n'est qu'effleuré et pourrait soulever en outre des questions d'épistémologie assez complexes. Un telle transposition pourrait signifier qu'on a essayé de mettre cohérence le savoir savant sur les réels et le savoir enseigné sur les nombres dès 1945.

4. Grandeurs, mesure : savoirs savants

4.1. Introduction

▪ Problème

L'intention de cette partie est d'ébaucher les contours pour définir ce que pourrait être un savoir savant pour les grandeurs et les nombres, adapté pour l'enseignement primaire, c'est-à-dire mathématiquement correct mais pas nécessairement le plus élaboré du point de vue de la sphère productrice des savoirs. Nous avons dit que nous voulions aller plus loin dans le projet Perrin (2002) qui consistait à assurer les professeurs de la cohérence de leurs discours. Pour nous, il s'agit de rendre cohérents les discours entendus par les élèves.

Dans la partie précédente, avec notre étude des programmes de 2002 et 1945 notamment, nous avons relevé des tâches et des technologies qui semblent s'inscrire dans certaines théories mieux que dans d'autres. L'étude de quelques théories nous a aussi permis de repérer des tâches ou des technologies qui n'existent pas dans les programmes et qui semblent nécessaires à l'existence de la théorie. Ceci nous permet de repérer des « besoins » dans les théories.

Ainsi notre problème doit-il être abordé sous deux angles :

- la complexité de la théorie : il faut une théorie avec des concepts « accessibles » à des élèves de l'école primaire (savoir savant du deuxième type),
- la fonctionnalité de la théorie : il faut une théorie qui satisfasse les besoins technologiques de l'école primaire, voire qui permette d'interpréter les tâches qu'on y rencontre.

Précisons certains éléments :

- Il ne s'agit pas nécessairement de repérer une seule théorie mais éventuellement plusieurs qui pourraient s'emboîter. C'est ainsi que nous avons interprété le programme de 1945 ;
- Disons tout de suite que nous ne considérons pas la question du formalisme (ou des formalismes) dans lequel ces théories seraient exprimées. Cette question est sans doute

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

essentielle néanmoins, notamment du point de vue de la « complexité de la théorie ». Dans un premier temps, nous considérons qu'un formalisme « sophistiqué » est un indicateur de complexité, de savoir savant du premier type mais nous avons le sentiment que ce problème ne peut être résolu si simplement.[30] ;

- Une façon simple, sans doute trop simpliste, qui peut permettre de résoudre notre problème est de voir cette théorie comme une progression : un ordre pour les apprentissages à l'école qui serait piloté par l'ordre logique de la théorie. C'est simpliste car il y a nécessairement de la souplesse à insérer du point de vue de l'enseignement dans une classe, ce n'est pas parce qu'une question a été abordée une fois qu'on n'y revient plus, etc. Il nous semble toutefois qu'un tel ordre serait susceptible de garantir la cohérence des différentes praxéologies enseignées.

▪ Méthode

Peut-être est-ce à cause de leur histoire mouvementée mais il n'existe pas *une* définition officielle des grandeurs, en mathématiques ; il en existe en revanche plusieurs approches. Sans dire qu'elles sont nombreuses et totalement étrangères les unes aux autres, on peut affirmer que les théories des grandeurs, de leur mesure ou de la mesure sont plurielles. Il peut arriver que deux théories ne diffèrent que par quelques « détails » qui changent tout ou presque rien selon le point de vue qu'on adopte.

Nous voulons donc essayer de voir un peu plus clair dans les diverses théories des grandeurs, de leur mesure ou de la mesure. Nous voulons essayer de donner quelques critères assez généraux pour distinguer les différents cadres théoriques. Il s'agit aussi de savoir si on peut réhabiliter les grandeurs de l'enseignement ancien. Qu'est-ce qui est incorrect dans les praxéologies mathématiques anciennes ? Evidemment, l'axiomatique mathématique n'est plus la même : au 19ème siècle, on est passé d'une axiomatique comme idéalisation de la réalité à une axiomatique de relations. Aujourd'hui, est vrai ce qui n'est pas contradictoire. Y a-t-il un moyen d'« adapter » les théories anciennes au fonctionnement des mathématiques actuelles ? Cette question a son importance pour notre travail car nous sommes intéressée par les praxéologies à l'œuvre avant la réforme et nous nous interrogeons sur la pertinence de leur adaptation à l'enseignement d'aujourd'hui.

[30] En particulier, plusieurs travaux que nous n'avons pas retenus pour ce chapitre et qui ont été publiés à la charnière des années 70 et 80 comportaient des propositions de théories mathématiques destinées à « modéliser » l'apprentissage de telle ou telle notion. Citons par exemple (Douady, 1980), (Bessot & Eberhard, 1983) et (Colmez, vers 1975).

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Nous commençons par visiter quelques idées plus ou moins répandues sur les grandeurs que nous interprétons avec des savoirs savants. Nous proposons ensuite des questions qui nous semblent adaptées pour interroger la pertinence de la transposition d'une théorie pour l'école primaire. Pour finir, nous proposons une synthèse sur les différentes théories par rapport à nos questions.

- Théories retenues pour cette partie

Pour faire cette étude, nous avons étudié plusieurs théories dont nous faisons la liste et pour lesquelles nous donnons des références. Nous espérons que cet éventail nous permet de couvrir une bonne partie de la problématique de la diversité des théories des grandeurs, de leur mesure ou de la mesure.

Théorie & objet de la théorie	Désignation	Référence
Construction des réels	Lebesgue-Réels	(Lebesgue, 1975, chapitre I, pp. 10-34)
Théorie de la mesure simplement additive	Lebesgue-Mesure	(Revuz, 1998)
Construction des réels : construction de R, comme mesures de grandeurs.	Whitney-Réels	(Whitney, 1968 a)
Analyse dimensionnelle	Whitney-Produits	(Whitney, 1968 b), (Chevallard & Bosch, 2002, pp. 66-76)
Construction des rationnels	Rouche-Rationnels	(Rouche, 1992, 1994)
Détermination de conditions sur un ensemble pour qu'il soit isomorphe à une partie de R, munie de la structure induite par l'ordre et l'addition	Bourbaki-Grandeurs	(Bourbaki, chapitre V, §2)
Axiomatisation des grandeurs mesurables	Lebesgue-Grandeurs	(Lebesgue, 1975, chapitre VI, pp. 127-141)
Axiomatisation des activités de mesurage de (Brousseau, 1987)	Bahujama-Mesurage	(Bahujama, 2002)
Définition des grandeurs	Perrin-Grandeurs	(Perrin, 2005, pp. 136-137)
Notions communes	Notions communes	Livre II, *Les Eléments*, Euclide
Rapports de grandeurs	Rapports	Livre V, *Les Eléments*, Euclide

Ces deux dernières théories sont différentes des précédentes dans la mesure où elles ne sont pas axiomatisées au sens contemporain du terme.

4.2. Revue d'idées sur les grandeurs

Au départ, nous avons glané ces idées au cours d'échanges avec des professionnels des mathématiques ou de leur enseignement, et non avec des élèves. La moisson pourrait peut-être s'enrichir au fil de discussions. Elles font parfois écran à la bonne réception de travaux sur les grandeurs. Ces idées sur les grandeurs sont sans doute le reflet de la diversité des théories des grandeurs, de leur mesure ou de la mesure. Elles sont peut-être le produit de la position particulière des grandeurs dans l'histoire des mathématiques : comme les grandeurs n'ont pas été formalisées au moment de la formalisation des mathématiques, les définitions relatives aux grandeurs ne sont pas fixées. Il n'existe pas de définition mathématique standard (ou commune) pour « grandeur » comme il en existe une pour « espace vectoriel », les axiomes retenus pour définir une « grandeur », voire certaines des propriétés qui en découlent, peuvent donc varier d'une définition à l'autre. Peut-être ces idées sont-elles aussi symptomatiques de différentes épistémologies des mathématiques. Nous les éclairons par des savoirs savants. Il nous semble important de préciser que ces idées ne sont pas des idées de physiciens mais de mathématiciens. Nous avons déjà évoqué certaines d'entre elles dans la partie précédente de ce chapitre.

- 1ère idée : Les grandeurs… ça n'est pas bien rigoureux.

Le statut épistémologique des grandeurs est complexe, notamment, parce qu'elles constituent une sorte d'interface entre les mathématiques et le réel. Nous avons déjà évoqué l'éviction des grandeurs des mathématiques savantes au 19ème siècle. Pour des raisons diverses, plus tard, plusieurs mathématiciens axiomatisent les grandeurs. Ces dernières sont alors des objets « formels ». On leur donne formellement des propriétés qui, le plus souvent, correspondent « aux qualités sensibles » des « grandeurs sensibles », dans le respect des contraintes imposées par la cohérence mathématique.

Ce qui se passe dans le monde concret permet de choisir des axiomes, mais le comportement des « objets mathématiques » n'est pas celui des « objets concrets ». Ainsi, quand, pour comparer la contenance de deux récipients, on transvase le contenu de l'un dans l'autre, la comparaison s'effectue avec une certaine incertitude. Dans le monde des objets mathématiques, nous décidons qu'il n'y a pas d'incertitude[31]. C'est une qualité sensible générale des grandeurs que de pouvoir être comparées. Elle sera traduite en axiome ou propriété formelle dans une définition mathématique des grandeurs. Un ensemble d'objets sera le plus souvent doté d'un pré-ordre total et une grandeur (si on ne part pas d'un ensemble d'objet, mais directement d'un ensemble de grandeurs) d'une relation d'ordre total. Il en est

[31] On peut aussi modéliser l'incertitude mais ce n'est pas notre projet.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

de même avec les opérations que nous faisons sur les objets. La difficulté matérielle éventuelle pour réaliser une opération, la division d'une capacité par un entier par exemple, n'est pas un obstacle pour poser la divisibilité en axiome, si nécessaire.

Ainsi, même si les axiomatisations ont été tardives et diverses, il est assez clair aujourd'hui qu'il existe des grandeurs mathématiques, géométriques ou non.

- 2ème idée : La longueur est une grandeur géométrique… souvent mais pas toujours.

Commençons par ce qui peut ressembler à une tautologie : une grandeur géométrique est une grandeur définie dans un cadre axiomatique géométrique (cf. préambule du 3.1.). On définit généralement la longueur, l'aire, le volume et l'angle à partir d'objets géométriques : les segments, les surfaces quarrables, les solides cubables, les réunions de deux demi-droites de même origine. Les objets géométriques sont des ensembles de points dans une axiomatique géométrique.

Néanmoins, dans le cadre Rouche-Rationnels (théorie naïve du 3.1.) on peut imaginer qu'on travaille avec la longueur, l'aire, mais aussi la capacité, la masse. Les éléments de base de la théorie sont des « objets » génériques, ils ne sont pas constitués de points car ils sont *premiers* (ce ne sont pas des ensembles de quelque chose). Ils ne sont pas dotés de suffisamment de propriétés pour qu'on puisse inférer un cadre géométrique à partir d'eux. Ils permettent néanmoins d'élaborer un cadre mathématique de travail avec des grandeurs.

- 3ème idée : La température est une grandeur additive… souvent mais pas toujours.

Selon le cadre mathématique sous-jacent, l'additivité d'une grandeur peut se définir à deux niveaux :

1) « La mesure de la somme est la somme des mesures »

   Ceci suppose une théorie définie à partir des grandeurs (ou des objets), une addition sur ces grandeurs ou objets, une relation entre les grandeurs (ou objets) et les nombres par une fonction et enfin une relation entre l'addition de grandeurs (ou objets) et l'addition des nombres.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

2) « On peut parler d'égalité et de somme »[32]

Parler d'« égalité » suppose en fait qu'on a des objets et qu'ils sont « égaux », c'est à dire qu'il existe une relation d'équivalence. Parler de « somme » suppose que la somme est compatible avec les opérations sur les objets. Pour nous, ceci ne suppose pas nécessairement que la somme des objets soit en relation avec les nombres, il faut en revanche qu'une addition soit définie sur les objets.

1) On peut décider d'ajouter formellement les deux températures 15°C et 20°C. On pourra écrire que 15°C+20°C=35°C. En ce sens, certains considèrent que la température est une grandeur additive.

2) Considérons deux bassines contenant de l'eau, l'une à 15°C, l'autre à 20°C. Prélevons de l'eau dans chacune des bassines. En mélangeant, on obtient de l'eau dont la température n'est pas 35°C. Qui plus est, cette température peut prendre, selon la composition du mélange, différentes valeurs entre 15°C et 20°C. Le mélange des deux objets « quantité d'eau » ne permet pas de concevoir une « somme » d'objets dont on pourrait tirer une « somme » pour la température. On n'a pas de compatibilité de l'addition des objets (le mélange) avec les classes d'équivalence que peuvent constituer des objets à même température. En ce sens, avec des objets définis comme étant des quantités d'eau et une addition définie comme le « mélange » de deux objets, la température n'est pas une grandeur additive. Ceci ne veut pas dire qu'on ne peut pas trouver des « bons » objets et une « bonne » addition pour définir la température comme une grandeur additive dans le deuxième sens.

Dans le premier cas, la grandeur ne repose pas sur des objets et la température est additive, dans le second cas, nous avons proposé de définir des objets et une addition pour la « grandeur température » d'une certaine façon. Cette façon ne permet pas de définir la température comme une grandeur « additive ». Dans le livre II des Éléments d'Euclide, les grandeurs sont définies à partir des objets (avec les *notions communes*), dans le livre V elles sont définies au niveau « grandeur ».

Pour l'école primaire, pour étudier certains objets, on peut attendre d'une théorie qu'elle sous-tende les actions matérielles et donc qu'elle s'attache aux « objets ». Par ailleurs, dans les deux cas, nous avons eu besoin d'une addition sur les grandeurs ou les objets.

---

[32] Nous extrayons cette citation de (Lebesgue, 1975, §85). Il indique : « on déclare généralement que, pour qu'il y ait grandeur directement mesurable, il faut qu'on puise parler d'égalité et de somme ». Il s'attache ensuite à critiquer cette assertion pour proposer « sa » théorie des grandeurs (Lebesgue-Grandeurs).

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

- 4ème idée : Qu'est-ce qu'une grandeur mesurable ?

Pour l'étude de cette 4ème idée, nous supposons que nous avons un ensemble de grandeurs (ou d'objets) qui est doté d'une addition.

Nous avons dit à propos des programmes de 1980 que la caractérisation des grandeurs passe par une fonction mesure « la somme des mesures est la mesure de la somme ». Toutefois lorsqu'on veut construire les réels à partir des grandeurs, ce que fait Whitney (1968 a) par exemple, il nécessaire de définir les grandeurs sans référence aux réels et donc sans référence à cette fonction. Pourtant, dans (Whitney, 1968 a), ces grandeurs seront finalement dotées de la propriété « la mesure de la somme est la somme des mesures ». Notre problème se scinde en fait en deux :

- quels sont les axiomes nécessaires dans la définition d'un ensemble de grandeurs afin de pouvoir construire des nombres comme mesures de ces grandeurs ?
- quel liens y a-t-il entre la « mesurabilité » définie à partir de la fonction mesure et les définitions des grandeurs qui ne font pas référence aux nombres ?

Nous avons déjà évoqué cette dernière question avec l'étude de l'approche des grandeurs dans le domaine mesure dans les instructions de 1980. Nous avons dit que l'approche des grandeurs par la fonction mesure n'était pas favorable à la construction des nombres par les grandeurs.

Nous nous intéressons donc pour le moment à la définition des grandeurs sans utiliser les nombres. Nous avons déjà dit qu'il fallait une addition, mais cela ne suffit pas. Cette addition va en fait avoir certaines propriétés, relatives à l'ordre notamment, que nous allons préciser.

Nous désignons par la lettre A les approches de type ordre et addition , et par la lettre M celles de type fonction mesure.

L'addition de grandeurs est en général commutative[33] et associative. Ces propriétés sont complétées par d'autres : une grandeur de type A est un ensemble ordonné dans lequel l'ordre et l'addition sont articulés. On trouve plusieurs façons de définir l'articulation entre addition et ordre. Nous avons repéré cinq conditions qui sont agencées différemment selon les cadres théoriques. Toutes les approches sont-elles équivalentes ?

Les conditions que nous avons repérées pour les grandeurs de type A sont les suivantes :

---

[33] Bourbaki-Grandeurs ne suppose pas la commutativité *a priori*. Elle apparaît comme une conséquence des autres axiomes choisis.

a. l’ensemble est totalement ordonné

b. l’addition est compatible avec l’ordre (si A>B alors A+C>B+C)

c. la grandeur est archimédienne : pour tout A et B, il existe *n* entier tel que : nA>B[34]

d. l’addition agrandit : pour tout A et B, A+B>A ; de plus, une soustraction est définie : pour tout A et B, A>B, il existe C tel que : B+C=A

e. les grandeurs sont positives : il existe un élément neutre pour l’addition et que c’est le plus petit élément de l’ensemble.

L’énoncé (d) a une grande familiarité avec la notion commune du livre II « le tout est plus grand que la partie » (Euclide, 1990 ; Rouche,1997).

Rouche-rationnels ne retient pas l’énoncé (e), sans doute parce qu’il n’a pas besoin de modéliser un « plus petit élément » (qu’est-ce qu’un objet de taille nulle ?), ni d’élément neutre pour l’addition. Ce qui est nécessaire dans la théorie c’est que l’addition agrandisse, en un sens, cette propriété « remplace » le fait que les grandeurs sont positives.

Les définitions des grandeurs que nous avons identifiées reposent sur les combinaisons suivantes :

A1)

a. l’ensemble est totalement ordonné

b. l’addition est compatible avec l’ordre

c. la grandeur est archimédienne

e. les grandeurs sont positives

A2)

a. l’ensemble est totalement ordonné

d. l’addition agrandit et une soustraction est définie

e. les grandeurs sont positives

Parfois, on adjoint à (A1) la propriété (d) ce qui donne :

A3)

a. l’ensemble est totalement ordonné

b. l’addition est compatible avec l’ordre

c. la grandeur est archimédienne

---

[34] Cet énoncé suppose N construit

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

d. l'addition agrandit et une soustraction est définie

e. les grandeurs sont positives

Il existe des implications entre ces diverses conditions. Par exemple :

- Si (A2) est réalisée alors l'addition est compatible avec l'ordre (b). Par ailleurs, (A2) n'implique pas l'axiome d'Archimède (c).
- Dans (A1), on peut montrer que l'addition agrandit.
- En fait, à condition d'adjoindre formellement (ce qui ne nécessite pas d'axiome supplémentaire), les éléments éventuellement nécessaires pour définir la soustraction, (A1) et (A3) sont équivalentes. Dans ces conditions, si (A1) est réalisée alors l'addition agrandit et (A2) est réalisée ; (A2) complétée par l'axiome d'Archimède (c) et la positivité est équivalente à (A1). (Chambris, 2004)

Une condition pour être « mesurable », pour une grandeur définie par une fonction mesure pourra être (type M) :

M) il existe une fonction mesure m à valeurs dans R_+, injective, telle que : pour tout A et B, $m(A+B)=m(A)+m(B)$.

Cette condition suppose R construit. Plus précisément, il suppose qu'on dispose au préalable d'un ensemble de nombres suffisamment grand, c'est-à-dire susceptible d'accueillir toutes les valeurs de la fonction mesure.

Cette condition permet de donner des propriétés à l'ensemble E sur lequel la mesure est définie.

- ordre. Par définition, $A>B$ si et seulement si $m(A)>m(B)$ (car m est injective). La fonction mesure m définit un ordre total sur E.
- compatibilité de l'addition avec l'ordre ainsi défini. Comme l'addition sur R est compatible avec l'ordre, cette propriété est transmise à l'addition sur E. On sait que : $m(A+C)=m(A)+m(C)$ et $m(B+C)=m(B)+m(C)$. Si $A>B$, alors $m(A)>m(B)$ donc $m(A)+m(C)>m(B)+m(C)$ donc $A+C>B+C$.
- axiome d'Archimède. Comme R est archimédien, si A et B sont dans E, alors il existe n tel que $nm(A)>m(B)$. Par suite, comme m est additive, $nm(A)=m(nA)$ donc $nA>B$. E est archimédien.
- De même, comme l'addition sur R_+^* agrandit, l'addition sur E agrandit. En revanche, si m n'est pas surjective, la soustraction n'est pas nécessairement définie.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

On voit donc que l'hypothèse de l'existence d'une fonction mesure permet de définir une grandeur de type (A1).

Nous nous sommes placée dans l'hypothèse où les propriétés sont définies au niveau grandeur. Si elles sont définies au niveau objet, deux cas sont alors possibles qui correspondent aux caractérisations de type A et M. Soit, l'ensemble des objets est doté d'un pré-ordre total et d'une addition reliée au pré-ordre qui permet de définir une relation d'équivalence sur les objets compatible avec l'addition. Cette relation permet – par quotient sur l'ensemble des objets – de définir une grandeur. On est alors ramené à une des caractérisations de type A. Soit, une fonction mesure (pas nécessairement injective) est définie sur l'ensemble des objets, elle permet de définir – par quotient – des classes d'objets de même mesure et donc une fonction mesure injective sur l'ensemble constitué par ces classes. On est alors ramené à la caractérisation (M).

- 5$^{\text{ème}}$ idée : les grandeurs intéressantes sont continues

Cette idée est la suite de la précédente. Nous avons évoqué la distinction entre grandeur et continu à propos de l'étude des programmes, nous considérons que les « grandeurs » correspondent à un niveau (dans l'organisation : objet, grandeur, mesure). Souvent on associe pourtant l'idée de « grandeur » à celle de continu. Nous allons regarder maintenant comment les théories des grandeurs s'intéressent au continu.

Dans l'idée précédente, les ensembles que nous avons considérés ne présentent pas de caractéristiques pour appréhender le « continu », rien ne garantit par exemple qu'entre deux grandeurs on en ait une troisième. Nous avons d'ailleurs défini des grandeurs discrètes. Certaines théories ne se préoccupent pas du continu, d'autres se cantonnent au « non discret ». Pour s'approcher du continu, il est nécessaire d'adjoindre des propriétés. Nous nous intéressons aux caractérisations de type A. Il faut d'abord garantir l'existence de petits éléments. Nous avons repéré deux façons de faire :

p1) ajouter un axiome de divisibilité par les entiers : pour tout x, pour tout n entier, il existe y tel que $ny=x$ (Rouche-Rationnels, Perrin-Grandeurs, Lebesgue-Réels).

p2) ajouter un axiome garantissant l'existence de « très petits » éléments (Whitney-Réels, Bourbaki-Grandeurs) qui assure en fait que pour toute grandeur x, pour tout entier n, il existe y non nul tel que : $ny<x$. (Bourbaki et Whitney supposent que si $x<y$ alors il existe t non nul tel que $x+t<y$.)

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Enfin, pour accéder à la « continuité », il faut des axiomes *ad hoc*. Certains ensembles de grandeurs sont complets au départ, d'autres sont complétés au cours de la construction.

À partir des caractérisations de type A, il s'agit de :

c1) compléter par ses coupures un ensemble (de type A) archimédien avec de très petits éléments (Whitney-Réels, Bourbaki-Grandeurs 1)

c2) utiliser une axiomatique géométrique (Lebesgue-Réels) qui suppose l'axiome d'Archimède et un axiome de continuité (segments emboîtés sur la droite géométrique)[35],

c3) définir un ensemble avec de très petits éléments et assurer l'existence d'une borne supérieure (Bourbaki-Grandeurs 2 ; Perrin-Grandeurs),

- Retour sur la 4ème idée : de la relation entre addition et ordre à l'existence d'une fonction mesure, retour sur la construction des nombres

Nous revenons à notre 4ème idée, avec des grandeurs de type A. Étant choisis les axiomes de définition des ensembles de grandeurs, toutes les constructions utilisent des processus qui se ressemblent pour construire :

- soit une fonction mesure,
- soit un ensemble de nombres qui permet ensuite de définir des fonctions mesure du même type que le précédent.

À partir de l'addition itérée n fois d'un élément x, puis de la division d'un élément par un entier p sont définis des objets du type : $n(x/p)$. Par un procédé de coupure de l'ensemble des grandeurs, Whitney-Réels étend ce processus à toutes les grandeurs. Lebesgue-Réels fait de même pour les objets en utilisant un axiome géométrique de continuité. Perrin-Grandeurs et Bourbaki-Grandeurs qui présupposent R construit déterminent le « rapport » de deux éléments, c'est à dire étant données deux grandeurs x et y (non nulles), le réel λ tel que $y=\lambda x$. Ceux qui construisent les nombres non entiers et les opérations sur ces nombres les tirent des objets du type $n(x/p)$ et des opérations sur les grandeurs.

Étant donné un élément x, la mesure de y dans l'unité x n'est autre que le réel λ tel que $y=\lambda x$. On peut ainsi définir une fonction associée à x, c'est une fonction mesure.

[35] Dans (Lebesgue, 1975), nombre d'axiomes restent néanmoins implicites.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Rouche-Grandeurs définit les grandeurs selon (A2) en adjoignant la divisibilité. On établit une forme faible de (M) car les hypothèses ne suffisent pas pour définir une fonction mesure sur l'ensemble des grandeurs (pas d'axiome d'Archimède notamment). En fait, une grandeur de type (A2) (avec divisibilité) permet de construire l'ensemble des nombres rationnels comme mesures de grandeurs mais pas plus. Par suite : si A et B ont une mesure m(A) et m(B) dans la même unité alors A+B a une mesure m(A+B) dans cette unité et m(A+B)=m(A)+m(B). On peut voir m comme une fonction mesure qui ne serait définie que sur une partie de l'ensemble des grandeurs. Toute grandeur est un élément d'une demi-droite de la forme $Q_+[u]$ (où u est une grandeur) sur laquelle on peut définir une *fonction mesure partielle*.

Bourbaki propose plusieurs caractérisations des grandeurs. Avec notre problématique, nous voyons les constructions de Bourbaki de la façon suivante : dans tous les cas, on suppose R construit et il s'agit de déterminer différents ensembles de conditions sur un ensemble de grandeurs pour permettre de définir une fonction mesure. Bourbaki énonce qu'il s'agit de voir les conditions sur un ensemble (doté *a minima* d'une addition et d'un ordre) pour qu'il soit isomorphe à une partie de R. Perrin (2005) est dans la même logique que Bourbaki mais il ne définit qu'un seul ensemble de conditions.

Ce qui nous semble important pour notre travail, c'est d'abord le fait que les deux conditions, caractérisations de types A et M, ne sont pas étrangères l'une à l'autre. Avec certaines conditions supplémentaires, elles sont d'ailleurs équivalentes. Néanmoins, la définition par les fonctions mesure suppose de disposer d'un ensemble de nombres *ad hoc* ce que ne suppose pas celles par addition et ordre (type A).

- 6$^{\text{ème}}$ idée : Souvent, avec les grandeurs, la multiplication est une loi de composition externe mais parfois elle est interne.

Autrement dit, on ne peut pas multiplier deux grandeurs entre elles, mais parfois on le peut.

Dans le cadre de l'analyse dimensionnelle (Whitney, 1968 b), on peut multiplier des grandeurs entre elles. On a alors des grandeurs produits et quotients. En revanche, l'addition n'est alors plus définie en général (on n'additionne pas des mètres et des mètres-carrés !), mais seulement pour les grandeurs de même nature, de même pour l'ordre.

Dans le cadre des grandeurs du Livre V des Eléments, on a une multiplication externe par un entier, l'addition itérée d'une grandeur. De façon plus générale, quand une grandeur est

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

« unidimensionnelle » ou « unidirectionnelle » ou « de type A », on multiplie une grandeur par un nombre : entier, rationnel ou réel, selon les cadres.

- 7ème idée : Et les grandeurs repérables…

Il semblerait qu'en mathématiques, une « grandeur repérable » n'est pas autre chose qu'un ensemble totalement ordonné. Nous avons vu que la dialectique grandeur repérable / grandeur mesurable est probablement une question de physiciens importée en 1980 dans le programme de mathématiques de primaire. Les grandeurs mesurables sont celles pour lesquelles on a une fonction mesure. Nous venons de voir que la filiation de repérable à mesurable ne va pas de soi, en mathématiques.

La filiation naturelle serait plutôt : « repérable », puis grandeur de type A. Chamontin (2001) propose d'articuler ces deux perspectives en passant par la définition d'un repérage qui est une graduation (une mesure au sens faible à valeur dans R_+) de l'ensemble des grandeurs repérables. Quand on a une addition dans un ensemble archimédien, c'est à dire une grandeur archimédienne de type A, la construction d'une fonction mesure (par les procédés déjà évoqués) prolonge la notion de repérage. La graduation devient « régulière ».

Les grandeurs qui nous préoccupent sont celles qui sont dotées d'une addition et permettent à terme de construire les ensembles de nombres. Est-il pertinent, dans cette perspective, d'étudier des grandeurs « repérables » à l'école primaire en mathématiques ?

Les physiciens ont une autre dialectique que nous ne reprenons pas car elle n'apparaît pas dans les programmes de primaire (de mathématiques) : grandeur extensive / grandeur intensive.

4.3. Synthèse sur les théories

Nous indiquons maintenant des questions relatives aux théories mathématiques des grandeurs, de leur mesure ou de la mesure. Elles sont articulées avec des types de tâches du numérique ou du domaine mesure. Elles reprennent pour partie des éléments déjà énoncés. Elles pourraient permettre de repérer des critères pour « comparer » les théories dans une perspective d'enseignement de l'arithmétique du primaire.

Nous rappelons ce que nous avons déjà indiqué, il ne s'agit pas nécessairement de repérer une théorie mais éventuellement plusieurs théories qui s'emboîtent logiquement. Nous cherchons à repérer des conditions pour élaborer un savoir savant « mathématiquement correct » mais adapté au niveau de développement des élèves de primaire. Il nous semble qu'il faudrait que la théorie englobe notamment les types de tâches et les techniques ou technologies prescrites. Une façon de faire semble être de se placer dans la perspective d'une progression dans l'apprentissage des élèves même si ce point mériterait sans doute d'être plus travaillé.

Il ne s'agit pour nous que de l'ébauche d'un travail qui reste à faire. Par ailleurs, il nous semble que nombre des choix que nous pointons relèvent de décisions institutionnelles notamment sur les objets et les technologies qu'on souhaite enseigner.

- Des questions

1) Quels sont les *éléments de base* de la théorie ? La théorie construit-elle les grandeurs à partir des objets ou bien les grandeurs sont-elles pré-construites ? La théorie construit-elle les objets à partir d'autres éléments ou bien les objets sont-ils pré-construits ?

   À l'école primaire, on manipule des objets-grandeurs, au sens où on manipule des objets en tant qu'ils représentent des grandeurs. Par suite, si un cadre théorique suppose les grandeurs déjà construites, il n'est pas pertinent pour étudier ces manipulations d'objets-grandeur. Il peut cependant l'être pour une autre étude.

   Par ailleurs, si les objets sont des « ensembles d'éléments » (par exemple, les segments sont des ensembles de points dans Lebesgue-Réels) ce qui est important sur le plan théorique, la question de savoir si cela est important sur le plan didactique est pour nous entière.

2) La théorie garantit-elle l'existence de petits objets ou de petites grandeurs ?

   L'existence de petits éléments est importante pour construire les nombres non entiers et pour étudier le continu. La divisibilité, quand elle existe, garantit l'existence de ces petits éléments. Par exemple, dans Whitney-Réels, il n'y a pas de divisibilité au départ, mais des éléments suffisamment petits qui assurent qu'il n'y a pas de *gros trou* dans l'ensemble de grandeurs. Dans Bahujama-Mesurage, la question des petits éléments n'apparaît pas, mais on ne construit pas de nombres et la question de l'incommensurabilité est envisagée mais pas résolue.

3) La théorie suppose-t-elle les nombres déjà construits ? Au contraire, construit-elle des nombres ? et quels nombres : entiers, décimaux, rationnels ou réels ? Qu'est-ce que la mesure dans cette théorie ?

   La construction des nombres non entiers est un objet d'enseignement du primaire. Par suite, une théorie des grandeurs qui suppose ces nombres pré-construits ne nous semble pas pertinente pour cet apprentissage. Elle peut l'être pour un autre.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Dans les théories qui construisent les nombres, la mesure est d'abord le procédé qui permet de construire les nombres via les opérations sur les grandeurs ou objets et non une fonction additive à valeurs dans R_+.

Nous avons repéré des régularités dans les théories qui construisent les nombres et les opérations sur les nombres :

- L'addition itérée d'un objet permet de définir la multiplication d'une grandeur ou d'un objet par les entiers et la mesure en nombres entiers. On peut relier la mesure à la multiplication externe de la grandeur par un nombre, par définition de la mesure ou de la multiplication : mesA/U=a signifie $\underline{A}=a\times\underline{U}$.[36]

- La division d'une unité par un entier permet d'accéder à la mesure de cette fraction d'unité. Elle est souvent du type $\frac{1}{n}$, elle est en nombre entier dans Lebesgue-Réels.

- La combinaison des deux points précédents permet d'obtenir les mesures d'objets en nombres rationnels (ou en nombres entiers, Lebesgue-Réels). Avec de bons axiomes, la collection d'objets ainsi mesurés est dense dans l'ensemble des objets.

- La somme de deux nombres est par définition la mesure dans une unité de la somme de deux grandeurs mesurées par ces nombres dans cette unité.

4) Dans la théorie, y a-t-il une multiplication qui implique les grandeurs ? Si oui, est-ce une loi externe (une grandeur est multipliée par un nombre) ou bien peut-on multiplier deux grandeurs entre elles ? La multiplication des nombres est-elle prise en charge dans la théorie ?

Le sens des opérations est objet d'enseignement et nous avons vu, par exemple à propos de la division (cf. 2.2), qu'il y a plusieurs façons de l'appréhender. On peut supposer que selon la théorie choisie en référence, le sens accordé à la multiplication ne sera pas le même : la multiplication peut être une loi interne sur les nombres (ce qui est possible même dans une théorie des grandeurs, une fois qu'on a construit les nombres et qu'ils sont dotés de leurs propriétés), une loi externe entre grandeurs et nombres ou une loi interne entre grandeurs. De plus, le traitement de la

[36] Compte tenu des conventions contradictoires qui existent dans ce domaine, nous notons indifféremment $a\times\underline{U}$ ou $\underline{U}\times a$ cette multiplication externe, ce qui ne signifie en rien qu'elle est commutative, propriété qui n'a pas de raison d'être pour une loi externe. De même qu'il ne parle pas de grandeurs, Lebesgue ne dit pas que la mesure est une multiplication externe.

proportionnalité ne sera pas le même dans une théorie qui prend en charge ou non les produits et quotients de grandeurs.

Il existe par ailleurs des théories qui ne se préoccupent pas de la multiplication. C'est le cas par exemple de la théorie de la mesure de Lebesgue mais plus généralement de l'approche par « grandeur repérable, grandeur mesurable » en physique.

La multiplication des nombres peut être prise en charge diversement dans une théorie. Ce point est très lié à la définition éventuelle d'une multiplication impliquant les grandeurs. Les approches possibles semblent être : pour la multiplication comme loi externe, la multiplication comme conversion, la composition d'actions sur les grandeurs ; pour la multiplication comme loi interne, le calcul de l'aire d'un rectangle, les grandeurs produits.

5) Dans la théorie, compare-t-on des objets ?

Cette question nous semble cruciale bien que banale. Elle est cruciale car elle rejoint les nombreux travaux de didactique et de psychologie cognitive notamment qui pointent la nécessité de comparer les objets pour apprendre les grandeurs. Nous avons vu que dans toutes les théories de type A, c'est-à-dire celles qui ne réfèrent pas aux nombres pour leur définition, la comparaison est un axiome de base de la théorie.

6) Dans la théorie, quel est le statut du report de l'unité ?

Cette question rejoint la précédente en ce sens que la question de l'unité est pointée comme cruciale dans les travaux de didactique et de psychologie cognitive pour l'apprentissage des grandeurs. Dans les théories que nous avons étudiées, le report d'unités n'est en général pas premier, il arrive après l'addition entre deux grandeurs quelconques dont le report d'unité est un type particulier. Le report apparaît en revanche quand il s'agit de définir l'addition itérée pour la multiplication externe (qui donne la mesure en nombres entiers). Il apparaît aussi avec l'axiome d'Archimède lorsqu'on l'utilise.

7) La théorie inclut-elle un traitement de la proportionnalité ? Si oui, lequel ?

Quelles « choses » sont proportionnelles ? Comment la théorie caractérise-t-elle la proportionnalité ? Quelles propriétés supplémentaires acquièrent les « choses » proportionnelles ?

Rouche et Whitney-Produits proposent deux approches de la proportionnalité : la première est minimale et fait essentiellement intervenir la linéarité, la seconde fait

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

intervenir les rapports externes de grandeurs. La seule de nos théories qui permette de multiplier ou diviser des grandeurs entre elles est d'ailleurs Whitney-Produits. La proportionnalité intervient dans les théories du type « fonction mesure » car si deux fonctions mesurent la même grandeur, elles sont multiples l'une de l'autre et les conversions s'obtiennent par des fonctions mesure.

8) Comment les tâches prescrites aux élèves prennent-elles en charge l'articulation entre l'addition et l'ordre ?

   Cette question renverse la perspective dans laquelle nous étions jusqu'à présent : il s'agit de partir de la théorie pour poser des questions sur les tâches enseignées. Autrement dit, plus généralement, dès lors qu'on choisit de « s'inscrire » dans une théorie (en un sens qui resterait à préciser), repère-t-on des axiomes (ou des propriétés) qui éventuellement ne seraient pas enseignés, c'est à dire qui ne correspondraient à aucune tâche ou technologie habituellement enseignées ? Qu'apporterait leur enseignement ?

- Quelques commentaires à propos de ces théories :

De nos différentes théories, seules Rouche-Rationnels, Whitney-Réels et Lebesgue-Réels construisent des nombres non entiers. Par des procédés différents et avec des éléments de base différents (à partir de niveaux différents, donc), Lebesgue et Whitney construisent une espèce de grandeur qui est isomorphe à une demi-droite vectorielle sur R_+.[37]

Pour notre étude, la théorie de la mesure de Lebesgue est aux antipodes de ces trois théories. C'est une théorie très savante dans laquelle la mesure d'un ensemble est un point de départ pour mesurer d'autres choses. Nous ne nous attarderons pas davantage sur elle.

- Tableau récapitulatif

Ci-après un tableau récapitulatif des caractéristiques que nous avons identifiées pour les théories. Il reprend des éléments de notre revue d'idées et de nos questions. Pour chaque théorie, nous indiquons dans la partie gauche les éléments pré-construits (les axiomes et outils nécessaires), dans les colonnes du milieu ce qu'on construit dans la théorie. La colonne « ensemble de grandeurs » donne un type d'ensemble auquel l'ensemble de grandeurs est isomorphe. Pour plus de lisibilité, la proportionnalité est traitée globalement, à droite.

---

[37] C'est un peu délicat d'écrire cela pour Lebesgue-Réels qui rejette les grandeurs, il nous semble cependant que c'est nécessaire pour pouvoir mettre les théories en vis à vis.

- Conclusion

Il semble important de noter que toutes les théories des grandeurs que nous avons rencontrées répondent à des besoins particuliers. Les besoins de l'école primaire sont spécifiques. Il existe plusieurs théories des grandeurs. Faut-il en choisir une pour étudier toute l'arithmétique ? Faut-il en choisir des différentes pour étudier différents objets ? Faut-il qu'elles puissent s'emboîter ? Laquelle ou lesquelles faut-il choisir ?

Faut-il en construire une adaptée aux besoins de l'école primaire seulement ou penser l'articulation avec la suite de la scolarité ?

Pour répondre à ces questions il faut au minimum savoir ce qu'on veut faire avec les grandeurs. Les réponses à ces questions ne relèvent d'ailleurs pas, selon nous, de la compétence des enseignants. À une époque récente, on n'a manifestement peu considéré la question de l'articulation entre les théories sous-jacentes. Même si c'est involontaire, les choix des programmes actuels semblent s'accorder avec une théorie qui construise les rationnels et qui ne multiplie pas les grandeurs entre elles. Une étude des programmes anciens laisse penser que ce n'est pas la seule possibilité.

À travers l'exemple de la multiplication notamment, on voit qu'on n'est pas nécessairement dans une théorie unique, qu'il pourrait être souhaitable que des théories puissent être emboîtées. Par ailleurs, sur le plan de l'enseignement, il n'est sans doute pas nécessaire d'avoir terminé la construction d'une théorie (c'est-à-dire en avoir étudié toutes les subtilités) pour s'engager dans la construction (ou l'utilisation) d'une autre qui s'emboîterait avec la première, notre projet serait justement de penser quelles articulations semblent mathématiquement raisonnables et lesquelles ne le semblent pas entre plusieurs objets d'enseignement.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Théorie	Niveaux pré-existants : Elément, Objet, Grandeur			Caractérisation de la mesurabilité	(Vers) le continu ?	Archimède et / ou complétude	Nombres présupposés	Niveaux construits : - Grandeurs - Mesure (ensemble de nombres associé)		Nombres et opérations construits	Multiplication	Ensemble de grandeur (du type)	Proportionnalité		
													entre	caractérisation	propriété
Rouche		O		$+\uparrow$	: n	non	N	G (~O)	MQ	Q_+	Externe	$\cup Q_+[u]$	2 ensembles d'objets	+ Linéarité	$Q_+ \times$ linéarité
Whitney-Réels			G	$+\uparrow$	petits éléments	Archimède	Q_+	coupures de G	MR	R_+	Externe	dense dans R_+, puis R_+	non		
Lebesgue-Réels	E	O			: 10 (Thalès)	Archimède, continuité	N		MR	D_+, R_+	Externe	R_+	non		
Whitney-Produits			G	Fonction mesure		$R_+[u]$	R	produits de G	MR	sans objet	Interne	R_+^n	2 espèces de grandeur	$R_+ \times$ Linéarité	coefficient non numérique
Lebesgue-Grandeurs		O		Fonction mesure	petits éléments	?	R			sans objet	non	dense dans R_+	2 fonctions à valeurs dans R_+	constantes sur les classes pour la mesure	sont multiples l'une de l'autre
Bourbaki-Grandeurs 1			G	+ & > compatibles	petits éléments	Archimède	R		MR	sans objet	non	dense dans intervalle de R_+	non		
Bourbaki-Grandeurs 2			G	+ & > compatibles, $+\uparrow$	petits éléments	borne supérieure	R		MR	sans objet	non	intervalle de R_+	non		
Perrin-Grandeurs		O	G	$+\uparrow$ (sur G)	: n	Archimède et borne supérieure	R		MR	sans objet	non	R_+	2 fonctions mesure de la même grandeur		sont multiples l'une de l'autre
Lebesgue-Mesure	E	O		Fonction mesure			R			sans objet	non	sans objet	non		
Bahujama-Mesurage		O		+ & > compatibles	non	Archimède	N	G (~O)	MN	aucun	Externe	$\cup N[u]$	non		
Notions communes		O		$+\uparrow$	: 2					non			non		
Rapports			G		: n	Archimède	N	G		rapport			2 espèces de grandeur		

Dans toutes les théories, on a une addition, sur les objets s'il en existe, sur les grandeurs à défaut. On a aussi un ordre : soit c'est une propriété de l'ensemble d'objets ou de grandeurs, soit il découle de l'existence *a priori* de la fonction mesure (niveau M présupposé).

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

5. Conclusions du chapitre

Nous avons commencé par une étude du programme de 1970 en mettant en évidence d'une part comment le continu et le discret sont séparés par les naissances simultanées des domaines mesure et numérique, d'autre part comment le niveau grandeur est évacué ce qui élimine toute praxéologie incluant le niveau grandeur.

Les évolutions des programmes depuis 1980 qui incorporent les modifications de la strate théorique du didactique préconisée depuis 1970 avec la « construction de leurs savoirs par les élèves » montrent des réintroductions locales et répétées des grandeurs et du continu. Il nous semble que les légitimations des grandeurs sont alors principalement de deux types : par la physique pour le domaine mesure en 1980, par l'organisation didactique pour la plupart des autres réintroductions. Ce phénomène semble provoquer un « grand écart » entre les niveaux types de tâches, techniques et technologies et le savoir savant dans certains cas : les tâches ou les technologies font appel à des éléments qui n'existent pas dans le savoir savant de référence. Nous pensons avoir montré qu'on peut en fait réinterpréter les trois premiers niveaux (T, τ, θ) dans une autre théorie. On fabrique ainsi une nouvelle praxéologie qui rapproche les types de tâches et le niveau théorique. Cette théorie est une théorie des grandeurs. Ceci signifie que les « choses » repérées dans les tâches et les technologies qui n'existaient pas dans le savoir savant de référence existent en fait dans la « nouvelle » théorie. Néanmoins ce n'est pas parce que cette théorie est une théorie des grandeurs qu'elle interdit les traitements numériques, ils sont simplement fondés théoriquement par les grandeurs. De façon générale, une théorie des grandeurs qui construit les nombres autorise plusieurs niveaux de traitement d'un type de tâches : avec les grandeurs, les nombres, voire les objets. Ceci permet d'ailleurs d'envisager une approche peut-être plus précoce et surtout moins formelle de certains objets mathématiques.

Nous pensons aussi avoir montré qu'il est possible que le programme de 1945 ait été le produit (partiel) de la transposition de La mesure des grandeurs pour le primaire et le secondaire et que certaines interprétations des positions de Lebesgue quant aux grandeurs sont peut-être le reflet de questions épistémologiques complexes. Ces éléments sont à approfondir.

Enfin, nous avons tenté d'ébaucher des conditions pour un savoir savant de référence de type « mathématiquement correct » mais adapté aux besoins de l'école primaire pour l'étude des nombres et des grandeurs. Ceci est passé d'abord par une tentative de clarification de la diversité des théories des grandeurs, au niveau de certaines des théories existantes, ensuite par l'énoncé de besoins didactiques pour l'étude des grandeurs et des nombres. Il nous semble que ce travail permet de poser des questions pour envisager des choix possibles pour une meilleure adéquation entre les savoirs savants de référence pour l'enseignement et les praxéologies mathématiques enseignées, il permet aussi de reconsidérer des choix qui ont déjà été effectués.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Chapitre 3. Relations entre grandeurs, nombres et opérations dans des manuels anciens

Dans ce chapitre, nous affinons l'étude entamée dans le chapitre précédent pour ce qui concerne l'enseignement antérieur à la réforme des mathématiques modernes. Nous nous appuyons en outre sur le résultat de notre DEA qui mettait en évidence la volonté des programmes et instructions de 1923 d'articuler étude du système métrique et étude des nombres, tant entiers que décimaux. Ce résultat laisse penser qu'à une certaine période au moins, il a pu exister une relative harmonie entre grandeurs et nombres, grandeurs et opérations, en particulier entre le système métrique et la numération de position. Nous tentons de la caractériser. Nous utilisons des manuels scolaires. Nous nous plaçons au cours élémentaire car c'est apparemment là que commence à se structurer l'étude de la numération des entiers (quelle que soit l'époque). En fait nous recherchons des praxéologies régionales ou globales. C'est d'abord les rapports entre le système métrique et la numération de position des entiers qui nous préoccupent, c'est ensuite l'étude du sens des opérations sur ces nombres, notamment dans ses rapports avec les grandeurs. On peut voir ce chapitre comme l'exploration d'un champ de possibles pour l'enseignement actuel. Ce projet nous semble légitime dans la mesure où malgré des variations dans les niveaux d'enseignement, les objets que nous étudions ont une relative permanence dans les mathématiques enseignées au fil du temps à l'école primaire. Repérer, dans l'enseignement ancien, des conditions pour articuler plusieurs objets d'enseignement nous semble donc être un moyen pour étudier l'enseignement actuel dont on peut penser, au vu des programmes par exemple, qu'il ne privilégie pas l'articulation entre le système métrique et la numération de position des entiers. La caractérisation permet peut-être en repérant les niches qu'occupent les références à la « vie courante » dans les praxéologies du système métrique de déplacer certaines questions relatives à leur obsolescence qui serait une entrave à l'enseignement actuel des grandeurs.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

1. Introduction

1.1. Questions

L'intention de ce chapitre est de mieux comprendre l'écologie des grandeurs dans l'enseignement antérieur à la réforme. En effet, depuis le début de l'école obligatoire on peut supposer que c'est une (ou plusieurs) théorie des grandeurs qui pilote toute l'arithmétique. Néanmoins cette arithmétique n'est pas nécessairement organisée en une praxéologie globale. On a *a priori* différents domaines, par exemple la numération de position, le système métrique, les techniques opératoires, le sens des opérations, etc. Nous nous limitons aux nombres entiers et nous circonscrivons notre domaine d'étude aux tâches relevant de l'étude des nombres, des quatre opérations et des grandeurs qui impliquent ces nombres ou qui, éventuellement, n'impliquent pas de nombre.

Au niveau du savoir savant, on peut penser que jusqu'en 1930 on n'a pas de modification de ce savoir puisqu'on a d'une part une grande stabilité des technologies pour les opérations et les nombres entiers (Harlé, 1984), d'autre part à partir de 1931 le livre de Lebesgue, La mesure des grandeurs, vient déstabiliser l'édifice (Neyret, 1995). Pour les opérations, nous faisons l'hypothèse d'une stabilité au niveau du savoir savant jusqu'en 1938, époque à laquelle on introduit au cours supérieur, dans les instructions, des grandeurs quotients pour résoudre les problèmes du champ multiplicatif. Dans la mesure où nous nous limitons aux nombres entiers, nous pensons que nous ne rencontrerons pas de tâches d'étude de la proportionnalité qui impliquerait la théorie des rapports du Livre V d'Euclide dont il est connu qu'elle a pu être mobilisée, à certains niveaux d'enseignement au moins (Hersant, 2005). D'ailleurs Neyret précise qu'une des motivations du traité de Reynaud est de rendre plus cohérent le traité de Bezout pour accroître la légitimité de l'arithmétique face à la montée de l'algèbre pour la résolution des problèmes de proportionnalité, en particulier. Dans le traité, la théorie des rapports et des proportions n'apparaît que dans un deuxième temps pour élargir les notions vues auparavant avec les méthodes de réduction à l'unité (p. 77-78).

On voit naître dans les programmes et instructions de 1923 une articulation entre la numération et le système métrique, elle semble perdurer malgré des modifications dans ceux de 1945. Que signifie « concrètement » l'articulation entre les grandeurs et les nombres ? Cette question se présente aussi pour nous du point de vue de l'étude des grandeurs et des opérations même si nous n'avons pas repéré qu'elle soit évoquée dans les instructions. Existe-t-il une certaine articulation entre étude des grandeurs et des opérations ?

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

S'il est admis qu'autrefois l'enseignement des grandeurs comporte de nombreuses références à des pratiques de la vie courante, quelle est leur place dans les différents domaines et dans les articulations éventuelles ? Peut-on repérer s'il s'agit d'enseigner des pratiques de la vie courante, pour elles-mêmes, au sein de différents domaines ? S'agit-il, au contraire, de prendre appui sur ces pratiques pour conduire d'autres apprentissages, plus conceptuels ?

1.2. Méthodologie

Pour étudier ces questions notre corpus de données est constitué par des manuels scolaires. Nous donnons d'abord des éléments généraux relatifs au choix des niveaux scolaires étudiés, les deux années du cours élémentaire, à la différenciation des deux années du CE dans les manuels, au choix des manuels, puis nous donnons une liste des manuels que nous avons étudiés.

▪ Choix du niveau

C'est l'articulation entre les grandeurs et les nombres entiers, les grandeurs et les opérations sur les entiers que nous cherchons à caractériser. Aussi, choisissons-nous le niveau qui semble le plus approprié pour étudier cette question. D'après les programmes, depuis le début de l'école obligatoire et jusqu'en 1970, au cours préparatoire (CP) ou en classe enfantine, on apprend les nombres jusqu'à 100 (premiers éléments de la numération et opérations sur les nombres ne dépassant pas la première centaine en 1882) ; au cours élémentaire (CE) se structure l'apprentissage des nombres entiers (si ce sont seulement les opérations sur les entiers qui sont prescrites en 1882, il n'est pas très clair qu'une étude des nombres décimaux est exclue : « Principes de la numération parlée et de la numération écrite ») ; le cours moyen (CM) prend la suite avec les fractions et les décimaux.

La programmation de l'apprentissage du système métrique est moins stable. Si, avant 1923, on a appris le mètre, le gramme et le litre en classe enfantine ou CP et tout le système des unités simples (multiples et sous-multiples du mètre, litre et gramme) au CE ; de 1923 à 1945, le continu est introduit au CE seulement avec l'apprentissage des multiples des unités simples. En 1945, les centimètres et décimètres apparaissent au CP, le CE restreint l'étude aux unités usuelles, mais indique qu'on apprendra aux élèves le sens général des préfixes.

En fonction de ces éléments, il semble pertinent, pour étudier les questions qui impliquent la numération de position des entiers, d'étudier les manuels au cours élémentaire.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

▪ Différenciation entre la première et la deuxième année du cours élémentaire dans les manuels

Depuis toujours, les programmes de l'école primaire obligatoire sont publiés par cours (ou cycle). Les premières indications officielles de répartition par niveau que nous avons repérées sont relatives aux programmes de 1980. Notre intention est de repérer les progressions pour l'étude de certaines notions. Aussi, quand nous en avons eu la possibilité nous avons choisi de prendre, au sein d'une collection donnée, les manuels qui différenciaient le plus les niveaux. Par exemple la collection Vassort (cf. infra) existe pour chaque niveau du primaire mais propose aussi un manuel unique « cours élémentaire et cours moyen », nous avons retenu les manuels par niveau. Nous avons en fait exclu les livres mixtes « cours élémentaire et cours moyen ». Il a pu aussi arriver que des manuels intitulés « cours élémentaire » soient en fait conçus pour la deuxième année du cours élémentaire et que nous n'ayons pas eu connaissance d'une édition pour la première année.

Nous avons voulu caractériser la différenciation entre les deux niveaux. Dans certains manuels, on ne voit pas de différenciation. Ceci laisse planer une incertitude encore plus grande sur les progressions effectivement mises en oeuvre. Toutefois, c'est aussi très certainement le reflet des conditions d'enseignement : classes à niveaux multiples omniprésentes, coût des manuels (Harlé, 1984). Nous avons identifié quatre types de manuels en fonction de la façon dont ils traitent les deux niveaux :

1) un manuel unique, sans différenciation visible,
2) un manuel unique avec des leçons communes aux deux niveaux et une différenciation partielle des exercices selon le niveau,
3) un manuel unique pour les deux niveaux avec des parties nettement indépendantes pour le CE1 et le CE2,
4) un manuel par niveau.

Signalons que les leçons de géométrie sont nettement moins différenciées que les autres : on peut avoir un manuel de type 3 pour l'arithmétique et de type 1 ou 2 pour la géométrie. Nous nous intéressons à l'arithmétique. Nous avons des manuels de type 4 à partir de 1945 uniquement, mais il existe des manuels de type 3 dès 1923, voire avant. On continue à trouver le type 2 jusqu'en 1960, au moins.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

- Choix des manuels

Nous avons voulu étudier des livres qui ont eu une certaine longévité dans l'édition scolaire. Pour ce faire, nous avons utilisé le catalogue de la BNF et repéré des manuels qui ont eu plusieurs éditions.

Signalons quelques particularités de certains manuels. Un de nos manuels de type 1 (Châtelet 1932) indique qu'on peut voir entièrement le manuel en première année, puis approfondir l'ensemble l'année suivante, ou bien n'étudier que les quatre premiers mois (jusqu'à fin janvier) la première année et, après une révision rapide, étudier les quatre derniers mois l'année suivante. Nous avons considéré qu'il s'agissait d'un manuel de type 3 : le CE1 d'octobre à janvier, le CE2 de février à juin.

Pour le manuel Mortreux nous avons travaillé avec un manuel de l'élève (1930) et un manuel pour le maître (sans date, avec une référence au programme de 1889). *A priori* le manuel est de type 1. Les éditions du livre du maître et de l'élève (que nous distinguons si nécessaire par ldm et lde), bien que n'étant pas relatives au même programme, présentent des différences apparemment mineures. Le livre du maître reprend intégralement celui de l'élève mais on y trouve toutefois des indications qui ne sont pas dans celui de l'élève : une répartition annuelle pour chaque niveau (nous considérons à cause de cela qu'il constitue un manuel de type 3), les réponses aux exercices avec des indications de solutions qu'on peut interpréter comme des techniques ou des technologies.

Nous appelons « collection », un ensemble pour le cours élémentaire. C'est-à-dire soit :

- un manuel « cours élémentaire » de type 1 qui ne différencie pas les deux niveaux ou de type 2 qui différencie partiellement les exercices mais pas les leçons (on suppose qu'on fait l'ensemble des leçons chacune des deux années),
- un manuel « cours élémentaire » avec deux parties distinctes : une pour le CE1, l'autre pour le CE2 (type 3) ou deux manuels : un pour le CE1, un pour le CE2 (type 4).

Voici comment se répartissent les treize collections que nous avons étudiées par rapport aux types identifiés :

- une collection de type 1 et quatre de type 2,
- cinq collections de type 3,
- trois collections de type 4 (les plus récentes).

Nous considérons donc que nous avons étudié : huit manuels de CE1, huit manuels de CE2 et cinq manuels de CE.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Nous donnons une liste de nos manuels dans le tableau qui suit, par ordre d'ancienneté (publication présumée de la première édition.). Certains manuels sont accompagnés de remarques.

Auteur (abréviation dans le texte)	Titre	édition consultée Editeur	Éd. repérées dans le catalogue de la bnf	type	remarques
V. Brouet, F. et A. Haudricourt (Brouet)	Leçons et devoirs d'arithmétique et de système métrique	1905 Ancienne maison Quantin	1893 (seulement), jusqu'en 1923 pour le CM	2	
A. Minet et L. Patin (Minet CE1) (Minet CE2)	Cours pratique d'arithmétique, de système métrique et de géométrie. CE 1re et 2e année. Nouvelle édition mise en rapport avec les prix actuels.	1923. 731e mille. Nathan	1906 à 1935 (revue par Lefèvre)	3	Le manuel est partagé en deux parties (pages en vis à vis) : l'une pour le CE1, l'autre pour le CE2.
X. et O. Mortreux (Mortreux CE1) (Mortreux CE2)	Arithmétique pratique et raisonnée. Cours élémentaire. Livre du maître.	sd, référence au programme de 1889. Belin	1908 à 1948	3	Le livre du maître propose une répartition annuelle pour chaque niveau et des « solutions » en plus des réponses.
X. et O. Mortreux	Arithmétique pratique et raisonnée. Cours élémentaire. Livre de l'élève	1930 Belin	1908 à 1948 Nouvelle arithmétique à partir de 1925	3	
Ch. Clap et P. Milliard (Clap)	Arithmétique. Système métrique. Géométrie. Calcul mental. Cours élémentaire.	21e édition. 1934. Delalain	1934	1	Le catalogue de la BNF mentionne uniquement notre édition pour le CE, et une édition de 1926 pour le CM. Nous considérons que la première édition est antérieure à 1930
G. Boucheny, A. Guérinet (Boucheny)	L'arithmétique au cours élémentaire	Impr. en 1939. 260e mille. Éd. 1930	1931. Nouvelle édition en 1950.	2	
A. Châtelet avec la coll. de G. Condevaux et L. Blanquet (Châtelet 1932 CE1) (Châtelet 1932 CE2)	Arithmétique. CE (1re et 2e années)	1932 Bourrelier - Chimènes	1932 à 1947. En 1947, programmes de 1945	3	
G. Condevaux (Châtelet 1952)	J'apprends à calculer. Arithmétique. CE	1952 Bourrelier	1951 à 1964	2	Châtelet n'apparaît pas comme auteur dans cette édition. A partir de 1959, la BN indique cours de A. Châtelet et G. Condevaux

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Auteur (abréviation dans le texte)	Titre	édition consultée Editeur	Éd. repérées dans le catalogue de la bnf	type	remarques
J. Dumarqué L. Renaud (Dumarqué)	Arithmétique. CE	1934	1934. En 1951, Le Calcul au cours élémentaire	2	
A. Marijon, R. Masseron, E. Delaunay (Marijon 1947 CE1) (Marijon 1947 CE2)	Cours d'arithmétique. Le calcul à l'école primaire. CE	1947. 3e éd. (dl : 1947. dl antérieur : 1938) Hatier	1939	3	Le manuel comporte trois parties : arithmétique 1e année, 2e année et géométrie
A. Marijon, R. Masseron, E. Delaunay (Marijon 1957 CE1) (Marijon 1957 CE2)	Cours d'arithmétique. Le calcul de 7 à 9 ans.	1957	1953 à 1954	3	Le manuel comporte trois parties : arithmétique 1e année, 2e année et géométrie
L. et M. Vassort (Vassort CE1)	Le calcul vivant. CE1	1949 Hachette	1949 à 1963. Le nouveau calcul vivant à partir de 1960	4	
L. et M. Vassort (Vassort CE2)	Le calcul vivant. CE	Impr. en 1950 Hachette	1950 à 1963.	4	On indique dans la préface que ce manuel convient pour le CE2.
M. Picard, R. Renucci (Bodard CE1)	Le calcul quotidien. CE1	Impr. en 1957 Nathan	1957 à 1978.	4	Collection Bodard et Conti
M. Picard, R. Renucci (Bodard CE2)	Le calcul quotidien. CE2	Impr. en 1966 (éd. 1957) Nathan	1957 à 1978.	4	Collection Bodard
H. Denise, O. Rosier (Denise CE1)	Calcul. CE1	1969 Delagrave	1962	4	En 1969, les deux niveaux comportent « un petit complément de mathématique moderne »
H. Denise, O. Rosier (Denise CE2)	Calcul. CE2	1969 (152e mille) Delagrave	1962	4	

Pour des raisons matérielles, pour la partie relative au sens des opérations nous n'avons pas étudié Brouet, ni Denise. En revanche, nous avons ajouté des extraits d'un manuel mixte pour le cours élémentaire et moyen :

L. et M. Vassort (Vassort CECM)	Le calcul vivant. Cours élémentaire et moyen	1952 Hachette		1	Établi en tenant compte des programmes du CE2 et du CM1

1.3. Plan

Comme nos objets sont assez gros et que nous voulons étudier les relations entre eux, l'étude des sommaires des manuels est susceptible de constituer une première indication. Nous tentons d'abord de comprendre l'articulation entre enseignement du système métrique et numération. Nous conduisons une étude de sommaires pour une longue période qui s'étend du début du 20ème siècle aux années 60. Nous affinons cette première étude en tentant de mettre à jour le rapport institutionnel au système métrique pour le cours élémentaire dans la période où l'articulation est *a priori* la plus forte : des années 30 aux années 60 et nous essayons, à l'aide de connaissances didactiques actuelles, d'élucider l'apport de l'étude du système métrique dans celle de la numération de position. Ensuite, nous terminons par une étude assez globale fondée sur des sommaires de manuels et l'étude de quelques leçons, pour mieux comprendre l'écologie de l'étude du sens des opérations et ses relations avec les grandeurs.

Les sommaires des manuels utilisés sont en annexe.

2. Articulation entre numération et système métrique : étude globale

2.1. Problématique et méthodologie

Notre étude des programmes (Chambris, 2004) montre qu'à partir de 1923 on prescrit des études imbriquées de la numération et du système métrique, alors qu'auparavant ce dernier apparaît comme un chapitre de l'arithmétique (ou de la géométrie) distinct de la numération. Précisons quelques éléments :

- avant 1923, on ne repère pas d'incitation à articuler l'étude des nombres et celle du système métrique et dès le CE on prescrit une étude des multiples et sous-multiples des unités mères (g, m, l),
- entre 1923 et 1945, il s'agit de faire marcher en parallèle l'étude des nombres et celle du système métrique, en se référant aux gramme, mètre et litre comme unités. Au CE, on se cantonne aux multiples de ces unités et aux nombres entiers :

> « Il faut signaler (pour le cours élémentaire) une intention qui se manifeste dès la première ligne : "*Numération décimale, le mètre, le gramme...*". Quand on donnera en classe le principe de la numération décimale, après l'exemple des nombres ordinaires (dix unités valent une dizaine), on ajoutera aussi, sans retard, les exemples tout à fait pareils : dix mètres valent un décamètre, dix grammes valent un décagramme. Ainsi le système légal des mesures, système décimal, appuiera la leçon sur la numération. » (Instructions de 1923)

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

- dès 1938, des incitations apparaissent dans les commentaires des programmes du cours supérieur pour infléchir l'étude aux niveaux inférieurs et prendre en compte les unités usuelles, en particulier le centimètre. En 1945 (dès 1941, en fait), on entérine cette incitation puisqu'on prescrit l'étude du centimètre et du décimètre dès le CP pour la numération mais on indique qu'au CE, où une liste d'unités usuelles est proposée, on apprendra aux élèves le sens général des préfixes et qu'on pourra leur montrer les unités du compendium métrique. On retrouve donc les sous-multiples supprimés en 1923 et on insiste sur les unités usuelles.

L'étude des unités métriques peut-elle contribuer à l'apprentissage de la numération de position des entiers ? Quelle est la place des pratiques de la vie courante dans cette étude, en particulier celle du mesurage ? Comment l'étude du système métrique et son articulation avec l'étude des nombres sont-elles organisées ? Perçoit-on des variations importantes selon les époques ?

Notre premier matériau est constitué par les sommaires des manuels, nous cherchons à y prélever des indices de l'articulation entre les grandeurs[38] et les nombres dans les titres des leçons et dans l'ordre dans lequel elles sont présentées. Un indice important de l'articulation se voit dans les sommaires, il s'agit du domaine numérique atteint au moment où une leçon de système métrique se déroule.

2.2. Les titres des leçons

Il y a plusieurs sortes de titres pour les leçons de système métrique. Souvent, à une unité correspond une leçon, c'est en général le cas pour les leçons sur les multiples du mètre et du litre. On trouve aussi des leçons avec un groupe d'unités : en particulier toutes les unités multiples du gramme sont étudiées dans la même leçon chez Clap et Boucheny. On trouve quelques leçons avec des couplages de deux grandeurs différentes, par exemple : <u>Le kilogramme. Le kilomètre</u>. (Bodard CE1).

Dans certains manuels, les titres des leçons sur le système métrique sont indicateurs de la présence de numération. Nous avons relevé, du plus significatif au moins significatif :

---

[38] Selon les manuels, selon les époques, voire selon la place dans la progression au sein d'un manuel donné, l'étude de la monnaie peut avoir plusieurs statuts : il peut s'agir, pour le dire vite, de faire des sommes avec des pièces et des billets ou bien d'étudier les valeurs des pièces en fonction de la valeur du métal qui les constitue et de leur poids. Ce sont alors les relations de proportionnalité qui sont en jeu. Nous n'examinons pas ce deuxième type de leçons.

1) des leçons au titre mixte entre grandeur et numération, par exemple, la centaine de mètres : l'hectomètre (Vassort CE2),
2) des leçons intitulées : numération des … (longueurs par exemple),
3) des leçons au titre mixte entre deux grandeurs, par exemple, Le kilogramme. Le kilomètre
4) des leçons de révision (ou de synthèse) intitulées : mesures des longueurs ou encore système métrique,
5) leçons sur les préfixes : déca, hecto, kilo ou déci, centi, milli

Signalons que les leçons de type 3 sont manifestement relatives à plusieurs grandeurs, de même celles au titre génériques, sur les préfixes.

Les leçons de type 2, 4 et 5 sont des leçons de synthèse sur le système métrique, celles-ci n'en constituent donc pas la découverte. Notre manuel très ancien (Brouet) constitue une exception : on commence par une leçon générale sur les préfixes du système métrique, puis on trouve une leçon sur chaque grandeur, « mesures de… » avec notamment la liste des unités multiples et sous-multiples.

Dans quelques manuels on a des leçons aux titres un peu énigmatiques qui évoquent des grandeurs, par exemple « l'arpenteur mesure la longueur d'un champ » (Marijon 1947), nous avons étudié ces leçons pour voir si certaines unités métriques y sont étudiées. De même avons-nous consulté les leçons de numération. En effet, certaines leçons de numération dont le titre n'évoque que la numération sont en fait des leçons mixtes entre grandeurs et numération, notamment avec la monnaie, par exemple dans « centaines et unités », Marijon (CE1 1947) présente la centaine à partir de la centaine de francs.

Signalons qu'après la réforme des mathématiques modernes, on verra beaucoup de leçons sur l'étude des grandeurs intitulées mesure des longueurs où il sera peu question de l'étude des unités métriques.

Après ces premiers éléments, nous cherchons d'autres indices relatifs à l'articulation entre les deux domaines.

2.3. Les domaines numériques et l'ordre des leçons

Un indice important de l'articulation entre système métrique et numération est l'ordre des leçons. Aussi, pour chaque leçon qui étudie les grandeurs, relevons-nous le domaine numérique atteint au moment où elle se déroule. C'est un indice partiel : une leçon peut ne pas

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

mobiliser tout le domaine numérique disponible. Elle peut aussi mobiliser un domaine numérique qui n'a pas encore été étudié, ce peut alors être le signe d'une certaine désarticulation de l'étude des nombres et du système métrique ou parfois, dans des cas très spécifiques, le moyen d'agrandir le domaine numérique disponible et donc d'une forte articulation.

Certains de nos manuels proposent une étude des décimaux, nous n'y ferons pas référence.[39]

- Les manuels édités à partir de 1930

Nous avons étudié neuf collections pour la période ultérieure à 1930 (celles qui sont postérieures à Boucheny inclus). On repère, dès l'étude du sommaire, une dialectique entre système métrique et numération. Dans le tableau ci-après, nous indiquons l'articulation entre la numération et le *système d'unités* fondé sur une unité donnée.

Nous entendons par « système d'unités fondé sur une unité » un ensemble d'unités consécutives du système métrique multiples de cette unité. Nous disons par exemple que le franc et le centime fondent des systèmes différents car on peut avoir : le centime, la dizaine de centimes, le franc (ou centaine de centimes), comme premier système ; et le franc, la dizaine de francs, la centaine de francs comme deuxième système (Denise, CE1). Denise CE1 ne dit pas que la dizaine de francs est le millier de centimes, mais il n'étudie les nombres que jusqu'à mille et seuls le kilogramme et le kilomètre sont envisagés au CE1 comme unité millier. Ce ne sera pas le cas du CE2 où après des études séparées du franc et du centime d'une part, du mètre et du centimètre d'autre part, on dira que la dizaine de mètres est un millier de centimètres et la dizaine de francs un millier de centimes (ce qui aussi se voir comme une nécessité avec le nouveau franc mis en circulation en 1960).

Ci-après nous donnons le relevé pour l'articulation entre numération et systèmes d'unités.

système	Boucheny	Châtelet 1932	Marijon 1947 CE1	Marijon 1947 CE2	Dumarqué	Vassort CE1	Vassort CE2	Marijon 1957 CE1	Marijon 1957 CE2	Bodard CE1	Bodard CE2	Châtelet 1952	Denise 1969 CE1	Denise 1969 CE2
mètre	1		1		1		1	1		1	*	1	1	1
gramme			1			*	1	1		1	*	1	1	0,5
litre	1		1			*	1	1		1	*	1	1	1
cm		1				*							1	1
franc		1	1			1		1		1			1	0,5
centime													1	1

[39] Il s'agit de nos six manuels les plus anciens. Dans les moins récents, cette étude prend la suite de celle des entiers. Dans les deux autres, il s'agit d'une partie nettement distincte en fin de manuel : des compléments pour le cours moyen première année qui incluent les décimaux.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Les codes 1, * et 0, 5 correspondent aux éléments suivants.

1 : On observe une articulation entre le système d'unités fondé sur l'unité indiquée et la numération.

* : l'unité est étudiée en lien avec la numération, mais il peut y avoir des trous dans le système. Par exemple Vassort CE1 étudie le centimètre avec les unités, la centaine de centimètres avec les centaines mais n'étudie pas le décimètre. De même Bodard au CE2 n'étudie que les unités usuelles du programme de 1945, en parallèle avec la numération néanmoins.

0,5 : avec l'étude d'une unité dans une tranche particulière de la numération on fait un récapitulatif des ordres précédents. Par exemple, Denise (CE2) introduit le gramme, en même temps que l'hectogramme et le décagramme et au moment de l'étude des centaines. Le gramme a déjà été étudié au CE1. Le kilogramme est étudié plus tard pendant l'étude des milliers.

Le fait qu'une grandeur n'apparaisse pas dans la liste n'exclut pas qu'on travaille la numération avec elle. Ceci signifie que son étude n'est pas intégrée à la progression en numération. En particulier nous n'avons pas étudié en détail la tonne qui peut être soit considérée comme le millier de kilogrammes, soit comme le million de grammes.

Ainsi, pour toutes les collections, cette seule étude révèle qu'il existe une très forte imbrication entre l'étude de la numération et celle du système métrique. Ils proposent, tous, **en parallèle** avec l'étude des nombres entiers (unité, dizaine, centaine, éventuellement millier), pour au moins un des deux niveaux du cours élémentaire, un groupe de leçons sur le système métrique qui conduit à la connaissance **d'un système décimal d'unités métriques** (unité, dizaine, centaine, éventuellement millier) relatif à la mesure d'une grandeur particulière, pour une unité particulière. Nous appelons *entrelacement* ce moyen de faire marcher ensemble numération et système métrique.

Derrière cette unanimité se cachent des progressions relativement diverses. La longueur est toujours retenue comme grandeur d'au moins un des systèmes élaborés. C'est alors le mètre qui constitue l'unité de référence sauf dans Châtelet 1932 où c'est le centimètre.

La programmation de Boucheny est typique de l'entrelacement :

- les nombres de 1 à 9, le mètre, le litre ;
- les nombres de 1 à 99, le décamètre, le décalitre ;
- les nombres de 1 à 999, l'hectomètre, l'hectolitre ;

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

- les nombres de 1 à 9999, le kilomètre.

Selon les manuels ce sont en fait de un à six systèmes d'unités qui sont étudiés en parallèle à la numération (le mètre : 8/9, le gramme : 6/9, le litre : 7/9, le franc : 5/9, le cm : 2/9, le centime : 1/9). Les multiples des unités mères qui ne sont pas étudiées à ce moment là le sont ultérieurement, en une ou plusieurs leçons. Dumarqué constitue une petite exception dans la mesure où il n'étudie qu'un système d'unités (fondé sur le mètre) en parallèle avec la numération, mais qu'il reprend ensuite juste après l'étude des nombres de 5 chiffres, l'étude des multiples du gramme unité par unité, puis après celle des nombres de 6 chiffres l'étude des multiples du litre unité par unité.

Pour un ordre donné, les leçons sur le continu interviennent en général juste après celles sur les nombres. Apparemment, Châtelet 1932 est le seul qui introduise certaines puissances de dix par le continu. Il étudie les nombres jusqu'à 100, puis on trouve longueurs de 100 à 1000 centimètres, la leçon suivante étant nombres de 100 à 1000.

Le cas du centimètre est intéressant. De 1923 à 1945, les auteurs de manuels sont probablement confrontés aux problèmes suivants : comment prendre en compte la réalité d'un enfant de moins de dix ans quand la longueur ne peut être évoquée qu'avec des unités plus grandes que le mètre et donc qu'il faut attendre le cours moyen pour pouvoir parler de centimètres ? comment faire dessiner un rectangle de dimensions imposées sur une page de cahier ? On pourrait certes parler de centimètres sans faire référence au mètre, mais dans ce programme ce sont véritablement le mètre, le gramme et le litre qui fondent la longueur, la masse et la capacité.

Les commentaires de 1938 ébauchent des solutions :

> Les unités théoriques du système métrique sont le **mètre** pour les longueurs, le **gramme** pour les poids (ou les masses), le **litre** pour les capacités, le **franc** pour les monnaies. (…) Mais toutes autres (exception faite des unités de temps et d'angle), en sont actuellement des multiples ou des sous-multiples **décimaux**. D'excellents esprits ont pu dire que ces unités étaient "**les seules**" ; que toute mesure de longueur, poids, capacité, ou monnaie s'exprimait ainsi par un nombre décimal (avec plus ou moins de zéros) ; et que point n'était besoin d'inventer les préfixes savants, déci, centi, hecto, kilo, etc.
>
> Cependant, ce n'est pas à l'école primaire qu'il convient de substituer la théorie, même la plus belle, à l'usage. Cet usage veut qu'il y ait, pour chaque grandeur, diverses unités usuelles. Pour les longueurs, ce sont le **mm** et le **cm** dans l'évaluation des dimensions des dessins, le **m** pour des mesures de bâtiments ou de petites propriétés, le **km** pour les distances. (…)

L'option prise par Châtelet en 1932 apparaît comme assez éloignée du dogme de 1923 ; il fonde l'étude de la numération sur le franc et le centimètre. Elle ne lui est cependant pas étrangère car il construit bien en parallèle un système décimal d'unités et la numération

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

décimale. Dans l'édition de 1952, édition fortement remaniée, ce choix n'est pas maintenu dans cette forme extrême. On trouve en effet pour les nombres de 10 à 20, une leçon mètre et décamètre, puis décimètre et double décimètre qui correspond au couple cm/dm.

En 1934, Dumarqué introduit le centimètre très tôt dans la progression (nombres de 1 à 9). Il n'y a pas de leçon sur le décimètre mais celle sur le mètre, située après les nombres de 1 à 20, énonce la relation de dizaine entre décimètre et centimètre (la relation entre dm et m est implicite, quant à celle de centaine entre mètre et centimètre, elle n'apparaît pas). Marijon 1947 donne une leçon l'écolier mesure ou dessine de petites longueurs après les dizaines et unités. Cette leçon évoque notamment : les unités mm, cm et dm. Elles y sont présentées par couple : mm et cm, dm et cm. La relation de dizaine qui les relie est explicitée (et elle seule).

En fait, à partir de 1932, tous nos manuels de CE1 et CE étudient le centimètre en début d'année. Ils étudient tous, sauf Vassort CE1, juste après ou en même temps, le système réduit cm/dm en parallèle avec la dizaine, mais l'étude de ce système s'arrête apparemment là. Ce sera d'ailleurs une préconisation du programme du CP en 1945 que d'étudier cm / dm en parallèle avec unité / dizaine.

La proposition que nous voyons inaugurée par Châtelet en 1932 apparaît comme une alternative à l'étude, un peu contraignante, des nombres en parallèle avec les unités mères. Elle semble être reprise, sous une forme moins aboutie, ensuite.

Examinons pour finir une éventuelle différenciation entre le CE1 et le CE2. Marijon (1947) différencie les deux niveaux. Au CE2, on trouve en tout et pour tout une leçon de numération, la première leçon de l'année. Elle est intitulée : La numération et les mesures. On trouve une leçon par grandeur juste après et des leçons de synthèse en fin d'année. L'essentiel semble être mis en place au CE1.

Dans les quatre premiers mois de l'année (qui peuvent correspondre au CE1), Châtelet 1932 traite les nombres de 1 à 1000 en fondant sa progression sur le centimètre et le franc. Au mois de février (au CE2, donc), on étudie les préfixes déca / hecto / kilo, puis déci / centi / milli, puis les mille et enfin les nombres de mille à un million. Notre étude des sommaires ne nous a pas permis de mieux caractériser l'articulation de l'étude des grandeurs et des nombres dans ce manuel au CE2.

Notre manuel le plus récent (Denise, 1969) est intéressant. Au CE1, il étudie les systèmes centimes / dizaine de centimes / nouveau franc et cm / dm / m, en parallèle avec la numération. Il entame litre / dal, gramme / dag et mètre / dam avec les dizaines et poursuit

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

avec hl, hg et hm parallèlement aux centaines. Les billets de banque (unités, dizaines et centaines de francs) arrivent avec les centaines. En fin de progression, après les nombres jusqu'à mille, il introduit kg et km. Au CE2, on reprend les trois ordres de la numération avec les centimes et les centimètres ; les systèmes m/dam/hm, g/dag/hg, l/dal/hl pendant l'étude des centaines ; kg, km, quintal et tonne pendant celle des milliers. En parcourant le manuel, on voit notamment que dans les leçons sur les milliers, on relie : milliers de centimètres et décamètres, dizaines de francs et milliers de centimes. Le millimètre et le centilitre introduits en fin d'année présentent les relations de la numération construites sur ces unités jusqu'au millier (le mètre) et à la centaine (le litre) respectivement. Pour la longueur, il n'y a pas d'unité intermédiaire nouvelle, alors que pour la capacité, décilitre et centilitre sont nouveaux.

Les unités usuelles n'apparaissent véritablement que dans les sommaires de deux manuels. Elles y conditionnent d'ailleurs la différenciation CE1/ CE2. Vassort n'étudie que les unités usuelles du programme au CE1 en les mettant en relation avec la numération. Par exemple, le centimètre apparaît avec l'étude des premiers nombres et le mètre après celle de la centaine dans une leçon intitulée la centaine de cm : le mètre. Les systèmes fondés sur mètre, gramme, litre sont exposés au CE2, sans qu'on revienne d'ailleurs sur les centimètres. Le parallélisme est alors complet entre l'étude des trois systèmes et la numération. Bodard effectue exactement le choix inverse. C'est tout le système à partir des unités mères, ainsi que cm / dm qui est exposé au CE1, alors que seules les unités usuelles sont étudiées au CE2 (en relation avec la numération), ajoutons cependant que cinq leçons de synthèse viennent en fin de CE2 : une pour chaque grandeur continue, une pour chaque série de préfixes. Ce sont deux exemples assez opposés d'une prise en compte de l'introduction des unités usuelles dans le programme du cours élémentaire en 1945. Il est assez clair qu'en ne conservant que les unités usuelles citées en 1938, il est difficile de construire un système d'unités.

- Un manuel de la fin du 19ème siècle

Afin de mieux mettre en évidence une éventuelle construction historique, nous remontons brutalement le temps. La programmation de Brouet ne présente pas d'articulation visible. Il étudie les nombres entiers jusqu'aux millions, puis les décimaux. Ce n'est qu'ensuite qu'il propose une étude des notions générales sur le système métrique, puis par grandeur : mesures de longueur, monnaie, capacité, masse, aire et volume.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

- Trois manuels intermédiaires

Considérons maintenant nos trois manuels du début du siècle. Au CE1, Minet étudie les nombres jusqu'à mille. Il introduit une nouvelle grandeur avec chaque nouvelle puissance de dix : la longueur en même temps que les neuf premiers nombres, la capacité en même temps que les dizaines, la masse en même temps que les centaines. Les leçons sur les longueurs n'évoquent que le mètre comme unité, celle sur les capacités, le litre et le décalitre et celle sur les poids, le gramme, le décagramme et l'hectogramme. Cette introduction progressive des grandeurs semble donc être à la fois un moyen de répartir l'étude sur l'année et d'articuler les études du système métrique et de la numération de position. Au CE2, les unités métriques sont étudiées par système complet relatif à une grandeur.

Du point de vue de la répartition de l'étude, Clap étudie le système m/dam/hm/km (une leçon par unité) après les nombres de 1 à 1000 et avant Les mille. Les trois premières unités de longueur sont étudiées en reprenant les trois premières unités de la numération, puis le système métrique s'émancipe avec l'étude des kilomètres en dépassant l'étude des nombres. Ceci signifie que dans l'étude des kilomètres, les élèves vont rencontrer l'ordre des milliers qu'ils n'ont pas étudié en numération et écrire des nombres de 4 ou 5 chiffres. L'étude des autres grandeurs intervient après l'étude des nombres jusqu'aux millions.

Au CE1, Mortreux étudie les unités m, dm, cm (dans cet ordre) dans le même mois que les centaines entières et les nombres jusqu'à 200. Il étudie ensuite les unités dam, hm, km (en deux leçons) dans le même mois que les nombres jusqu'à 500 ou mille (mille marque la limite du domaine numérique travaillé au CE1 chez Mortreux). Il précise pour toutes les grandeurs qu'au CE1 il s'agit d'exercices de mesurage, alors qu'au CE2 c'est le plus souvent de numération et système métrique qu'il s'agit. Les exercices de mesurage et d'estimation, nombreux dans ce manuel, seraient-ils réservés au CE1 tandis que l'articulation avec la numération se ferait au CE2 ?

Chez Clap, comme chez Mortreux, à chaque unité correspond grossièrement une leçon (pas pour la masse chez Clap).

Pour conclure, il nous semble que la programmation des notions ne montre pas d'articulation entre les deux thèmes pour notre manuel de la fin du 19ème siècle, en revanche on voit se dessiner une articulation partielle pour ceux qui sont publiés la première fois au début du siècle. Contrairement à ce qui adviendra à partir de 1923 et jusqu'en 1970 où numération et système métrique seront entrelacés, au début du siècle l'articulation semble présenter des variations importantes selon les manuels.

2.4. Relecture des programmes

Le programme de 1889 ne prescrivait pas d'articulation entre l'étude de la numération et celle du système métrique, toutefois il semble qu'au début des années 20, ces deux thèmes ne sont pas traités indépendamment. Il est assez clair que le programme de 1923 exclut l'étude des sous-multiples des unités mères au CE et prescrit l'étude de la numération en relation étroite avec celle de leurs multiples. Ce qui est visible dans ce programme, l'est aussi dans les manuels jusqu'en 1970, on assiste à une construction conjointe de systèmes d'unités métriques et des ordres de la numération pour les nombres jusqu'à mille au moins, les unités mères du système métrique, à une exception près, sont mobilisées.

Nous disposons de cinq sommaires pour des manuels dont la première édition est postérieure à 1932, ils introduisent tous très tôt le centimètre. Le programme de 1945 établit une liste d'unités usuelles qu'il convient d'étudier au cours élémentaire, unités auxquelles il faut ajouter l'ensemble des préfixes. Nous avons évoqué le traitement des unités usuelles dans Vassort et Bodard, ce sont les seuls manuels dans lesquels elles apparaissent visiblement. Dans Châtelet 1952, centimètre et décimètre sont introduits en début de progression, mais les autres sous-multiples ne sont cités qu'après l'étude de la numération des entiers et par famille : les déci-, les centi-, les milli-. On ne voit guère dans le sommaire la prise en compte du caractère usuel indiqué par le programme. D'après les sommaires, les deux éditions Marijon de 1947 et 1957 sont assez proches, on note cependant dans celle de 1957 une leçon sur le centilitre vers la fin du manuel, comme une sorte de mise en conformité avec la lettre du « nouveau » programme. On ne trouve pas de leçon générale sur les préfixes des sous-multiples.

Le programme du CE de 1945 nous semble accorder une place relativement mineure au système métrique en tant que système complet d'unités. L'objectif du CE consiste surtout à montrer « des unités différentes qui ont un rapport entre elles ». Apparemment, la place qui est accordée dans les manuels au système complet dans l'étude la numération de position est bien plus importante que celle qui est prescrite et on reste finalement assez proche des instructions de 1923 jusqu'en 1970, en y ajoutant toutefois l'étude du centimètre. L'articulation entre apprentissage de la numération et du système métrique est donc très serrée entre 1923 et 1970.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

3. Étude du système métrique quand il est articulé avec la numération

Nous avons vu qu'à partir du début du siècle on repère dans les manuels qu'une articulation s'installe dans les sommaires des manuels entre système métrique et numération. De façon plus précise, comment cela se traduit-il dans les tâches qu'on propose aux élèves pour l'étude du système métrique ? dans les technologies qu'on leur enseigne ? Peut-on en dire quelque chose du point de vue de la qualité des apprentissages potentiellement réalisés ? Quelle est la place des pratiques de la vie courante dans cette étude ?

Dans cette partie, nous commençons à déterminer le rapport institutionnel au système métrique lorsque son étude est articulée avec celle de la numération. Nous étudions nos manuels de façon systématique. Nous relevons ce qui nous semble être des techniques ou des technologies relatives au système métrique qui impliquent la numération. Nous caractérisons ensuite l'étude des pratiques de référence pour le mesurage dans la vie courante : nous relevons les techniques et les types de tâches. Nous nous appuyons sur ces deux études pour caractériser les types de tâches de l'enseignement des grandeurs-objets. L'étude des tâches internes au registre symbolique pour le système métrique est ébauchée, elle sera poursuivie dans notre 6ème chapitre.

3.1. Préambule : la notion d'instrument

Dans ce chapitre, nous allons évoquer de nombreuses pratiques qui permettent de déterminer les mesures de certains objets (objets au sens large). Pour déterminer ces mesures, on fait appel à des matériels spécifiques des objets que nous appelons *instruments*.

Nous ne référons donc pas à la notion d'instruments telle qu'elle par exemple pu être développée dans des travaux de didactique.

Même si c'est parfois le cas, ces *instruments* ne sont pas toujours ce qu'on appelle habituellement des instruments de mesure. Ils peuvent être des « parties » de tels instruments. Si le décamètre est généralement considéré comme un instrument de mesure, ce n'est pas le cas d'une masse marquée. Nous dirons pourtant que la masse marquée en est un, même si, dans l'usage de référence pour le mesurage, il faut une balance à plateaux pour pouvoir utiliser une masse marquée. Nous dirons aussi que la balance à plateaux est un *instrument*.

Nous considérons que les bornes kilométriques ou hectométriques en sont aussi. C'est bien sûr l'écart entre deux bornes qui donne la grandeur. Contrairement à ceux que nous avons

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

évoqués précédemment, cet *instrument* n'est pas transportable, pourtant au cours d'un déplacement entre deux bornes par exemple, les bornes permettent de donner la longueur du déplacement. Cela justifie pour nous qu'on utilise le même mot. Pour la même raison, nous dirons que les pancartes qui indiquent la distance à un endroit donné sont des *instruments* : la pancarte permet de mesurer la distance entre la pancarte et le lieu indiqué (à condition qu'il soit repéré).

Enfin, il nous faut préciser le sens des expressions *mesures réelles* et *mesures effectives*. Nous empruntons la définition qui en est donnée par Mortreux CE (ldm, p 205) : « Les mesures réelles ou effectives sont des instruments dont la loi autorise la fabrication et l'usage. Elles peuvent représenter l'unité principale, ses multiples et ses sous-multiples décimaux ; le double et la moitié de chacune de ces unités. » Ces mesures sont donc des *instruments*.

Finalement, ces *instruments* sont des matériels qui contribuent à déterminer des mesures de grandeurs dans des contextes sociaux très particuliers. L'instrument est adapté à l'objet qu'on veut mesurer.

3.2. Premiers éléments sur les praxéologies relatives au système métrique

Dans un premier temps nous indiquons ce que nous identifions comme des techniques ou des technologies pour l'étude du système métrique qui impliquent la numération. Elles portent sur :

1) les unités du système métrique et leurs tailles relatives,
2) l'écriture chiffrée des grandeurs mesurées.

▪ Les technologies pour les relations entre les tailles des unités

Pour ce qui concerne les tailles relatives des unités, on peut distinguer trois types de relations :

a) celles qui indiquent les relations entre la dizaine, la centaine, le millier (ou le mille) et l'Unité : le décamètre c'est une dizaine de mètres, l'hectolitre c'est une centaine de litres,
b) celles qui indiquent les relations de dizaines entre deux unités métriques successives : un kilogramme c'est **dix** hectogramme, un hectomètre c'est **dix** décamètres,

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

c) celles qui indiquent les relations entre d'autres groupements. Jusqu'aux nombres de 4 chiffres, il s'agit uniquement de la relation de centaine entre millier et dizaine : un kilomètre c'est **cent** décamètres.

Sur le plan méthodologique, nous faisons l'hypothèse qu'en général, une collection est cohérente dans ses choix, aussi nous a-t-il semblé pertinent, afin de laisser une dimension raisonnable à cette étude, de la limiter à un ordre d'unité. Nous avons choisi la centaine. Cet ordre nous semble légitime pour étudier la spécificité du début du cours élémentaire : la dizaine est déjà largement étudiée au CP et plusieurs collections n'étudient pas les mille au CE1. En outre, étudier la centaine permet de s'intéresser aux relations entre unités successives qui n'existent pas au niveau de la dizaine mais ce choix exclut toutefois qu'on s'intéresse au troisième type de relations (c). L'étude des milliers serait également pertinente mais une rapide étude met en évidence un écart possible entre numération et système métrique. En effet, à partir des nombres de quatre chiffres certains manuels poursuivent l'étude de la numération chiffre par chiffre (par position ou ordre de la numération) quand d'autres étudient globalement la numération par classe (les nombres de 4 à 6 chiffres sont étudiés simultanément). Notre repérage est donc fait dans les leçons portant sur les unités métriques dont le préfixe est hecto et sur celles qui évoquent la centaine. Ceci inclut donc le mètre comme centaine de centimètres chez Châtelet CE1 1932 et Vassort CE1, tous deux n'étudient d'ailleurs pas l'hectomètre au CE1. Par ailleurs, nous avons aussi examiné les leçons de synthèse lorsqu'elles existent.

Quand les deux relations (a) et (b) sont formulées, il n'est pas rare que ce soit dans une même phrase, par exemple, « une longueur mesurée par 10 décamètres ou 100 mètres s'appelle un hectomètre (en abrégé : 1 hm.) » (Châtelet 1952). Nous les séparons ici pour mieux les caractériser.

Nous commençons par indiquer la diversité des formulations possibles pour une relation. En effet, on peut avoir une égalité ou une phrase, les nombres peuvent être écrits en chiffres, en lettres ou dans les unités de la numération (10, dix, dizaine), les unités métriques peuvent être abrégées ou non (hectomètre ou hm), on peut exprimer les relations entre unités, entre les instruments de mesure ou bien entre unité et instrument. Il peut aussi y avoir des dessins d'instruments ou d'objets pour accompagner ces formulations.

Pour la relation de centaine à unité, on peut avoir par exemple : « la centaine de mètres : l'hectomètre. Tous les 100 mètres, il y a une borne hectométrique. » (Vassort CE2).

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Pour la relation entre centaine et dizaine, voici des exemples :

- de formulations entre unités : 1 hectogramme c'est dix décagrammes, 1 hg = 10 dag, une longueur mesurée par 10 décamètres s'appelle un hectomètre ;
- d'une formulation qui implique unités et instruments : pour faire 1 hectomètre, on a porté 10 fois le décamètre ;
- de formulations qui mettent en relation les instruments : « l'hectomètre : entre la borne 1 et la borne 2 on peut porter 10 fois la chaîne d'arpenteur de 1 dam » (Denise CE1), « On peut échanger 10 pièces de 10 f (10 dizaines de francs) contre un billet de cent francs (100 f) ou une centaine de francs » (Marijon 1947).

Il nous semble que le choix d'une formulation n'est pas très significatif d'autres choix. D'ailleurs, quand une relation est exprimée, le plus souvent elle l'est de plusieurs façons. En revanche, la présence ou l'absence de certaines relations est significative.

Quand on étudie une unité « centaine », tous les manuels donnent la relation avec l'Unité. En revanche, on ne va pas toujours donner la relation de dizaine à centaine. Les exceptions sont à rapprocher de notre étude des sommaires. Il semble en effet que cela dépende du rôle que joue la grandeur dans l'étude de la numération. Minet CE1, Clap et Boucheny, qui étudient toutes les unités multiples du gramme dans la même leçon, ne donnent pas la relation entre hg et dag. De même, mais pour des raisons différentes, Vassort au CE1 et Bodard au CE2 n'évoquent pas la relation entre hectolitre et décalitre puisqu'ils n'étudient pas cette dernière unité. Mortreux ne la donne pas entre hectolitre et décalitre, Brouet ne donne aucune des trois relations entre hl et dal, hm et dam et hg et dag.

Toutes nos collections, à partir de Châtelet 1932, expriment les deux relations à propos du franc :

- la centaine de francs et la pièce (ou le billet) de 100 francs,
- 10 pièces (ou billets) de 10 francs font 100 francs.

(Marijon 1957 fait exception et se limite à la première relation)

Nous avons vu que Vassort CE1 s'assujettit aux instructions de 1945 pour l'étude des unités métriques. Par suite, il ne s'intéresse pas à l'hectogramme et c'est uniquement la relation de centaine à unité qui est indiquée pour centimètre / mètre et litre / hectolitre alors que la dizaine de dizaines (relation de centaine à dizaine) est absente. La centaine d'unités est d'ailleurs exprimée dans trois registres pour chaque unité : dessin d'un mètre gradué en cm et d'un hectolitre, écriture du mot « centaine », écriture chiffrée « 100 ». Le programme de 1945 du CE, en restreignant l'étude du système métrique aux unités usuelles, « interdit » l'expression des relations entre unités métriques. Il ne reste à Vassort au CE1 que la monnaie pour exprimer cette relation sur les grandeurs.

Minet, Clap et Boucheny qui n'énoncent pas la relation entre hg et dag lors du premier travail avec ces unités énoncent la règle générale dans les leçons de synthèse sur les unités de masse :

> Les unités de poids sont de 10 en 10 fois plus grandes ou plus petites. (Minet CE2, p. 83)

Il nous semble qu'on peut dégager trois approches pour l'étude des unités métriques : soit un système d'unité est construit comme une nouvelle numération et alors chaque unité est introduite comme 1 dizaine de la précédente, soit il y a des « trous » dans le système d'unités étudié et une unité est introduite en venant prendre place dans l'étude de la numération. S'il s'agit d'un « hectogramme », on dira que c'est une centaine de grammes mais pas dix décagrammes : on n'évoque pas la relation la relation de dizaine qui le lie à l'unité précédente (qui n'est d'ailleurs pas forcément introduite, chez Vassort, par exemple). La troisième approche consiste à présenter globalement le système d'unités. On dira alors par exemple lors de l'introduction des décagrammes et des hectogrammes que ce sont des dizaines et centaines de grammes. Dans tous les cas, le rapport à la numération est explicite.

Précisons que lorsqu'il s'agit d'un système d'unités étudié dont l'étude est entrelacée avec la numération, dans tous nos manuels, on est dans le premier ou le deuxième cas. Dumarqué fait de la première façon même lorsqu'il étudie les unités sans entrelacement avec la numération.

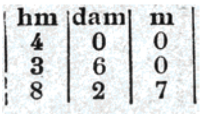
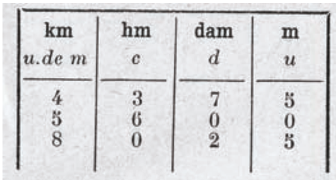
- La position

Nous avons relevé deux types de techniques ou technologies (nous reviendrons sur la distinction) relatives à l'écriture chiffrée des grandeurs mesurées. Il s'agit des *tableaux* et des *discours*.

Les tableaux de conversion et les unités métriques.

Nous avons relevé plusieurs sortes de tableaux dans nos manuels : tableau ordinaire de conversion, tableau mixte de numération et de conversion. On a aussi des arrangements spatiaux où les colonnes ne sont pas matérialisées qui correspondent à des tableaux de conversion ordinaires.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Tableau ordinaire de conversion	Tableau ordinaire de conversion « sans » colonne	Tableau mixte de numération et de conversion, avec les noms des unités métriques	Tableau mixte de numération et de conversion, avec les instruments
 hm dam m 4 0 0 3 6 0 8 2 7 (Clap, p. 21)	**6 7 5 m** hm dam m (Vassort CE2, p. 52)	 km hm dam m u.de m c d u 4 3 7 5 5 6 0 0 8 0 2 5 (Boucheny, p. 77)	 (Châtelet 1952, p. 78)

Un tableau mixte est donc un tableau qui fait apparaître conjointement les unités de la numération et les unités métriques. De plus, nous avons distingué deux sortes de tableaux mixtes, ceux qui indiquent pour le système métrique seulement les noms des unités métriques, ceux qui surajoutent les instruments à ces noms. Ces instruments sont soit dessinés, soit évoqués par du texte. Nous n'avons pas relevé le mode de désignation des unités de la numération (et du système métrique) bien qu'il y ait des variantes : par l'initiale (c, d, u), par une abréviation (cent., diz., unités), par le nom complet (centaines, dizaines, unités).

Dans nos manuels, tous les auteurs, de Clap à Marijon 1957 sauf Dumarqué et Châtelet 1932, donnent un tableau pour l'étude de chaque nouvelle unité : il s'agit toujours d'un tableau mixte (Clap n'en met pas dans sa leçon sur l'hectogramme où le tableau est ordinaire).

Pour les manuels plus récents, les situations sont plus variées. Bodard donne des tableaux seulement au CE2 dans ses leçons de synthèse et ils sont mixtes. Châtelet 1932 CE1, Vassort CE2, Denise CE1 donnent seulement des tableaux ordinaires respectivement en cm/dm/m pour le premier, en m / dam / hm et l / dal / hl pour le deuxième, dans les trois grandeurs pour le troisième. Enfin, Bodard CE1 et Châtelet 1952 donnent des tableaux mixtes pour le franc.

Le plus ancien, Brouet, ne donne pas de tableau, les deux suivants donnent des tableaux ordinaires Mortreux pour le mètre et Minet CE2, en leçon de synthèse, pour le gramme et le litre.

Les discours positionnels et les unités métriques

Nous avons relevé les discours qui portent sur l'écriture positionnelle des grandeurs mesurées. Nous en avons repéré deux types. Le deuxième est très minoritaire puisqu'il n'est utilisé que par Châtelet 1952.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Le premier type ne réfère pas directement à la position des unités de la numération dans les écritures chiffrées. Le numéro de la position n'est pas énoncé mais on fait référence à une écriture chiffrée puisqu'on indique « dans un nombre de grammes » ou « quand on compte en grammes » et qu'on parle du rang ou du chiffre des centaines, c'est-à-dire qu'on a une grandeur mesurée exprimée dans une unité unique avec une écriture chiffrée comportant plusieurs chiffres et qu'on relie unité de la numération et unité métrique dans cette écriture.

Le deuxième discours, utilisé par Châtelet 1952, ne met pas en relation les unités métriques et les unités de la numération mais seulement les unités métriques et la position (de gauche à droite).

Pour le premier type, Dumarqué propose :

> Quand on compte en grammes, le chiffre des centaines représente des hectogrammes. (p. 96, 43ème leçon. L'hectogramme)

Boucheny indique :

> Dans l'écriture d'un nombre exprimant des longueurs, si le mètre est pris pour unité, les hectomètres s'écrivent au rang des centaines. (p. 52, leçon « l'hectomètre »)

Toutefois Vassort CE2, qui ne propose pas de tableau mixte, récapitule pour mètre et litre les valeurs des différents chiffres dans un discours du type :

> Dans le nombre 675 m,
> - le chiffre 5 représente les mètres (unités),
> - le chiffre 7 représente les décamètres (dizaines),
> - et le chiffre 6 les hectomètres (centaines). (p. 52, leçon « la centaine de mètres : l'hectomètre (hm))

Pour le deuxième type, Châtelet 1952 indique :

> Dans 125 g, il y a trois chiffres.
> - Le premier chiffre à gauche est le nombre d'hg (1).
> - Le suivant est le nombre de décagrammes (2).
> - Le chiffre de droite est le nombre de grammes (5) (p. 78, 43e leçon L'hectogramme)

Tous les auteurs de Minet à Vassort (sauf Châtelet 1932 et Vassort CE1) proposent un discours d'un des deux types. Aux extrêmes de notre période, Brouet, Bodard et Denise n'en proposent pas.

Il nous semble qu'on peut repérer des périodes. Le plus ancien, Brouet qui ne manifeste pas d'articulation dans ses sommaires entre numération et système métrique ne donne dans l'étude du système métrique ni tableau, ni discours. Mortreux, Minet et Clap, nos trois manuels intermédiaires, qui tentent de prendre en compte la numération dans l'étude du système métrique donnent des tableaux simples (souvent mixtes pour Clap) et des discours. On a ensuite une période stable dans laquelle on trouve des discours accompagnés le plus

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

souvent de tableaux, mixtes uniquement. Puis vers la fin, réapparaissent des tableaux ordinaires et les discours disparaissent. Châtelet 1932 fait exception comme souvent.

Nous avons dit que le discours relatif à la position des unités métriques dans une écriture chiffrée fait en général appel explicitement aux unités de la numération et implicitement à la position. Aussi, nous semble-t-il nécessaire de faire dès maintenant une incursion dans les leçons de numération. Comment relie-t-on les unités de la numération et les écritures chiffrées ? Nous recherchons à la fois les tableaux et les discours. Nous regardons uniquement dans les leçons de numération (et non dans les leçons sur les techniques opératoires, par exemple).

Tableaux et discours dans l'étude de la numération

Les trois manuels les plus anciens ne donnent pas de tableau de numération, Châtelet 1932 et 1952, Dumarqué, Vassort CE1 et Denise CE2 non plus. Tous les autres en donnent. En fait, dans sa leçon sur les centaines, Châtelet 1952 en donne un pour le franc mais ne le décontextualise pas pour les nombres sans unité. Par collection, toutes à partir de Clap (sauf les deux Châtelet et Dumarqué) en donnent.

Venons-en aux discours. Toutes les collections sauf Châtelet 1932 et Denise (11/13) formulent un discours qui relie la position des chiffres dans une écriture chiffrée et unités de la numération. Le discours le plus fréquent (6/13) est :

> Les unités s'écrivent au 1er rang à partir de la droite, les dizaines au 2^{e} rang, les centaines au 3^{e} rang. (Boucheny, p. 47)

Mortreux numérote à partir de la gauche. Châtelet 1952 et Marijon 1947 ne numérotent pas les chiffres mais les énoncent à partir de la gauche :

> Les nombres de 100 à 999 s'écrivent avec 3 chiffres :
> - le chiffre de gauche indique le nombre de centaines ;
> - le chiffre suivant à droite indique le nombre de dizaines ;
> - le chiffre de droite, le nombre d'unités. (Châtelet 1952, p. 66)

Bodard fait de même, à partir de la droite.

Minet CE1 énonce un discours avec les valeurs relatives : « tout chiffre placé à la gauche des unités représente des dizaines ».

Signalons que Châtelet 1932 qui ne donne ni tableau, ni discours propose une décomposition particulière pour les nombres de trois chiffres :

> Un nombre de chiffres 349 signifie :
> - 3 centaines + 49 unités ;
> - ou bien : 34 dizaines + 9 unités ;
> - ou bien : 3 centaines + 4 dizaines + 9 unités. (Châtelet CE1 1932, p. 54)

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Il nous semble qu'il faut retenir de ceci qu'à part Châtelet 1932 et nos deux livres extrêmes tous les auteurs développent un discours qui met en relation la position des chiffres dans une écriture chiffrée et les unités de la numération. Par ailleurs, ce discours est le plus souvent complété, à partir de Clap, par un tableau de numération.

Du point de vue des périodes, le discours positionnel entre numération et système métrique est absent chez Brouet (le plus ancien), en revanche, il semble devenir systématique à partir dans la période intermédiaire (même si Minet ne le formule que pour le seul système qu'il étudie au CE1 : g / dag / hg). Dumarqué qui ne donnait pas de tableau donne bien ce discours à l'occasion de la rencontre avec chaque nouvelle unité. En revanche, il semble disparaître à la fin de la période puisqu'il est absent chez Denise et Bodard qui donnent seulement des tableaux simples de conversion. Châtelet 1932 qui fait encore exception ne donne pas ce discours.

Quand il existe, ce discours sur les relations entre position et unité métrique est accompagné par le discours de la numération sur les relations entre position et unité de la numération.

- Hypothèses sur les techniques pour deux tâches

Dans ce paragraphe nous cherchons à partir des différents discours repérés à identifier les techniques qui permettent de résoudre deux tâches classiques[40] de l'étude du système métrique. Il s'agit d'une part, étant donnée une grandeur mesurée dans le système engendré par l'unité mère (mètre, gramme ou litre) de l'exprimer avec l'unité « mère » (cas simple) ; d'autre part, étant donnée une grandeur mesurée dans le système engendré par une unité multiple de l'exprimer avec cette unité multiple (cas compliqué). Les deux tâches sont des tâches de recomposition, on peut aussi avoir les tâches réciproques de décomposition.

Dans les manuels, le cas compliqué n'est pas présenté explicitement dans la partie leçon mais il apparaît souvent dans les exercices. Néanmoins comme nous allons le voir chacun des deux cas peut être résolu, selon nous, en utilisant deux techniques.

Nous considérons pour le cas simple : écrire 3 hm, 6 dam en mètres ; pour le cas compliqué : écrire 3 hm, 6 dam en décamètres.

[40] Nous reviendrons dans notre 6ème chapitre sur l'étude des types de tâches.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Cas simple et cas compliqué avec tableau de conversion

Pour le cas simple, nous présentons ce que propose Clap (p. 21). Il utilise le tableau de conversion :

Dans les nombres du tableau ci-contre, **observez la place des mètres, des décamètres, des hectomètres.**		hm	dam	m	
	4hm s'écrit	4	0	0	= 400m
	3hm 6dam	3	6	0	= 360m
	8hm 2dam 7m	8	2	7	= 827m

On écrit dans le tableau les chiffres qui correspondent à chaque colonne (un chiffre par colonne), on complète les cases vides avec des zéros jusqu'à la case de l'unité mère et on obtient le nombre de mètres qu'on lit dans le tableau et qu'on peut écrire à côté.

De façon peu différente, on peut résoudre le cas compliqué dans le tableau même si ça n'apparaît pas dans les manuels. Prenons l'exemple de 3 hm 6 dam à écrire en dam. Avec le tableau, on écrit 3 dans la colonne des hm, 6 dans la colonne des dam (au besoin on complète de gauche à droite par des zéros les colonnes vides jusqu'au dam – c'est inutile ici), puis on lit le nombre à partir des dam vers la gauche et on obtient 36 dam.

Cas simple sans tableau de conversion :

Nous avons dit qu'on ne trouvait pas de tableau de conversion ni de numération dans Dumarqué, en revanche il prescrit nos deux tâches. Voici un extrait de la leçon <u>L'hectomètre</u>.

Problèmes. — 1° Convertir en mètres : 3 hm. ; 3 hm. 5 dam. ; 3 hm. 5 dam. 8 m.

3 hm. = 300 m.
3 hm. 5 dam. = 350 m.
3 hm. 5 dam. 8m. = 358 m.

2° Décomposer en hm., dam. et m. : 400 m., 480 m., 483 m.

400 m. = 4 hm.
480 m. = 4 hm. 8 dam.
483 m. = 4 hm. 8 dam. 3m.

Règle. — Quand on compte en mètres, ***le chiffre des centaines représente des hectomètres.***

Le discours positionnel relatif au système métrique permet de dire, pour 3 hm 6 dam : quand on compte en mètres, le chiffre des centaines indique des hectomètres, donc 3 est en position de centaines, le chiffre des dizaines indique des décamètres, donc 6 est en position de dizaines. Le nombre de mètres s'écrit donc : 360 m.

À propos des masses, Clap (p. 121) donne un tableau mais il y a aussi un discours. C'est lui qui nous intéresse :

Dans un nombre, **si l'unité est le gramme,**
les **décagrammes** occupent le rang des **dizaines.**
les **hectogrammes,** le rang des centaines,
les **kilogrammes,** le rang des **mille.**
Ainsi : 3825 g = 3 kg 8 hg 2 dag 5 g

Unités de mille	centaines	dizaines	unités
kg	**hg**	**dag**	**g**
3	8	2	5

On a donc le même discours que chez Dumarqué.

En fait, l'association des discours sur les relations entre l'hectomètre et la centaine de mètres, le décamètre et la dizaine de mètres, le mètre et l'unité, puis du discours positionnel des unités de la numération permet d'élaborer une technologie pour le discours positionnel relativement au système métrique, discours qui apparaît alors comme une technique :

Dans 3 hm 6 dam, il y a (relations entre unités multiples du mètre et le mètre) :

- 3 hectomètres donc 3 centaines de mètres,
- 6 décamètres donc 6 dizaines de mètres.

Dans l'écriture d'un nombre (relation entre position et unités de la numération)

- le 1er chiffre indique des unités,
- le 2ème des dizaines, donc 6 en deuxième position,
- le 3ème des centaines, donc 3 en troisième position.

Le nombre de mètres s'écrit donc : 360 m.

La technique qui apparaît dans les manuels pour traiter cette tâche est donc très proche des deux technologies élémentaires qu'on enchaîne pour la justifier.

Cas compliqué sans tableau

Le discours positionnel relatif au système métrique ne permet pas de traiter cette tâche, puisqu'on ne cherche pas un nombre de mètres mais de décamètres.

Le discours positionnel des unités de la numération et les discours sur les relations entre unités métriques peuvent servir de support à l'élaboration d'une technique. De façon détaillée, pour écrire 3 hm 6 dam en décamètres, on pourrait utiliser les discours technologiques comme suit.

Un hectomètre est une dizaine de décamètre, donc on a 3 dizaines de décamètres ; on a aussi 6 décamètres (relations entre unités métriques). Dans l'écriture d'un nombre, le premier chiffre en partant de la droite indique des unités, le deuxième indique des dizaines (relation entre position et unités de la numération). En décamètres, 3 hm 6 dam s'écrit donc avec 3 en position de dizaines et 6 en position d'unités, c'est à dire : 36 dam.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

On voit qu'en découpant la tâche en deux sous-tâches que sont :

- exprimer chaque unité métrique en nombre de décamètres avec les unités de la numération (en utilisant les relations entre les unités métriques),
- recomposer le nombre de décamètres (en utilisant les relations entre unités de la numération et la position),

on a fabriqué une technique pour traiter notre cas compliqué. Pour chacune des sous-tâches, on a une « sous-technique » qui est très proche de la technologie élémentaire qui permet de la justifier.

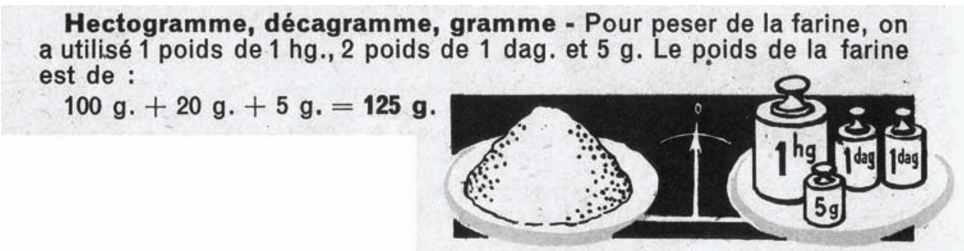
Nous voyons qu'on peut élaborer des techniques sans tableau à partir des discours technologiques présents dans l'étude du système métrique et de la numération de position pour nos deux tâches. Ces techniques, réalisées par des découpages en sous-tâches, restent très proches des technologies. Nous retenons que les techniques (et leur technologie) se ressemblent dans les deux cas mais que les manuels formulent une technique uniquement pour le cas simple.

- Les ostensifs pour la tâche « décomposer, recomposer »

Nous nous intéressons à la tâche simple de décomposition lorsqu'elle apparaît dans la partie cours des manuels. Ceci nous permet de mieux cerner le rapport institutionnel à cet objet.

Nous venons d'étudier des techniques pour traiter cette tâche. Nous l'avons traitée dans l'ostensif « unités métriques ». Cet ostensif est-il généralisé dans les manuels ou bien en trouve-t-on d'autres ? Plusieurs manuels, mais pas tous, proposent des exemples de décompositions (ou de recompositions) dans les leçons ; cette tâche est en revanche toujours prescrite dans les exercices. Nous avons relevé les ostensifs selon lesquels les décompositions sont indiquées dans la partie « cours » des manuels, lorsque des exemples sont donnés. Nos trois manuels anciens ne donnent pas d'exemple. Tous les autres sauf Châtelet 1932 et Bodard en donnent.

Châtelet 1952 (p. 78) juxtapose les registres d'expression :


Hectogramme, décagramme, gramme - Pour peser de la farine, on a utilisé 1 poids de 1 hg., 2 poids de 1 dag. et 5 g. Le poids de la farine est de :
100 g. + 20 g. + 5 g. = **125 g.**

Ici, les unités métriques sont présentes :

- dans le texte et sur le dessin par leur nom abrégé pour désigner les instruments (1 hg),
- avec les zéros dans l’addition (100 g).

Les instruments sont évoqués :

- dans un discours qui égrène les objets de la décomposition (1 poids de 1 hg, etc.),
- dans le dessin (dessin des différents poids avec leur masse chiffrée).

Plus généralement, nous avons relevé des décompositions ayant la forme :

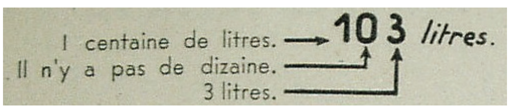
- d’une juxtaposition,
- d’une addition,
- d’un discours qui égrène, dans l’ordre, les éléments de la décomposition.

Les éléments de la décomposition peuvent être :

1) les noms des unités métriques : 2 hm 5 dam 4 m,
2) les noms des unités de la numération suivies d’une unité : 2 centaines de m, 5 dizaines de m, 4 m,
3) les nombres de « 1 chiffre suivi de zéros » suivis de l’unité mère : 200 m + 50 m + 4 m
4) l’évocation des instruments (texte ou dessin) avec pour chaque instrument l’indication de sa grandeur par un nombre suivi d’une unité (cette grandeur mesurée est écrite avec un chiffre suivi soit de zéros et d’une unité métrique mère, soit d’une unité métrique multiple).

Cette diversité dans les éléments de la décomposition masque la réalité. En effet, c’est presque toujours les noms des unités métriques qui sont utilisés. Nous avons relevé le deuxième type chez Vassort CE1 pour le litre et chez Denise. Le troisième n’apparaît que chez Châtelet 1952 pour la capacité et la masse et chez Denise pour la masse. Elle apparaît aussi pour la monnaie chez Vassort et Marijon 1947. La quatrième peut intervenir, en plus, dans les manuels les plus récents.

L’exception du litre chez Vassort CE1 s’explique peut-être par l’absence de décalitre dans le manuel. Il nous semble que l’exemple de Vassort n’est d’ailleurs pas pris au hasard car on contourne doublement cette absence, puisque c’est un zéro qui est en position de dizaine et que litre et hectolitre sont étudiés dans le manuel.



Les exceptions de la monnaie s’expliquent par le fait qu’il n’y a pas de nom pour les unités multiples du franc.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

- Conclusions

Dans ce premier paragraphe relatif aux technologies du système métrique qui impliquent la numération, nous avons mis en évidence comment l'articulation entre numération et système métrique se manifeste à ce niveau.

Comme dans les sommaires on observe une séparation suivie d'une période transitoire puis une période stable où les deux semblent être articulés. Les technologies et les techniques reliant système métrique et numération semblent émerger puis se stabiliser. Elles semblent être bousculées dans les années 60.

Le tableau mixte de numération et de conversion apparaît. Il semble être un outil efficace pour traiter les tâches emblématiques du système métrique (décomposer, recomposer une grandeur mesurée dans une unité simple ou multiple). Nous le voyons comme support pour les techniques. Toutefois, il n'est jamais seul dans les manuels (il en est même parfois absent). Il est accompagné par deux discours principaux l'un en système métrique, l'autre en numération. Le premier porte sur les relations entre unités métriques formulées avec les unités de la numération, le second sur les relations entre unités de la numération et position.

Ces discours constituent des technologies qui semblent permettre de traiter à l'aide d'un découpage en sous-tâches élémentaires nos deux tâches emblématiques. En fait, les manuels proposent une technique explicite (très proche des technologies dans sa formulation) pour la plus simple de nos deux tâches.

L'étude du système métrique ne se limite pas à ces tâches, techniques et technologies. Nous étudions maintenant ce que nous identifions comme relevant des pratiques de la vie courante impliquant les grandeurs.

3.3. Un ensemble de techniques et de tâches pour des pratiques de référence pour la vie courante

Dans ce paragraphe nous cherchons à repérer les pratiques de référence pour la vie courante dans l'apprentissage des grandeurs du point de vue des techniques et des tâches. À ce moment, nous ne nous intéressons pas directement à la façon dont le système métrique est impliqué dans ces tâches. Nous commençons par ce qui concerne le mesurage, nous poursuivons avec d'autres pratiques sociales de référence. Nous terminons par des considérations qui interrogent le recours exclusif à des références à la vie courante pour l'étude des grandeurs.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

- Méthode

Après un premier repérage grossier pour élaborer des catégories, nous avons relevé différents types de données. Nous avons recensé tout ce qui nous est apparu comme des pratiques de références de la vie courante pour les trois grandeurs longueur, masse et capacité :

- instruments de mesure évoqués dans les leçons et les exercices (hors problèmes d'arithmétique),
- pratiques commerciales évoquées dans les leçons et les exercices (hors problèmes d'arithmétique).

Nous avons exclu de cette collecte les problèmes d'arithmétique dans lesquels ces pratiques sont éventuellement évoquées.

Nous avons recensé les tâches de mesurage en fonction des instruments (ou unités lorsque l'instrument est implicite) qu'elles mobilisaient et plus généralement toutes les tâches qui impliquent la manipulation des instruments de mesure. Nous avons noté de façon non systématique d'autres éléments relatifs aux tâches de mesurage : la façon d'utiliser les instruments, les objets qu'on mesure, notamment.

Nous donnons en annexe deux exemples de grilles de recueil de données : le premier pour le relevé des pratiques de référence de la vie courante hors pratiques de mesurage, le deuxième pour le relevé des tâches de mesurage.

- Les discours et les techniques à propos du mesurage

Les techniques élémentaires de mesurage

Quelques manuels indiquent comment on mesure : en reportant le mètre sur l'objet ou en comptant les litres qu'on verse dans un récipient pour le remplir, en faisant un équilibre sur la balance ou en lisant une graduation sur la règle, en plantant une tige qu'on appelle une fiche chaque fois que l'on mesure 10 m avec la chaîne d'arpenteur.

Dans presque tous, la présence des instruments usuels est généralisée dans les leçons, pour chaque unité ou grandeur rencontrée.

Quels sont les instruments évoqués dans les leçons ?

Plusieurs manuels se réfèrent explicitement aux *mesures réelles ou effectives* des différentes grandeurs. Ce sont des instruments (cf. 3.1 dans ce chapitre). Leur grandeur est soit une unité métrique soit le double ou la moitié d'une de ces unités. Pour des raisons de maniabilité, assurément, ces mesures vont du décimètre au double décamètre pour les longueurs, du centilitre à l'hectolitre pour les capacités, du milligramme au demi-quintal pour la masse. A une grandeur peut correspondre plusieurs instruments selon l'usage qui en est fait : par exemple les mesures de capacité pour les matières sèches sont en bois, alors que celles pour les liquides sont en métal.

Nous avons recensé tous les instruments dessinés ou évoqués dans les *leçons* relatives au système métrique (nous n'avons pas relevé ceux qui sont cités dans les problèmes d'arithmétique ou de numération de ces leçons ou d'autres leçons, ni ceux qui ne sont cités que dans les leçons de géométrie). On trouve généralement les mesures légales et d'autres instruments.

Pour les longueurs, pour treize collections, on trouve la règle graduée (10) à propos du centimètre, toutes les collections citent au moins une sorte de mètre, à savoir le mètre en bois (10), pliant (12), ruban (9), parfois le mètre de couturière (2). Pour le décamètre, la chaîne d'arpenteur est toujours présente (13), parfois le ruban d'architecte (4). Les bornes kilométrique (11) et hectométrique (11) sont toujours présentes à partir de Mortreux. Les panneaux indicateurs de distance (8) semblent apparaître à partir de Mortreux et disparaître vers la fin de notre période. Tous ces instruments sont destinés à des pratiques spécifiques de la vie courante. L'absence de la règle graduée chez Boucheny et Minet est significative de l'absence de l'étude du centimètre en arithmétique. Ceci signifie que la présence des instruments est conditionnée par les unités étudiées et non l'inverse. Six collections évoquent la série des *mesures effectives* de longueurs, il s'agit de Brouet, Mortreux, Clap, Boucheny, Dumarqué et Marijon 1957 qui s'arrête au double mètre. Ce sont essentiellement les plus anciennes.

Pour la mesure des masses, les instruments sont de deux types. Il y a d'une part les différentes balances, d'autre part les différentes familles de masses marquées. Les balances dessinées ou citées sont la balance à colonne (ou du pharmacien) (8), la balance Roberval (11) et la bascule (6) pour les masses les plus lourdes. Marijon 1957 cite la balance automatique à cadran dans la leçon sans prescrire son utilisation. Il existe trois familles de masses marquées : les poids en cuivre ou en laiton, les poids en fonte, les lamelles de cuivre ou de platine. Chacune d'elles est destinée à mesurer des ordres de grandeurs différents : les lamelles vont du milligramme au demi-gramme, les masses en cuivre ou laiton du gramme à 20 kg (fréquemment, on les cite seulement jusqu'au demi-kilogramme), les masses en fonte du demi-hectogramme au demi-quintal. De 1923 à 1945, l'étude des sous-multiples du gramme n'est pas au programme du

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

CE. Une conséquence manifeste en est que nos quatre collections éditées pour la première fois dans cette période n'évoquent effectivement pas les lamelles, alors que six autres collections le font. Dix collections évoquent toutes les tailles pour les deux familles de poids en cuivre et en fonte. Minet et Denise se limitent à celles en cuivre au CE1, Boucheny aux masses en cuivre qui sont des unités multiples, il ignore donc les doubles et moitiés. Marijon 1957 et Denise ne détaillent pas complètement la famille des poids en fonte.

Pour la capacité, il existe là encore des instruments spécifiques : les *mesures effectives* en bois pour les matières sèches, celles en étain et en fer blanc pour le commerce de détail des liquides (le fer blanc étant réservé au lait et aux liquides gras), celles en tôle ou en cuivre pour le commerce de gros des liquides. Ces mesures ont des caractéristiques géométriques souvent évoquées : les mesures en étain ont un diamètre intérieur égal à leur demi-hauteur, pour les autres mesures de capacités ce diamètre intérieur est égal à la hauteur. A ces mesures légales, quelques manuels ajoutent le litre en verre et l'éprouvette graduée en centilitres. Tous les manuels ne citent pas toutes les tailles pour chaque famille d'instruments, mais tous évoquent au moins une fois les mesures de capacité en étain, fer blanc et bois ; tous sauf trois évoquent celles en cuivre ou tôle pour les grosses capacités.

Cette liste d'instruments mérite plusieurs commentaires. Elle apparaît dans les leçons et tous ne sont pas nécessairement utilisés pour mesurer dans les exercices. Elle s'inscrit pour partie dans l'apprentissage de pratiques de la vie courante, mais certaines d'entre elles sont probablement obsolètes à partir d'un certain moment.

Par ailleurs, bien que nous n'en ayons pas fait de relevé systématique, il est fréquent que des leçons indiquent les relations de grandeurs entre instruments (ou entre instrument et unité) : en particulier qu'il y a neuf bornes hectométriques entre deux bornes kilométriques et que la chaîne d'arpenteur mesure 10 mètres, c'est-à-dire un décamètre, voire qu'on peut porter dix fois la chaîne d'arpenteur entre deux bornes hectométriques.

Techniques de mesurage de niveau plus élaboré

Nous voulons nous attarder sur les techniques relatives à l'utilisation des instruments, plus ou moins explicites dans les manuels. Le cas des masses est le plus simple : la composition des boites de poids est standard. En fait, une boite permet de faire toute les masses en nombre entier d'unité la plus petite contenue dans la boite jusqu'à la somme de toutes les masses de la boite. Par exemple la boite des poids de 1 gramme à 500 grammes contient un poids de 1 g, deux poids de 2 g, un poids de 5 g, deux poids de 1 dag, un poids de 2 dag, un poids de 5 dag,

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

deux poids de 1 hg, un poids de 2 hg, un poids de 5 hg et permet de faire toutes les masses de 1 g à 1 kg. La façon de faire une masse en utilisant le moins de poids possible est unique : une masse de 382 g se fait avec un poids de 2 hg, un poids de 1 hg, un poids de 5 dag, un poids de 2 dag et un poids de 1 dag et un poids de 2 g.

Pour les longueurs du mètre à quelques dizaines de mètres, dans un premier temps, les élèves sont amenés à utiliser les instruments unitaires (mètre, décamètre). Ceci est important. En effet, pour mesurer une longueur de 1 à 10 m, on va reporter le mètre et compter les reports. Éventuellement, on lira le « reste » sur les graduations de l'instrument ; de même pour les longueurs de 1 dam à 10 dam qu'on mesurera avec le décamètre. Cependant, le plus souvent, quand on mesure en mètres, il n'y a pas de sous-multiple connu et pas de reste à lire donc. Si les décamètres usuels sont gradués en mètres et double décimètres, voire centimètres, c'est souvent qu'on fait fabriquer aux élèves un décamètre avec une ficelle qui est alors graduée uniquement en mètres. Parfois, plus tard, dans des leçons de synthèse, les élèves doivent utiliser les doubles et moitiés, le mesurage implique alors du calcul sur les petits nombres. Presque tous les auteurs font fabriquer aux élèves une règle de 10 cm ou 1 dm, graduée en cm, certains indiquent comment on lit la mesure sur la règle. Ceci concerne alors les longueurs de 1 à 9 cm. Le problème est différent quand il faut mesurer des longueurs de plus de 1 dm. Clap fait fabriquer un décimètre en carton, non gradué, et le fait utiliser pour mesurer des longueurs de quelques décimètres. Il s'agit donc encore de reporter une unité. Il demande, dans la leçon suivante sur le centimètre, de graduer le décimètre précédent et de l'utiliser pour mesurer des longueurs qui vont, d'après les objets à mesurer, d'environ 3 cm à 20 cm. On peut penser que les élèves devront alors reporter la grande unité (le décimètre) et lire le reste (les centimètres) sur la règle artisanale. En revanche, Bodard demande de montrer une longueur de 1 dm 2 cm sur un double décimètre, ce qui ne demande pas de report d'unité mais seulement une conversion. Il n'est pas sûr que ces reports d'instruments unitaires constituent toujours des pratiques de la vie courante, on peut en effet penser que les instruments sont parfois choisis pour faire travailler des aspects spécifiques : Clap évoque par exemple le « double décimètre en bois » des élèves, mais ne le fait pas utiliser pour mesurer les longueurs dans la leçon sur le décimètre.

Après avoir présenté ce qui nous semble constituer les techniques pour le mesurage et les instruments pour mettre en œuvre ces techniques, nous essayons de caractériser les tâches de mesurage. On en observe en effet une grande diversité. Cette diversité est liée de façon évidente :

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

- au fait que nous étudions trois grandeurs différentes : longueur, masse, capacité,
- à l'ordre de grandeur de ce qu'on mesure,
- aux spécificités de forme, de matière des objets qu'on mesure.

Elle est aussi conditionnée par les besoins de la vie courante :
- dans quel contexte a-t-on, par exemple, besoin de la capacité ?
- de quoi dispose-t-on, alors, pour la déterminer ?

- Que mesure-t-on dans nos manuels ?

Dans certains cas, *ce qu'on mesure* constitue une variable didactique. L'ordre de grandeur, la forme, l'orientation, le matériau, etc. sont susceptibles d'avoir une incidence sur les techniques de mesurage. Nous avons recensé les types d'« objets » qu'on mesure :
- pour la longueur, nous avons repéré des objets non déformables souvent rectangulaires ou parallélépipédiques, déplaçables ou non dont on détermine la longueur, la hauteur, la largeur, l'épaisseur. Plus rarement, on recherche la longueur du contour d'un objet arrondi, celle d'un objet mou ou d'une ficelle. Mesurer du tissu est presque toujours donné en exemple dans les leçons et utilisé dans les problèmes mais jamais prescrit dans les exercices de mesurage. On mesure aussi des objets allongés : la longueur d'un trait, une distance qu'on parcourt, la distance entre deux choses, l'éloignement par rapport à un point où on se trouve,
- pour la capacité, il y a très nettement deux sortes de choses à mesurer : contenant et contenu. Les contenus sont des liquides, des solides divisés (sable, craie en poudre…) ou des lots d'objets de très petit volume (des graines, par exemple). Les contenants sont souvent des casseroles, des seaux, des arrosoirs. Nous n'avons pas trouvé de mentions relatives au volume d'objets pleins : le volume d'une pierre, par exemple,
- pour la masse, on pèse généralement deux catégories de choses : des solides (livre, pierre, gomme…), des solides divisés. Quand « on fait la tare », on peut être amené à peser des contenants ; assez souvent on pèse un litre d'eau, un liquide donc, pour l'étude du kilogramme.

Signalons que tous les manuels ne présentent pas tous les types d'objets relevés. Même si ce sont souvent des objets (au sens large) de la vie courante qu'on mesure, leur variété amène une certaine diversité des manifestations des grandeurs. Toutefois, dans l'absolu, on peut en général associer plusieurs grandeurs, voire plusieurs longueurs ou volumes à un même objet,

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

toutes ne sont pas forcément pertinentes socialement et sont donc susceptibles de ne pas apparaître dans les manuels.

- Les tâches de mesurage

Un double point de vue sur le mesurage

Dans nos manuels, « le mesurage » se présente sous la forme de deux groupes de tâches qui correspondent à des pratiques de mesurage de référence de la vie courante :

- *évaluer* une grandeur donnée (donner sa mesure dans une unité),
- *fabriquer* une grandeur de mesure donnée, par exemple peser 5 grammes de craie.

Le cas des capacités est un peu à part : en général on évalue la capacité d'un contenant (d'un récipient), alors qu'on fabrique un contenu de volume donné (on achète trois litres de lait chez la laitière).

Brouet ne prescrit pas d'exercices de mesurage. Tous les autres en prescrivent pour la longueur et la masse (Pour la masse, Denise CE2 se limite à un travail déclaratif sur les ordres de grandeur : choisir parmi g, hg, kg l'unité qui exprime la masse d'un objet donné : une savonnette 2…, un cahier 50…). Tous sauf Châtelet 1952 et Denise en prescrivent pour les capacités.

Examinons la répartition des deux groupes de tâches, parmi les différentes tâches de mesurage. Tous ceux qui prescrivent de peser des objets pour *évaluer des masses*, demandent aussi de *fabriquer une masse donnée* sauf Minet et Châtelet 1952. Pour les capacités, seulement trois demandent de fabriquer un contenu donné en plus d'évaluer une contenance. Signalons que la première tâche est « incluse » dans la deuxième car il faut remplir (éventuellement vider) un récipient en comptant des unités pour déterminer sa capacité. Il n'est pas rare que fabriquer une grandeur de mesure donnée se limite à la fabrication de « une unité métrique ». Pour la longueur, presque tous prescrivent les deux groupes de tâches pour des longueurs moyennes (de quelques mètres) et des petites longueurs (de quelques centimètres). Boucheny et Minet font exception pour les petites longueurs.

Ce double point de vue sur le mesurage est donc largement présent dans les manuels. Toutefois, selon la grandeur, voire les ordres de grandeur, il est pris en charge de façons diverses. Chez Boucheny et Minet, le centimètre n'est étudié qu'en géométrie, pas en arithmétique, par suite on trace de petits traits de longueur donnée, mais on n'en évalue pas explicitement (cette tâche peut néanmoins intervenir implicitement lors de la reproduction

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

d'un dessin, par exemple). L'exception de ces deux auteurs nous semble significative : les pratiques de la vie courante qui servent de référence à l'enseignement de l'arithmétique sont conditionnées par le domaine de prescription du programme plus que par le besoin social.

Le mesurage : avec ou sans instrument ?

Apprendre le mesurage est décliné sur trois types de tâches :

- utiliser un instrument de mesure,
- estimer une grandeur, sans utiliser d'instrument,
- estimer *a priori* une grandeur, puis vérifier *a posteriori* l'estimation en utilisant un instrument.

Les deux premiers types constituent des pratiques de référence pour la vie courante. Le troisième est un peu différent. Il ne se formule pas ainsi dans la vie courante car en général, si on estime ça peut être pour se dispenser de mesurer. Toutefois, la dialectique entre estimation et mesurage peut néanmoins intervenir : lorsqu'on contrôle un mesurage ; lorsqu'une estimation s'avère insuffisamment précise, pour effectuer une comparaison par exemple ; ou encore pour choisir la bonne taille d'instrument pour mesurer.

Le troisième type est une pratique « didactique ». Cette pratique est didactique en ce sens qu'elle demande explicitement l'estimation qui est implicite et naturalisée dans la vie, mais nécessaire pour l'apprentissage. En outre, elle met en jeu une anticipation. Ce type est très explicitement prescrit dans le programme de 1923 pour la mesure des longueurs et disparaît des programmes ultérieurs. Huit collections (les exceptions sont les deux plus anciennes et la plus récente ainsi que les deux Châtelet) prescrivent la combinaison « estimer *a priori*, vérifier ». Cependant, trois d'entre elles se limitent à la longueur pour cette prescription. Globalement, cette tâche est davantage prescrite pour évaluer que pour fabriquer.

L'estimation d'une grandeur permet assurément de mémoriser des ordres de grandeur de grandeurs. Ce qui est différent de mémoriser des « images pour les nombres », mais doit y contribuer dès qu'on choisit une unité.

- D'autres pratiques de la vie courante

Les grandeurs comme pratiques professionnelles ou commerciales

Les tâches relatives aux instruments sont de deux ordres. Il y a les tâches que nous venons d'évoquer, elles visent l'apprentissage des techniques de mesurage avec les instruments ; il y a celles qui consistent à reconnaître les instruments, à savoir à qui et à quoi ils servent. Ces dernières sont en général formulées comme suit :

> Qui se sert de ces mètres [mètre en bois, à ruban, pliant] ? Pour quelles raisons ? (Bodard CE1, p. 37)

Enfin, il y a des tâches plus visiblement relatives aux pratiques commerciales impliquant les grandeurs ou les instruments qui les mesurent. Elles sont formulées par rapport à une grandeur ou aux instruments :

> Citer des marchandises que l'on vend au poids. (Boucheny p. 112)
>
> Quels commerçants se servent de ces litres ? (Bodard p. 59)

Ces tâches qui ne relèvent pas du mesurage ne mettent pas directement les élèves au contact des grandeurs-objets, toutefois si ces pratiques sont effectivement répandues dans la société, leur évocation peut sans doute contribuer, par imprégnation, à cet apprentissage. Ces pratiques sont toujours évoquées dans les leçons, il arrive en revanche qu'elles n'apparaissent pas dans les exercices.

Il nous semble crucial de signaler à quel point ces pratiques commerciales ont évolué au cours de notre période d'étude et après. Hocquet (1998) signale que l'implantation du système métrique est allée de pair avec la transformation de certaines pratiques commerciales, en particulier que la masse remplace progressivement le volume dans les transactions (le mesurage au volume était apparemment le lieu de nombreuses fraudes). En fait, ce mouvement n'était pas terminé et s'est manifestement poursuivi après l'implantation du système. Par exemple, en 1934, Dumarqué écrit :

> Pour mesurer les pommes de terre, les graines, etc. On se sert d'un décalitre en bois (Dumarqué p. 150)

Cette citation révèle d'ailleurs un implicite qu'on trouve dans plusieurs manuels. Il est en effet différent d'écrire : *les pommes de terre se vendent au litre* et *les pommes de terre se mesurent au litre*, car elles se mesurent aussi au poids (elles se pèsent, aurait-on alors sans doute écrit). Ceci signifie que lorsqu'on évoque un objet, ce peut être les usages de la vie courante, et même les pratiques commerciales, qui conditionnent l'espèce de grandeur qu'on considère à travers lui. On ne peut toutefois exclure que cette phrase réfère à une pratique commerciale mixte : pour les marchandises vendues en vrac (haricot, café, riz, etc.), on a pu utiliser des mesures de capacité en bois pour passer commande alors que la vente se faisait au poids.

Nous avons repéré deux domaines d'où les capacités n'ont pas encore disparu, ce sont ceux des contenances : casseroles, sacs, etc. et du commerce des liquides. Les moules sont encore souvent vendues au litre, mais aussi parfois au poids. Quelques dérivés du lait, la crème

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

fraîche par exemple, sont conditionnés *au volume*. Beaucoup de manuels citent le pain comme exemple de marchandise que l'on vend au poids. Aujourd'hui s'il est encore implicitement vendu au poids, c'est le plus souvent à la pièce qu'on l'achète explicitement. Même si cette étude de la transformation des pratiques commerciales pourrait être approfondie, il nous semble qu'on peut affirmer sans trop prendre de risque que :

- **dans le commerce de détail**, les pré-conditionnements ont fait disparaître une grande partie des achats *à la grandeur* au profit des achats *à la pièce*,
- la capacité est de moins en moins utilisée pour les transactions commerciales.

Les grandeurs dans les pratiques langagières

Après l'étude des 9 premiers nombres sur le discret, la monnaie et les longueurs en centimètres, Châtelet 1932 propose quelques exercices relatifs au lexique des grandeurs :

> 41. Quel est le **plus cher**, d'un plumier de **2 fr.** ou d'un plumier de **5 fr.** ?
>
> 43. Jean a **5 ans**, Pierre a **6 ans**, Joseph a **9 ans**. Quel est le **plus âgé** ? Quel est le **plus jeune** ?
>
> 44. Jean a **8 billes**, Pierre a **3 billes**. Quel est celui qui a **le plus de billes** ? Quel est celui qui en a **le moins** ?
>
> **Compléter les phrases** en utilisant les adverbes **plus** et **moins** et les adjectifs **cher**, **épais**, **mince**, **jeune**.
>
> (…) 48. Avec 7 fr. on aura ... de marrons qu'avec 5 fr. ; on en aura … qu'avec 10 fr.
>
> (…) 50. Un dictionnaire de 6 cm. d'épaisseur est plus … qu'un livre de 2 cm. ; le livre est plus … que le dictionnaire.
>
> 51. Le crayon de Pierre a 6 cm. de longueur ; celui de Jean a 8 cm. ; le crayon de … est plus court que celui de …
>
> 52. Dans un carrelage de 2 rangées de 3 carrés, il y a … de carrés que dans un carrelage de 3 rangées de 3 carrés. (Faire le dessin.)

Dans le même ordre d'idées, mais avec un appui exclusif sur les pratiques commerciales, Vassort CE1 propose en début de manuel :

> 1. - En vous servant d'un de ces trois mots : **mesure, pèse, compte,** complétez les phrases :
>
> La mercière … de la dentelle. Le boucher … de la viande. L'épicier … le lait. La marchande de légumes … les pommes. Le pâtissier … les gâteaux. L'épicier … les boites de petits pois. Le poissonnier … de la morue.
>
> 2. - Dites si l'on mesure, pèse ou compte
>
> des œufs ? du beurre ? des balais ? (…)
>
> EXEMPLE : On compte des œufs. (Vassort CE1, p. 17)

Il va de soi que la polysémie du verbe mesurer en français, le fait qu'il s'applique aussi bien à la mesure des capacités qu'à celle des longueurs, réduit la portée de cet exercice. Ces deux exemples impliquent par ailleurs explicitement plusieurs grandeurs au sein d'un même exercice. Châtelet 1932 et Vassort sont les deux seuls manuels où nous avons repéré ces tâches.

- Un appui exclusif sur des pratiques de la vie courante ?

Notre relevé de tâches et de techniques s'est centré sur les pratiques de référence tirées de la vie courante, à travers lesquelles nous avons notamment repéré les instruments et les techniques de mesurage. Nous avons noté dans certains manuels un écart ou des commentaires par rapport à ces pratiques de référence. Nous les évoquons maintenant.

Un appui sur les instruments pour des tâches autres que le mesurage

De façon récurrente, à partir de Boucheny et jusqu'à Bodard, on repère dans les manuels des tâches qui consistent soit à fabriquer un instrument à partir d'un autre, par exemple un mètre à partir d'un décamètre avec une ficelle, soit à vérifier que deux instruments peuvent effectivement être mis en relation, par exemple reporter un demi-décamètre dans un décamètre.

Ces tâches améliorent assurément la connaissance des instruments et celle des unités métriques. Elles permettent notamment de mettre en relation les unités.

Quelques activités plus didactiques que socialement utiles

Quelques manuels proposent des activités que nous ne considérons pas comme des pratiques de référence. A propos de la masse, quatre collections proposent des tâches qui impliquent la masse-objet, mais pas de mesurage.

Châtelet 1932 et Marijon 1957 demandent de faire un équilibre avec une balance, sans utiliser les masses marquées. Il est clair que savoir faire un équilibre est nécessaire pour mesurer avec une balance à plateaux : selon les cas on met les poids avant l'objet (pour fabriquer) ou après l'objet (pour évaluer). Sans utiliser les masses marquées, cette tâche est sans doute plus rare dans la vie courante même si elle peut apparaître comme une pratique de référence pour le mesurage quand on « fait la tare » mais ce n'est pas ce que demandent Marijon et Châtelet. Les deux Marijon et eux seuls demandent de diviser une masse par deux, sans utiliser les masses marquées.

Vassort et Marijon 1947 et 1957 approchent le rapport entre masse et volume. Ils demandent de comparer ou d'ordonner en soupesant des objets de volumes identiques mais de masses volumiques différentes, par exemple des boites d'allumettes remplies de sable, gravier ou sciure. Marijon 1947 et Vassort demandent en outre pour le premier d'ordonner en soupesant

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

des objets dont le volume et la masse volumique diffèrent (morceaux de bois, billes, bouchons), pour le second d'observer des sacs contenant chacun un kilogramme d'un matériau particulier.

Enseigner des pratiques de la vie courante obsolètes ?

En 1932, Châtelet écrit :

> Le nom de décalitre, en abrégé dal., qui désigne une *mesure de 10 l.* est peu utilisé. (Châtelet 1932, p. 126)

Bodard, en 1957, signale à propos des différents sortes de litre, au CE2 :

> On se sert de moins en moins de ces mesures.

Au CE1, à propos de l'hectolitre, il demande :

> Pourquoi est-il peu utilisé aujourd'hui ?

A partir de 1950, nos manuels ne donnent plus que les liquides comme exemples de ce qui se vend au litre. Ils continuent cependant tous à représenter ou évoquer les mesures de capacité en bois. Instruments qui ne serviraient à rien ? Il nous semble très intéressant de pointer qu'il existe manifestement une distorsion entre les pratiques présentées dans les manuels et les pratiques effectives dans la vie courante. La distorsion signalée par Châtelet semble concerner uniquement le nom de l'unité qui est donc relatif au niveau grandeur. Ce que signale Bodard concerne les instruments et est donc relatif au niveau objet. Comment et pourquoi ces pratiques obsolètes évoquant une vie courante qui n'était plus ont-elles continué à vivre dans les classes ? On peut bien sûr penser à une société paralysée arc-boutée sur son passé. Toutefois, les textes des énoncés de problèmes évoluent par exemple. Pourquoi donc, ces pratiques obsolètes perdurent-elles ? Nous faisons l'hypothèse que si ces pratiques perdurent c'est qu'elles ont de bonnes raisons de le faire. En particulier, elles doivent rendre des services pour d'autres apprentissages.

3.4. Les types de tâches pour l'étude du système métrique

Nous avons vu que numération et système métrique sont imbriqués au niveau de la chronogenèse et des technologies. Nous avons présenté les pratiques de référence pour la vie courante qui impliquent les grandeurs. Nous avons aussi indiqué que certaines tâches impliquant les grandeurs ne peuvent s'interpréter comme un simple enseignement de telles pratiques. Tous ces éléments nous amènent à penser que l'enseignement du système métrique ne se résume pas à la juxtaposition de ces différents objets. Il s'agit maintenant de rechercher

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

une articulation globale entre les pratiques de la vie courante, le système métrique et la numération.

Notre étude sur les technologies et les techniques de système métrique qui impliquent la numération nous a permis de repérer deux technologies majeures : les relations entre unités métriques via les unités de la numération et la relation entre unités de la numération et écriture positionnelle. Notre relevé des tâches de mesurage nous a permis de caractériser finement les types de tâches de mesurage : évaluer, fabriquer et comparer. Nous avons par ailleurs vu d'autres tâches qui consistent à mettre en relation deux unités consécutives avec les instruments, éventuellement en en fabriquant.

Pour comprendre l'imbrication entre nos trois objets, nous réorganisons nos tâches de mesurage : nous les présentons du point de vue de leur contribution possible à l'étude de la numération. Nous finissons par évoquer la présence des pratiques de la vie courante dans les problèmes d'arithmétique.

Nous donnons en annexe notre relevé réorganisé des tâches de mesurage.

- Connaître les unités métriques

Les grandeurs des unités métriques

Nous nous intéressons d'abord aux tâches où une unité métrique est prise en considération, indépendamment des autres unités du système. Vassort demande de vérifier que les différents mètres ont la même longueur, Marijon 1947 le signale dans sa leçon. Bodard demande de vérifier que deux poids de un hectogramme sont en équilibre (dans le manuel, il n'y a que les poids en laiton qui sont dessinés ce qui est d'un intérêt moindre que la comparaison de deux poids l'un en fonte et l'autre en laiton qui sont respectivement à bases cylindrique et hexagonale). Cinq collections, postérieures à 1930, demandent de vérifier que tous les litres ont la même contenance, ce sont les instruments de référence en bois, en étain, en fer blanc et parfois la bouteille de verre, ils n'ont donc pas tous la même forme. (En outre, Châtelet 1952 le signale dans la leçon.)

Nous avons repéré deux tâches fréquentes qui relèvent *a priori* de l'estimation ou du mesurage :

- l'égalité à une unité métrique : citer deux lieux distants de 1 km, tracer un trait de 1 m, peser 1 kg de sable ou 1 g de craie, etc. Parfois l'égalité se limite à « l'observation »

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

de l'instrument : observer un poids d'un kilogramme, une mesure en bois d'un décalitre,

- la comparaison à une unité métrique (en terme d'*ordre* et non de rapport) : par exemple, rechercher des objets qui pèsent plus d'un kilogramme, moins d'un kilogramme ; dire si la main est plus ou moins large qu'un décimètre, mesurer les capacités de récipients et dire s'il font plus ou moins d'un décalitre, etc.

Parmi les manuels les plus récents, certains font fabriquer des instruments de « une » unité qui seront utilisés pour mesurer : Marijon 1957 et Vassort font fabriquer des masses de 1 g en découpant des morceaux de fil de métal ou de carton, Vassort un mètre non gradué. Il fait aussi rechercher des boites de conserve d'un litre au CE1 et utiliser le tube d'aspirine qui mesure environ 1cl. Pour mesurer, Marijon (en 1947 et en 1957) fait reporter des centimètres (fétu de paille ou bandelette) et vérifier avec le double-décimètre.

Pour les grandes unités de longueurs, ces tâches comprennent souvent une sensibilisation au mouvement uniforme :

1. (…) Parcourir cette distance [100 m] d'un pas régulier. Compter les pas. Chronométrer.
2. Continuer la marche, en ligne droite et du même pas :

   1° en faisant le même nombre de pas que précédemment

   2° en marchant pendant le même temps.

Mesurer la distance parcourue dans les deux cas. (Boucheny p. 52)

Il semble raisonnable de penser que ces premières tâches contribuent à la mémorisation des grandeurs des différents ordres d'unités métriques. Il faut préciser que, dans la mesure où ils sont présentés aux élèves, l'observation visuelle des instruments de longueur et de capacité peut renforcer ces connaissances, c'est moins probable pour la masse s'ils ne sont pas soupesés.

Les grandeurs d'un petit nombre d'unités métriques

La connaissance des unités métriques ne semble pas se limiter à celle de « une » unité. Tout d'abord, l'observation des *mesures effectives* est susceptible d'apporter une contribution particulière : les doubles et moitiés correspondent à des grandeurs de 2 et 5 unités. Des tâches spécifiques peuvent aussi leur être attachées : Clap demande, par exemple, de trouver combien de fois un décimètre fabriqué avec du carton est contenu dans le double décimètre en bois. Marijon 1957 et Vassort font compléter leur série artisanale avec des masses de 2 g et

5 g. Plus généralement, les exercices où on demande de « fabriquer *n* unités », bien que moins fréquents que ceux où il faut n'en fabriquer qu'une, ne sont pas rares.

Dumarqué prescrit par exemple de faire des assemblages de masses marquées (à choisir parmi un poids de 1 g, deux poids de 2 g, un poids de 5 g) pour constituer toutes les masses de 1 g à 9 g. Signalons que dans ces fabrications de petites masses, on travaille aussi les décompositions additives des nombres inférieurs à dix. Il demande par ailleurs de trouver des objets, en les soupesant, qui font plus ou moins que 2 ou 5 hg, puis 2 ou 5 kg et de faire un équilibre à des poids de 2 dag et 5 dag avec d'autres poids.

Nous avions déjà évoqué ces tâches où il faut fabriquer une grandeur donnée par sa mesure à propos du mesurage, nous les retrouvons ici avec une autre fonction : elles sont susceptibles de contribuer à la mémorisation des grandeurs de « *n* unités » où, le plus souvent, *n* est petit (inférieur à dix).

Évaluer une grandeur donnée, retour sur le mesurage

Nous poursuivons notre recherche de l'apprentissage des ordres de grandeur des unités dans les autres situations de mesurage, celles d'évaluation. Dans quelle mesure ces situations sont-elles susceptibles de renforcer la connaissance des ordres de grandeur des unités métriques ? Les intentions didactiques sont parfois moins lisibles que pour les situations où il faut fabriquer une grandeur donnée par sa mesure.

Tout d'abord, on demande souvent de mesurer des objets de la vie courante, la largeur d'un livre, la capacité d'un seau par exemple, l'auteur du manuel maîtrise moins bien les nombres en jeu que lorsqu'il s'agit de tracer un trait de 3 centimètres ou de trouver des objets qui pèsent moins de 20 grammes. Ensuite, on retrouve souvent la marque de pratiques de mesurage de référence : pour la masse, on indique le gramme, ou bien, le plus souvent, on ne précise pas l'unité dans laquelle la mesure doit être donnée et c'est implicitement le gramme, de même pour les capacités qui sont le plus souvent mesurées en litres. Ceci est très marqué quand toutes les unités sont étudiées dans la même leçon (ce qui est fréquent pour le gramme et ses multiples). Alors qu'on trouve quatre auteurs pour demander de reconnaître ou de faire des masses de *n* hectogrammes, il n'y en a qu'un pour prescrire de mesurer dans cette unité. Toutefois, pour la longueur, à part l'hectomètre qui n'est prescrit que deux fois comme unité pour exprimer une évaluation, les autres unités sont plutôt bien représentées. Pour les unités autres que le mètre et le centimètre, il s'agit le plus souvent d'une estimation suivie éventuellement d'une vérification (avec un décamètre ou les bornes kilométriques par

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

exemple). Peut-être l'évaluation d'une grandeur dans une unité non usuelle est-elle plus acceptable lorsqu'il s'agit de donner une estimation que d'exprimer le résultat d'un mesurage obtenu avec un instrument.

Lorsqu'on mesure dans la plus petite unité disponible, on rencontre probablement souvent un problème d'encadrement du résultat. En particulier, sauf dans Châtelet 32, quand on mesure en mètres, on n'a pas de sous-unité (car le centimètre n'est, en général, pas inclus dans le système d'unités) et donc, le plus souvent, « ça ne tombe pas juste ». Cette question n'est jamais évoquée dans nos manuels.

Concernant l'apprentissage des ordres de grandeur, il y a probablement plusieurs situations à considérer : soit l'ordre de grandeur des objets à mesurer est adapté à celui des unités étudiées (même si on ne mesure pas dans ces unités) et on peut apprendre des choses sur les ordres de grandeur de ces unités, soit le choix de l'unité est uniquement vu comme une pratique de référence pour le mesurage : on mesure les masses de moins d'un kg en g et on peut alors n'apprendre que les pratiques de la vie courante qui consistent à manipuler les instruments. C'est le cas lorsque, par exemple, dans une leçon intitulée « balance et pesées » qui présente notamment tous les poids de 1 g à 20 kg, Châtelet 1952 prescrit de « peser un livre, une bouteille vide » et aucun autre objet. En revanche, lorsque Clap, dans sa leçon sur le gramme et ses multiples, demande de peser le livre d'arithmétique, un encrier et un marteau, on peut penser qu'il s'agit de varier les ordres de grandeur des masses des objets à peser. De même, Minet qui étudie le litre et le décalitre au CE1 prescrit par exemple d'évaluer, en litres, les capacités d'une dizaine d'objets qui vont probablement du demi-litre (un sachet) en passant par quelques litres (un saladier) à plusieurs dizaines de litres (un petit bassin).

Il nous semble qu'on étudie les unités isolées de façon à apprendre, de façon absolue, les ordres de grandeur qu'elles représentent. Cette connaissance est renforcée par la mémorisation des grandeurs de petits nombres d'unités. Elle est principalement développée à travers les deux types de pratiques de référence pour le mesurage : fabriquer une grandeur donnée par sa mesure et mesurer une grandeur déjà là. En effet, si elles sont conduites en prenant en compte les ordres de grandeur des objets, elles devraient conduire, par des chemins peut-être différents, à mémoriser les différentes « tailles ». Par ailleurs, les trois types de situations de mesurage (utiliser un instrument pour mesurer, estimer, estimer puis vérifier aux instruments) n'ont sans doute pas le même effet sur le plan cognitif, mais il nous est difficile d'en dire davantage sans étude complémentaire.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

A travers cette première étude, on voit aussi que le rôle des instruments est complexe : certes, il s'agit d'instruments utilisés dans la vie ordinaire et on veut que les élèves les connaissent, mais ces instruments sont le support à des activités qui ne sont pas directement des pratiques de référence pour la vie courante.

Enfin, deux tâches retiennent notre attention : la confrontation des instruments entre eux (les différentes sortes de mètres et de litres) et la comparaison à une unité (ou un petit nombre d'unités). En termes modernes, nous reconnaissons dans la première un travail sur la conservation des volumes et des longueurs. La seconde constitue une tâche de comparaison de grandeurs sans la mesure. En effet, le plus souvent, comme les instruments sont unitaires, il ne s'agit pas de mesurer chaque grandeur et de comparer les nombres, mais de confronter une grandeur à celle donnée par l'instrument. Aujourd'hui, la comparaison est prescrite dans les programmes. Si hier, elle ne l'était pas, elle existait dans les « pratiques des manuels », de même que les questions de conservation.

- Travailler les relations entre unités du système métrique

A ce travail sur les unités métriques isolées s'ajoute celui qui met en jeu les relations qui les unissent.

Connaître les relations entre unités métriques[41]

En 1923, les instructions officielles indiquent que « après l'exemple des nombres ordinaires (dix unités valent une dizaine), on ajoutera aussi, sans retard, les exemples tout à fait pareils : dix mètres valent un décamètre, dix grammes valent un décagramme. ». Cette prescription est affaiblie en 1945. Nous avons déjà repéré ses effets dans les sommaires. Qu'en fait-on dans les manuels du point de vue des manipulations sur les grandeurs–objets ?

Brouet, Minet, Mortreux n'en font rien, ce qui est cohérent avec la date de première publication de ces ouvrages (antérieure à 1923). C'est d'autant plus intéressant que Mortreux travaille scrupuleusement sur chaque ordre de grandeur d'unité. En revanche, sept collections prescrivent au moins une des deux tâches suivantes[42] :

---

[41] Comme elles mettent en jeu les relations entre unités, nous n'avons pas comptabilisé les tâches de ce paragraphe dans la connaissance des unités isolées. Néanmoins, il y a toutes les raisons de penser que certaines d'entre elles contribuent effectivement à cette connaissance.

[42] Nous excluons de ce repérage ce qui est dit dans les leçons et ne serait pas repris dans les exercices, par exemple « Chaîne d'arpenteur (10 mètres) formée de 50 tiges de fer de $0^{m},2$. » (Brouet p. 61)

170. Vérifier avec un mètre que la longueur de la chaîne d'arpenteur est égale à dix mètres.

171. Avec une ficelle, fabriquer un décamètre ; marquer les mètres avec des nœuds. (Dumarqué p. 30)

Cinq collections, les mêmes que les précédentes à l'exception de Marijon 1947 & 1957, prescrivent de vérifier qu'un décalitre contient dix litres. A propos de l'hectomètre, malgré les difficultés pratiques qu'on imagine sauf si la cour de l'école est grande, il reste quand même quatre collections pour prescrire de reporter dix fois le décamètre. Chez Dumarqué, répartis sur les deux leçons relatives à l'hectomètre et au kilomètre, on trouve les exercices :

264. En marchant d'un pas très régulier, compter combien il faut faire de pas pour parcourir 1 hm.

265. Continuer la marche en faisant le même nombre de pas que précédemment. Vérifier si la distance parcourue est bien 1 hm. (…)

396. Quel est le temps nécessaire pour parcourir un kilomètre ? Combien de pas faut-il faire pour parcourir cette distance ?

397. Pour connaître ce nombre de pas, est-il nécessaire de les compter tous ?

A propos du rapport entre hectomètres et kilomètres, on demande souvent aux élèves d'observer les bornes kilométriques et hectométriques au cours d'une promenade, mais seule Vassort demande explicitement de les compter à cette occasion (il est en revanche fréquent qu'on le demande d'après l'observation d'une gravure, ce qui nous semble très différent car on n'éprouve pas alors la grandeur).

Le cas de la masse est un peu différent. Il est probablement assez rare de disposer de dix poids d'un gramme dans une classe ce qui explique sans doute qu'on ne trouve jamais la tâche qui consiste à faire un équilibre entre un poids d'un décagramme et dix poids d'un gramme.[43] En revanche, Dumarqué, Vassort et Bodard prescrivent de faire un équilibre entre le poids d'un décagramme et d'autres masses marquées qui sont, selon les auteurs, données ou à trouver (compte-tenu de la composition des boites de masses marquées, il s'agit toujours de 1 g + 2 g + 2 g + 5 g). Ils prescrivent aussi cette tâche pour les poids d'un hectogramme et d'un kilogramme. On ne décompose alors pas un hectogramme en dix décagrammes mais en 1 g + 2 g + 2 g + 5 g + 1 dag + 1 dag + 2 dag + 5 dag, ni un kilogramme en dix hectogrammes.

De 1923 à 1945, les sous-multiples des unités métriques ne sont pas au programme d'arithmétique du CE, mais on trouve le centimètre en géométrie. Tous nos manuels sauf

[43] Les instructions de 1945 indiquent, à propos de l'étude des nombres : « un objet de 15 g fait équilibre à 15 poids de 1 g ».

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Brouet, Minet et Mortreux prescrivent de fabriquer une règle de 1 dm (ou 10 cm) graduée en cm. Même si c'est le plus souvent implicite, il peut s'agir de reporter un centimètre pris isolément, de « recopier » une graduation déjà existante ou de partager en dix un décimètre existant (« *Partagez* votre décimètre en carton en 10 parties égales de un centimètre », Clap, p. 64). Chez Clap, qui est ancien, cette graduation correspond au dixième de décimètre, chez les autres (sauf Boucheny pour qui il s'agit de géométrie[44]) à la dizaine de centimètres. Seuls trois manuels prescrivent de fabriquer un mètre et de le graduer : Marijon 1957 en décimètre, Marijon 1947 ne précise pas le pas de graduation mais nous supposons que c'est en décimètre, Vassort CE1 en dizaine de centimètres. Chez Marijon, cette graduation est associée à l'étude de la dizaine (de dm), alors que chez Vassort, la leçon est intitulée : <u>la centaine de centimètres : le mètre</u> et qu'il s'agit de marquer la dizaine de dizaines de cm qu'est le mètre. Clap, qui étudie les dixièmes, demande de vérifier que le décimètre se reporte dix fois dans le mètre. De façon générale, pour les sous-multiples seule la relation décimètre / centimètre est véritablement développée dans les manuels du point de vue des grandeurs-objets.

Ce travail sur les relations entre unités permet de matérialiser la relation de dizaine entre deux unités successives du système métrique. Par ailleurs, on peut penser qu'il va aussi renforcer la connaissance absolue des unités métriques déjà évoquée.

Les exceptions à ce travail sur la matérialisation des relations entre unités sont Châtelet 1932 & 1952 et Denise. Sans les ignorer totalement, Marijon ne travaille en fait que celles entre les sous-multiples du mètre et m/dam.

Les mesures effectives et les rapports entre unités métriques

Poursuivons l'étude des relations entre unités sur les objets-grandeurs. Chez certains auteurs les *mesures effectives* double et moitié (des instruments, donc) vont être le support à des tâches spécifiques pour travailler les relations entre unités métriques. Nous considérons ici deux types de tâches :

- vérifier (ou élaborer) une équivalence entre deux *mesures effectives* ou fabriquer une « mesure » (un instrument) à partir d'une *mesure effective* (nous laissons de côté le cas déjà évoqué des relations entre unités multiples consécutives),

[44] Cette exception est notable. En effet, dans Boucheny, les leçons sur le système métrique prennent place, de façon systématique, juste après la numération. Cette graduation apparaît à la page 16, c'est à dire dans la première leçon de géométrie, sur la ligne droite, juste avant le litre et donc avant la dizaine ! En fait, malgré une lecture attentive des 1208 énoncés de problèmes d'arithmétique de ce manuel, nous n'en avons repéré qu'un qui utilise le centimètre comme unité. Cet unique énoncé se trouve dans les dernières pages du livre, celles qui constituent la récapitulation générale du mois de juillet !

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

- mesurer une grandeur-objet en utilisant une unique *mesure effective* double ou moitié.

Dans les deux cas, la masse est exclue puisqu'elle ne se « reporte » pas. Il se trouve en fait que ceux qui prescrivent le premier type sont les mêmes que ceux qui prescrivent le second, même si c'est pour une autre grandeur ou d'autres mesures de la même grandeur. Seuls Dumarqué, Clap et Mortreux s'intéressent à ces tâches. Ce dernier n'étudiait pourtant pas les rapports entre unités simples.

Mortreux prescrit de vérifier les équivalences de quelques *mesures effectives* de capacité : le double litre et 20 décilitres, le double décilitre et 20 centilitres, le demi-litre et 5 décilitres ; il prescrit du mesurage avec d'autres : le demi-litre et le double litre. Clap prescrit également du mesurage avec ces deux mesures. Il fait aussi construire un demi-décamètre (il y fait marquer les mètres). Avec Dumarqué, ils font mesurer avec cet instrument. Dumarqué prescrit également de vérifier qu'un décalitre contient deux demi-décalitres et aussi cinq doubles litres ; il fait, plus tard, verser un hectolitre d'avoine dans un sac en utilisant le demi-décalitre. Rappelons que seulement six collections évoquaient les mesures effectives pour les longueurs, les trois qui prescrivent des exercices de mesurage utilisant des mesures effectives en font partie, que ce soit sur les longueurs ou une autre grandeur.

On peut penser que ces tâches permettent de matérialiser le rapport entre deux unités métriques tout en y incluant un travail sur les rapports entre les nombres : 2, 5 et 10. Rappelons que les trois manuels sont parus avant le début des années 40. Sur le plan des pratiques en vigueur dans la vie courante, nous ignorons la pertinence des pratiques de mesurage évoquées. Toutefois, il semble assez clair que l'équivalence entre les instruments ne constitue pas une pratique de référence.

- Connaître la valeur des chiffres en fonction de la position[45]

Après avoir montré comment était travaillées la connaissance absolue des grandeurs des unités métriques et les relations entre unités métriques du point de vue matériel, nous présentons les tâches qui font fonctionner les techniques ou technologies de mise en relation des unités métriques et de l'écriture positionnelle. Il s'agit donc encore de caractériser les

[45] Les programmes de 2002 parlent de la valeur des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture d'un nombre. Nous pourrions écrire « repérer la grandeur des chiffres en fonction de la position et de l'unité ». Ceci pour mettre en évidence un double aspect : dans 256 g, le 2 représente 2 centaines de grammes, soit 2 hectogrammes, alors que dans 256 dag, le 2 représente 2 centaines de dag, soit 2 kilogrammes. Les deux 2 sont à la même position, ont-ils la même valeur ? Ils représentent deux grandeurs différentes. Évidemment, cette remarque a son équivalent avec des nombres : que représente le 2 dans 256, dans 256 dizaines ?

tâches qui impliquent la manipulation des grandeurs-objets. Nous voulons comprendre comment on travaille « la valeur des chiffres en fonction de la position » dans le registre matériel, c'est-à-dire essentiellement dans le mesurage.

Mesurer dans plusieurs unités… ou avec une seule

Lorsqu'on mesure dans une unité pour laquelle on dispose de sous-unités ou que l'ordre de grandeur des objets à mesurer est très grand devant l'unité dans laquelle on doit mesurer (plus de 10 fois, voire 100 ou 1000), on peut être amené :

- soit à utiliser les sous-multiples de l'unité,
- soit à exprimer le mesurage avec plusieurs chiffres.

Les collections qui suivent prescrivent du mesurage dans plusieurs unités : Clap en dam / m et hm / dam, Bodard en dm / cm, Vassort CE1 en m / dizaines de cm, Dumarqué en m / dm et aussi de faire 1 m 3 dm 5 cm. Quand Dumarqué demande de tracer un trait de 1 m 3 dm 5 cm, il s'agit d'apprendre à faire un trait dont la grandeur est donnée par la juxtaposition de mesures dans différentes unités de même espèce et non de convertir cette grandeur en nombre de centimètres (d'ailleurs, au moment où l'exercice est proposé, seule la dizaine a pas été travaillée, pas la centaine). Ces tâches sont un approfondissement de celles que nous avons déjà évoquées relativement au mesurage et à la connaissance des ordres de grandeur des petits nombres d'unités métriques. Nous les indiquons seulement ici car la juxtaposition des unités qu'elles supposent leur donne une grande proximité avec celles que nous allons étudier maintenant.

D'autres collections ne précisent pas l'unité quand il s'agit d'évaluer une grandeur, ce qui ne veut pas dire qu'on ignore cette question. En effet, par exemple dans la leçon sur le décamètre, Marijon 1947 demande « Évaluez des distances dans la cour, puis mesurez-les » et la leçon précise « S'il [l'arpenteur] a mesuré 7 décamètres puis 6 mètres, il écrit 76 m, en plaçant le 7, qui représente les décamètres au rang des dizaines ». De même, ce n'est que dans la troisième leçon sur la masse, celle sur l'hectogramme, que Dumarqué prescrit de « peser des objets de la classe avec la série des poids allant du gramme au poids de 500 grammes ». Il est intéressant de noter que c'est le gramme qui est implicitement utilisé pour ces pesées et que, sur la même page, on demande aux élèves de reconnaître des objets qui pèsent moins de 5 hg. Chez Dumarqué, le discours explicatif de la leçon est « Quand on compte en grammes, le chiffre des centaines représente des hectogrammes ». Il s'agit donc de penser que chacun des chiffres du nombre qui mesure la masse est obtenu avec un ordre de grandeur d'unité.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Les exercices de pesée de Châtelet 1932 commencent par un encadré :

> **Exemple d'exercice** avec la boite de poids : Constituer un poids de 387 gr. :
>
> Pour les 3 centaines : 200 gr. et 100 gr. = 300 gr.
>
> Pour les 8 dizaines : 50 gr., 20 gr., 10 gr. = 80 gr.
>
> Pour les 7 grammes : 5 gr. et 2 gr. = 7 gr. (Châtelet 1932, p. 60)

Il prescrit ensuite de réaliser les poids suivants : 25 g, 34 g, 67 g, 900 g, 890 g, 435 g. Compte tenu de la composition des boîtes de poids, il semble clair qu'on utilise les connaissances, naturalisées, sur les décompositions additives des petits nombres (de 1 à 9), au profit de la numération de position. Toutefois, il ne s'agit pas juste de dire quel poids on utiliserait pour faire ces masses, mais de les réaliser effectivement[46].

Clap, *dans une leçon de révision*, demande de porter une longueur de 50 m, nous pensons qu'il s'agit alors de travailler soit la position : 5 en position de dizaine, donc de décamètre, soit la relation entre unités : 50 lu globalement comme 5 dizaines et donc 5 dizaines de mètres.

L'expression d'un mesurage dans certains assemblages d'unités constitue une pratique de référence pour la vie courante : en km / m, m / cm, cm / mm, kg / g notamment. Les assemblages que nous avons évoqués au début de ce paragraphe (dam / m, dm / cm par exemple) ne constituent pas des usages courants. Nous pensons que ces tâches occupent une niche particulière dans l'étude de la numération de position et parfois une autre dans l'étude des pratiques de référence de mesurage. Pour la numération, il s'agit de constituer une étape intermédiaire entre la tâche « mesurage d'un petit nombre d'unités dans une seule unité » et l'expression du mesurage dans une seule unité quand le nombre a plusieurs chiffres significatifs non nuls. En effet, pour exprimer la mesure dans une seule unité d'une grandeur, on juxtapose les mesures (lorsque le nombre est inférieur à 9) dans les différentes unités métriques en prenant soin de mettre éventuellement des zéros : si on a mesuré 9 dam et 3 m, on pourra écrire que ce sont 93 m (les décamètres en position de dizaine, les mètres en position d'unité). Pour le mesurage, il s'agit, pour le décamètre et mètre, d'enchaîner deux techniques avec le même instrument : on compte combien de fois on reporte le décamètre et on lit le nombre de mètre sur l'instrument en utilisant les graduations.

[46] Si cette tâche n'apparaît que dans ce seul manuel, la tâche qui consiste en l'évocation de cette tâche, à savoir, indiquer quel poids on utiliserait pour faire une masse donnée par sa mesure dans une unité, est en revanche assez répandue.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Du point de vue de la numération, dans ce paragraphe nous avons évoqué les tâches qui utilisent une technologie relative à la relation entre unité métrique et position, mais on est dans le registre matériel. Nous avons déjà évoqué ces tâches dans le registre symbolique au début de cette partie à propos des techniques et technologies pour les décompositions, nous y reviendrons dans le chapitre 6. Pour le moment, nous nous penchons sur un manuel différent des autres.

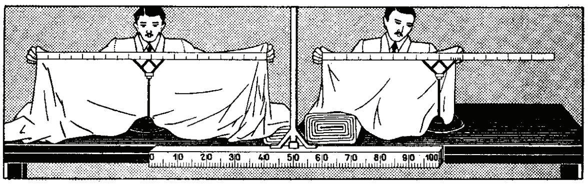
Un manuel précurseur ?

Châtelet est un mathématicien reconnu. Le manuel qu'il publie en 1932 est très original et s'écarte assez nettement du dogme de 1923, nous l'avons déjà évoqué, et il nous semble plausible, pour des raisons multiples, qu'il ait eu une forte influence par la suite. Nous nous attardons sur son approche du mesurage dans deux unités.

Il est le seul à décrire le principe du mesurage dans deux unités de longueur (par report de la grande unité et lecture du reste sur l'instrument) mais en fait, c'est le mesurage en mètres et centimètres qu'il indique.

LONGUEURS DE 100 A 1.000 CENTIMÈTRES

MESURER AVEC UN MÈTRE. — Pour mesurer la longueur d'un coupon d'étoffe le vendeur utilise une mesure de 1 mètre. C'est une règle rigide, graduée en dm. et cm.

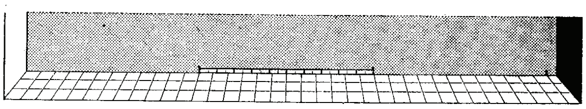


Réduit 20 fois.

Le vendeur a compté 7 mètres. Il reste en plus une longueur de 57 cm. La longueur du coupon est :

7 m. et 57 cm.

On mesure la largeur de la classe avec un mètre pliant :



Après avoir porté 3 fois le mètre tendu, il reste une longueur de 5 cm. La largeur de la classe est :

3 m. et 5 cm.

LES CENTAINES. — Un mètre est une longueur de 1 centaine de cm. Deux mètres, 3 mètres, ... forment 2 centaines, 3 centaines... de cm. On les écrit et on les nomme :

2 m. : 200 cm. : *deux cents cm.* **3 m. : 300 cm.** : *trois cents cm.*
4 m. : 400 cm. : *quatre cents cm.* **5 m. : 500 cm.** : *cinq cents cm.*
6 m. : 600 cm. : *six cents cm.* **7 m. : 700 cm.** : *sept cents cm.*
8 m. : 800 cm. : *huit cents cm.* **9 m. : 900 cm.** : *neuf cents cm.*

Dix mètres forment 10 centaines de centimètres. Dix centaines s'appellent **un mille** et s'écrivent **1 000.**

LONGUEURS. EN CENTIMÈTRES. — **Une longueur formée de m. et de cm. s'écrit en cm. avec un seul nombre de 3 chiffres :**

8 m. s'écrit : **800 cm.**
7 m. et 57 cm. s'écrit : **757 cm.**
6 m. et 5 cm. s'écrit : **605 cm.**

m.	dm.	cm
8	0	0
7	5	7
6	0	5

Pour lire 757 cm. on énonce le premier chiffre 7 qu'on fait suivre du mot cent, puis le nombre 57, formé par deux derniers chiffres, sept cent *cinquante-sept centimètres.*

(Châtelet 1932 CE1, pp. 52-53)

Cette leçon est la première sur les nombres de trois chiffres mais le nombre cent a été présenté avant. On apprend le mesurage dans deux unités : m / cm. On apprend à dire ces mesures. Puis on apprend qu'on dit les nombres comme on dit les mesures en mètres et centimètres : le mot cent vient remplacer le mot mètre. Contrairement à ce que nous avons vu précédemment,

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

il s'agit ici, très nettement, d'intégrer une pratique de référence pour le mesurage à l'étude de la numération. L'expression en mètres et centimètres prend en charge l'étude de la numération orale pour les nombres de trois chiffres. Et Bodard est le seul autre manuel qui prescrive aussi ce couplage d'unités en mesurage (sans référence à l'oral), dans son étude du CE2, limitée aux unités usuelles.

Dans les exercices, Châtelet demande de mesurer des longueurs de plus d'1 m (avec un mètre ruban 150 cm ou 200 cm), des tailles d'élèves, puis des dimensions de moins de 10 m, avec un mètre pliant, « dans la classe ou dans la cour » et de « les exprimer en cm ». Ceci est à relier à l'utilisation qu'il fait du centimètre en arithmétique : c'est cette unité et non le mètre qui structure l'étude de la numération de position.

Ce qu'on voit dans le choix de Châtelet, avec l'introduction de cette technique, c'est aussi la mise en retrait de la signification chiffre par chiffre d'une écriture chiffrée. Signalons que Châtelet ne travaille que très marginalement sur les ordres de grandeur des unités métriques.

- Styles de tâches

Dans ce chapitre, au 3.2, nous avons identifié deux familles de technologies relatives au système métrique. Il s'agit des relations entre unités métriques et de la relation entre position et unités de la numération. Nous avons montré d'une part comment à travers des techniques elles peuvent permettre de traiter certaines tâches relevant éventuellement du registre symbolique et d'autre part, dans la première partie de 3.4, comment elles sont mobilisées dans le registre matériel.

Aux tâches du registre matériel correspondent des tâches dans le registre symbolique, il s'agit notamment d'évocation des contextes que nous avons présentés. Nous nous intéressons maintenant à ces tâches, cette étude sera terminée dans notre 6ème chapitre.

Pour les tâches du registre symbolique dans l'étude du système métrique impliquant nos technologies de la numération, on observe à la lecture des manuels plusieurs types de formulations, nous les appelons *styles*. Nous les qualifions de *formel*, *intermédiaire* et *en contexte*. Nous donnons une liste d'exemple pour chaque style et des commentaires sur cette première classification.

Nous présentons d'abord des tâches « simples » qui mobilisent uniquement nos deux technologies, puis des tâches « complexes » dans lesquelles nos tâches simples interviennent comme des « sous-tâches ». Nous n'avons pas fait de recensement systématique des exercices.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Tâches simples

Pour le style « formel », on peut avoir par exemple :

- **décomposer** 326 g en g, dag, hg ;
- **convertir** en décamètres 3 km 5 hm.
- Que représente le 3 dans 352 m ? dans 136 m ?
- Lisez les nombres suivants en indiquant ce que représente chaque chiffre : 128 l – 250 l. (Exemple : 128 l = 1 hl 2 dal 8 l)
- Décomposer en leurs unités les nombres exprimant les masses suivantes : 521 g ; 607 g

Nous qualifions ce style de « formel » car les mots utilisés réfèrent presque directement aux techniques et technologies repérées au 3.2. Ils n'évoquent pas de contexte de la vie courante (en dehors de ce que peuvent évoquer les noms des unités).

Nous avons identifié un style « intermédiaire » dans lequel il n'y a ni contexte (en dehors du nom des unités) et ni mot qui réfère directement à aux techniques ou technologies repérées au 3.1, par exemple : **combien de** litres dans 6 hl ? On peut aussi avoir une formulation très neutre : **écrire** en grammes, 3 dag 2 g ; **écrire** en dag et g, 32 g ; **écrire** en dag, 320 g. Il est possible que ces tâches correspondent explicitement à des besoins pour la vie courante. Les mots utilisés s'éloignent de la formulation des techniques et technologies du 3.2.

Pour le type « en contexte », il s'agit de « problèmes », nous avons relevé par exemple :

- Quels poids faut-il utiliser pour peser 326 g de viande ?
- Avec 1 kg de graines, combien un grainetier peut-il faire de sachets de 100 g ?
- Mon oncle boit un litre de bière chaque jour, combien met-il de temps pour en boire 1 hl ?
- Pour aller à la fête, j'ai 1 pièce de 100 f, 2 pièces de 10 f et 6 de 1 f. J'ai … f.
- Quelle longueur en mètres, mesure-t-on quand on porte la chaîne d'arpenteur 28 fois ? 9 fois ? 7 fois et 8 m ? 14 fois et 3 m ?
- Avec le vin contenu dans un fût plein, on a rempli un hectolitre, un demi-hectolitre, un double décalitre, un décalitre et un demi-décalitre. Quelle est, en litres, la contenance du fût plein ?
- Combien faut-il d'arrosoirs de 1 dal pour remplir un tonneau de 5 hl – de 10 hl – de 60 l – de 150 l ?

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Dans ces tâches, les connaissances relatives au système métrique sont les mêmes connaissances que pour les styles précédents mais il y a en plus un contexte à décrypter. Les mots utilisés ne réfèrent plus du tout à ceux utilisés pour la formulation des techniques et technologies du 3.2.

Nous retenons deux choses de ces styles. Tout d'abord, il nous semble important que dans le style « en contexte » les grandeurs sont évoquées en référence à des actions explicites sur les objets. Elles peuvent l'être à l'aide d'unité qui sert à exprimer une quantité ou à l'aide d'un instrument de mesure (éventuellement par l'évocation d'une pratique de mesurage de référence), parfois la distinction entre les deux n'est d'ailleurs pas évidente à faire. Si l'utilisation des instruments peut être rattachée à l'évocation des pratiques de la vie courante que nous avons présentée précédemment, ceci est peut-être moins évident pour l'utilisation des unités métriques. En effet, on voit déjà dans le livre de Châtelet, en 1932, que certaines ne correspondent probablement pas à des pratiques en usage dans la vie courante.

Ensuite, nous avons qualifié le premier style de « formel », il nous semble toutefois que l'intention de ces tâches n'est pas formelle. Ces tâches font écho aux tâches prescrites dans le registre matériel et aussi à celles prescrites dans le registre des pratiques de la vie courante évoquées (style en contexte).

Tâches complexes

Nombre de problèmes portant sur les quatre opérations comportent des sous-tâches de changements d'unités. Ces sous-tâches sont celles que nous avons repérées dans le paragraphe précédent. De façon générale, on rencontre ces situations quand deux grandeurs différentes (ou davantage) d'une même espèce exprimées dans plusieurs unités interviennent dans un même calcul.

On retrouve le style « formel », les calculs sont en général écrits en ligne. Nous donnons trois exemples. Boucheny demande (p. 55) :

259. Convertir en litres et effectuer :

1° $4^{hl} + 5^{hl}$	3° $5^{hl} + 30^{dal}$	5° $30^{dal} + 4^{hl}$
2° $9^{hl} - 3^{hl}$	4° $8^{hl} - 50^{dal}$	6° $70^{dal} - 3^{hl}$.

260. Convertir en décalitres et effectuer :

1° $5^{hl} + 3^{hl}$	3° $4^{hl} + 300^{l}$	5° $600^{l} + 300^{l}$
2° $8^{hl} - 3^{hl}$	4° $700^{l} - 3^{hl}$	6° $900^{l} - 300^{l}$.

261. Convertir en hectolitres et effectuer :
$500^{l} + 400^{l}$; $900^{l} - 400^{l}$; $60^{dal} + 30^{dal}$; $90^{dal} - 30^{dal}$.

Dumarqué (p. 159) :

Effectuer les opérations suivantes après avoir converti en litres :

1330. 3 hl. + 6 hl. 8 dal. + 8 dal. + 2 dal. 5 l. = . . .

1331. 5 hl. 9 l. + 4 hl. 7 dal. 6 l. + 45 dal. + 374 l. = . . .

1332. 11 hl. 9 l. — 45 dal. 7 l. = . . .

87 dal. 2 l. — 2 hl. 9 dal. 1 l. = . . .

1333. 4 hl. 7 l. × 8 = . . . ; 6 hl. 9 dal. 3 l. × 9 = . . .

1434. 1 hl. 8 dal. 1 l. × 57 = . . . ; 46 hl. 9 l. × 38 = . . .

1335. 5 hl. 7 dal. 6 l. : 6 = . . . ; 8 hl. 8 dal. 2 l. : 9 = . . .

Denise CE1 (p. 89) :

Trouvez le résultat en mètres :

7 dam + 3 dam = … m

1 hm – 5 dam = … m

5 dam + 30 m = … m

1 hm - 80 m = …

8 dam + … m = 1 hm

On trouve aussi le style « en contexte » avec des problèmes portant sur les quatre opérations, par exemple :

- Une rue a 9 hm de longueur. On en a pavé le tiers. Quelle est, en mètres, la longueur pavée ? Quelle longueur, en décamètres, reste-t-il à paver ? (Boucheny, p. 53, 20e leçon. L'hectomètre)
- Pierre court sur une piste de 200 m. Il s'arrête après avoir parcouru 7 dam 8 m. A quelle distance de l'arrivée s'est-il arrêté ? (Bodard CE1, p. 88)
- Un marchand de vin vend, à 3 f le litre, trois pièces de vin : l'une de 2 hl, l'autre de 12 dal, la 3e de 75 l. Combien reçoit-il ?
- Pour mesurer 1 m quelle longueur en cm manque-t-il à un ruban de 60 cm ? de 80 cm ? de 95 cm ? de 75 cm ? (Denise CE1, p. 99, « le mètre : une centaine de centimètres »)

Nous n'avons pas fait d'étude systématique quant à la présence de ces problèmes dans les différents manuels.

- Conclusions

Pour le moment nous avons relevé et réorganisé toutes nos tâches qui impliquent l'utilisation des instruments de mesure en quelques types de tâches :

- certaines consistent en l'apprentissage de la grandeur absolue des unités métriques à travers un petit nombre d'unités (de 1 à 9),
- d'autres consistent à apprendre les relations entre unités métriques,
- d'autres enfin semblent contribuer à mettre en relation le mesurage et la notation positionnelle pour les grandeurs mesurées.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Enfin, nous avons vu comment les problèmes d'arithmétique en évoquant les pratiques de la vie courante pour le mesurage (unités métriques et techniques de mesurage) contribuent à faire fonctionner, dans un registre d'évocation, les mêmes technologies que la manipulation des grandeurs-objets.

3.5. Que nous apprennent nos connaissances didactiques actuelles sur l'étude ancienne du système métrique ?

- Apport sur l'étude des grandeurs

Depuis les travaux piagétiens, il est admis que la comparaison participe de la connaissance des propriétés des grandeurs. La comparaison est présente dans nos manuels. Par ailleurs, on peut penser que l'estimation a le même genre de qualités, surtout lorsqu'elle est suivie d'une vérification. De même, avons-nous aussi rencontré des tâches qui éprouvent la « conservation des volumes ». Comparaison et conservation sont d'ailleurs présentes pour plusieurs ordres de grandeur, ce qui implique aussi à des moments différents de l'année. Cette particularité peut permettre de revenir sur certaines connaissances.

Lorsqu'il s'agit de mesurer (en fabrication ou en évaluation), on peut penser que les instruments qu'on utilise font qu'on mobilise implicitement l'addition de grandeurs soit par report d'unités, soit par estimation. La lecture d'une graduation n'apparaît, éventuellement, nous l'avons vu, que dans un deuxième temps, après avoir reporté la « grosse » unité et qu'il y a un reste qu'on souhaite évaluer. Le cas de la masse est un peu différent car on ne reporte pas mais on juxtapose des instruments qui ne sont pas toujours unitaires. Fluckinger & Brun (2006) pointent la difficulté de concevoir le rapport entre des unités pour les longueurs. Nous avons indiqué des tâches en ce sens dans nos manuels surtout lorsqu'il s'agit de fabriquer des instruments ou de vérifier des relations.

Nous avons relevé la grande diversité des objets à mesurer puisqu'il correspondent à une diversité d'usages des grandeurs. Fluckinger & Brun (2006) pointent la difficulté pour des élèves de 2ème primaire de concevoir la distance entre deux plots distants de 3 ou 4 m lorsqu'ils doivent la mesurer avec une baguette de 25 ou 50 cm. Ceci semble construit en 3ème année. Pour les tâches de mesurage de longueur dans nos manuels anciens nous avons indiqué qu'on demandait notamment de mesurer des distances entre deux objets.

A ces connaissances des propriétés des grandeurs, il faut ajouter des connaissances « absolues » des ordres de grandeur. Il semble que ce sont les ordres de grandeur des unités

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

métriques (et de leur multiples de 1 à 9) qui permettent de développer ces connaissances « absolues » des grandeurs.

Fluckinger & Brun notent que la 3ème primaire est une classe charnière pour les acquisitions relatives à la mesure. Les manuels que nous avons étudié sont relatifs aux niveaux 2ème et 3ème primaire.

Il nous semble que les tâches proposées pour l'étude du système métrique sont susceptibles de contribuer à élaborer certaines connaissances cruciales relatives aux propriétés des grandeurs. Du point de vue l'âge, même si on sait que cette question ne se pose pas pour toutes les grandeurs en même temps, les niveaux CE1 et CE2 sont sans doute des niveaux plutôt pertinents pour contribuer au développement des élèves. Il faudrait préciser cela par une étude plus fine.

- Apport à l'étude de la numération

Nous donnons maintenant deux extraits de textes anciens, le premier est tiré d'un rapport des inspecteurs généraux à la fin des années 20 (il réfère aux instructions de 1923), le second est tiré de la préface de (Mortreux, sd avant 1923) :

> *3. Multiples décimaux et numération des nombres entiers.* Un assez grand nombre de conférences ont, nous l'avons dit, mis en doute l'avantage du secours qu'apportent les multiples décimaux dans l'étude de la numération entière. Nous ne saurions prétendre que l'étude du système métrique doit précéder celle de la numération. Mais on a trop oublié, en discutant de cette troisième question, qu'à l'heure où il s'agit de rendre mieux assises et plus générales des notions déjà acquises sur la numération et où il serait fastidieux et [vain] de manier des marrons, des billes, des « unités discrètes », la distance au village voisin, le poids d'un objet, la capacité d'un vase, peuvent aisément donner l'idée de mille, dix-mille, etc. (Rapport de MM. les inspecteurs généraux sur les conférences pédagogiques de 1928, cité par Butlen, 1985)

> 1° de donner une notion très nette des nombres et des mesures du système métrique.
>
> A côté de nombreux exercices de lecture et d'écriture, nous avons proposé des exercices intéressants de formation et de décomposition des nombres, de mesurage et d'évaluation des grandeurs qui préparent au calcul mental et habituent à voir sous les chiffres la quantité qu'ils représentent. (Mortreux, sd)

Dans l'enseignement du système métrique tel qu'il semble apparaître dans les manuels, nous pensons avoir repéré la logique suivante, qui éclaire ces deux textes, et que nous présentons de manière caricaturale.

1) Dans la leçon sur l'unité d'ordre 1 (m, g, l) : on mesure des objets dont l'ordre de grandeur est de 1 à 9 unités, on a donc des nombres de un chiffre (puisqu'on n'a pas de sous-unité).

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

2) Dans la leçon sur l'unité d'ordre 2 (dam, dag, dal) : on mesure des objets dont l'ordre de grandeur est de 1 à 9 unités d'ordre 2, on a donc des nombres de un chiffre de cette unité d'ordre 2 et de 2 chiffres dans l'unité d'ordre 1.
3) Dans la leçon sur l'unité d'ordre 3 (hm, hg, hl) : on mesure des objets dont l'ordre de grandeur est de 1 à 9 unités d'ordre 3, on a donc des nombres de un chiffre de cette unité d'ordre 3 et de 3 chiffres dans l'unité d'ordre 1.
4) Ce travail peut être poursuivi avec les unités km et kg.

Il semble donc que dans le travail du système métrique tel qu'il est proposé, chaque position dans l'écriture chiffrée est rattachée à un ordre de grandeur.

Le rattachement d'un ordre de grandeur à une position est considéré comme un facteur de compréhension de la numération de position par DeBlois (1996). Plus généralement, la connaissance des nombres est développée en relation avec les ordres de grandeur (de grandeurs), ce qui constitue un aspect essentiel de la connaissance des nombres (Verschaffel & De Corte, 1996, pp. 109-110).

DeBlois précise aussi que la mise en relation matérielle de deux unités de la numération, en fabriquant une nouvelle unité à partir de 10 plus petites, est aussi un facteur de compréhension de la numération. Le travail sur le continu a d'ailleurs une particularité de ce point de vue puisqu'on ne voit plus, par exemple, les 10 mètres qu'on a reportés une fois qu'on a fabriqué une longueur de 10 mètres qui constitue la nouvelle unité qu'on voit en revanche. Dans le discret, on continue toujours à voir les petites unités (sauf si on les met dans des sacs opaques mais du coup on ne voit plus la « quantité »). Nous ne savons pas si une des deux situations est plus favorable que l'autre pour l'apprentissage. Le cas de la monnaie est différent puisque les petites unités disparaissent « matériellement » dans l'échange, la grandeur n'est plus visible que par un nombre.

- Écologie et rôle des pratiques de la vie courante

Voici trois exemples de tâches, une de comparaison, une autre d'estimation et une dernière pour la « conservation » : leçon le kilogramme, citer des objets plus lourds qu'un kilogramme ; leçon « le décamètre », estimer la longueur de la cour, vérifier avec un décamètre ; leçon le litre « vérifier si les différentes sortes de litres ont la même contenance ». Ces *sortes de litres* sont les instruments de référence (litre en bois, en étain, en fer blanc aux usages spécifiques). On voit que ces tâches de comparaison, d'estimation et de conservation

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

sont relatives aux unités métriques, et mobilisent les instruments de mesure de référence mais n'impliquent pas de mesurage.

De même pour l'étude de la connaissance de « n unités », il nous semble qu'on peut dire qu'on utilise des instruments de référence dans un usage qui n'est parfois pas celui de référence. Par exemple, dans la leçon « le mètre », pour mesurer 2 mètres, on portera deux fois l'instrument pour avoir à compter les mètres et on n'utilisera donc pas un double mètre.

Enfin, il nous semble que quand on vérifie qu'il y a deux « décimètres en carton » dans le double décimètre usuel, on cherche à élucider comment un instrument usuel est constitué tout en contribuant à la connaissance des propriétés de la longueur, de même quand on vérifie ou qu'on fabrique un instrument qui a pour grandeur une unité multiple d'une autre précédemment étudiée.

Dans les manuels, les tâches sur la connaissance des unités se développent à partir du moment où on décide d'articuler système métrique et numération. Elles sont donc absentes chez Brouet et très peu développées chez Minet. Mortreux ne propose pas de tâche de mise en relation d'unités successives alors qu'il propose des tâches d'estimation pour presque chaque unité. Quand à Clap qui est plus tardif mais qui n'est pas conforme au programme de 1923, il propose à la fois les tâches d'estimation et de mise en relation des unités de façon systématique pour les deux grandeurs qu'il étudie unité par unité : la longueur et la capacité. Ce sont les besoins en numération (identifiés par le programme ou les manuels) et non les pratiques de la vie courante qui déterminent les unités utilisées. Ces besoins en numération déterminent les instruments utilisés et les ordres de grandeurs des objets usuels mesurés.

- Retour sur notre méthodologie

Si l'entrelacement des leçons de numération et de système métrique nous est apparu assez rapidement au cours de notre travail, il n'en est pas de même de la logique des tâches qui mettent en relation les grandeurs-objets et les nombres. C'est un travail systématique de relevé des différentes tâches dans le registre matériel, dans différents manuels, associé à la bibliographie sur les connaissances didactiques actuelles qui nous a permis de mettre en évidence cette logique. Il nous semble d'ailleurs que certains de nos manuels ignorent cette logique : soit qu'ils ne la connaissent pas, soit qu'ils ne veulent pas proposer les tâches nécessaires pour la faire fonctionner, soit que ces tâches ne sont pas indiquées car trop connues des enseignants. Tout en ignorant cette logique, ils utilisent l'entrelacement qui est sans doute contraignant mais peut-être confortable. Du point de vue de l'enseignant qui

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

utiliserait tel ou tel manuel, il semble nécessaire que la logique de l'apprentissage des nombres que nous avons mise en évidence soit une connaissance didactique de l'enseignant, en plus du manuel, si on veut que cette logique soit effective dans les tâches qu'il propose aux élèves.

Brousseau (2002) dit qu'il a tenté de caractériser l'étude des grandeurs dans l'enseignement ancien sans y parvenir véritablement. Il nous semble que si nous sommes parvenue à repérer cette articulation entre étude des nombres et système métrique c'est essentiellement au choix du niveau que nous avons fait que nous le devons. Brousseau s'était placé au cours supérieur. Une étude très superficielle de l'enseignement des grandeurs, longueur, masse et capacité, dans des manuels de cours moyen semble montrer que les tâches de mesurage y sont beaucoup moins développées qu'au cours élémentaire (elles peuvent l'être d'ailleurs très diversement sur les deux niveaux du CE), si ce n'est inexistantes. Cet élément aurait par ailleurs tendance à conférer une certaine fragilité à l'articulation entre numération et système métrique, si elle ne vit que sur une année de l'enseignement primaire. On peut penser que pour les autres années, c'est essentiellement dans le registre symbolique, notamment dans la résolution des problèmes d'arithmétique, et au niveau des technologies que cette articulation est susceptible d'être mise en œuvre.

- Pour conclure

Dans notre première partie, nous avons mis en évidence à travers les sommaires des manuels qu'une articulation entre système métrique et numération se met en place au début du siècle et qu'elle se traduit notamment par une chronogenèse plus ou moins imposée pour l'étude de ces deux domaines. À travers l'étude des technologies nous avons en fait mis en évidence la complémentarité de deux technologies élémentaires : l'une de système métrique et l'autre de numération. Ces technologies semblent se perfectionner au début du siècle pour permettre l'articulation entre système métrique et numération. Certaines fois, ce sont des techniques qui sont formulées et elles apparaissent très proches des technologies qui les justifient, ces techniques peuvent être entendues comme un découpage de la tâche à effectuer en sous-tâches, chacune pouvant être traitée par une des deux technologies élémentaires. La recherche de l'articulation entre tâches de mesurage et numération permet de mettre en évidence des tâches qui nous semblent significatives de l'articulation. Considérons par exemple la tâche : « citer des objets plus ou moins lourds qu'un kilogramme, vérifier ». Cette tâche anodine, si elle est prise dans un bon réseau trophique, permet en fait de contribuer à quatre domaines de connaissances : la numération, les propriétés des grandeurs, le système métrique, les pratiques

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

de mesurage de référence pour la vie courante. Pour chaque domaine, la contribution peut en effet être identifiée comme suit :

- la connaissance du millier de gramme (et donc des nombres de quatre chiffres),
- la connaissance de la grandeur masse : il s'agit de soupeser des objets et éventuellement de vérifier un équilibre en utilisant un instrument,
- la connaissance de l'unité métrique de référence : le kilogramme et de son ordre de grandeur,
- la connaissance des instruments de référence : la masse marquée d'un kilogramme et la balance.

Après cette étude du système métrique et de ses rapports avec la numération nous engageons une étude plus sommaire de l'enseignement du sens des opérations.

4. Écologie de l'enseignement du sens des quatre opérations

Nous pensons avoir mis en évidence le rôle des grandeurs et des pratiques de la vie courante pour l'étude de la numération, peut-on dire quelque chose du rôle des grandeurs dans l'étude du sens des quatre opérations ? Plus généralement, une étude assez globale des manuels peut-elle nous permettre de commencer à caractériser l'écologie de l'étude des quatre opérations et de voir en particulier le rôle qu'y jouent les grandeurs ?

L'étude du sens des opérations va apparaître dans plusieurs lieux. Le premier auquel on pense est bien sûr celui de la découverte d'une opération puis de l'apprentissage de sa technique opératoire mais ce n'est pas la seule niche. Quelles sont les niches pour l'étude du sens des quatre opérations ? Pour quelles opérations ? Pour quelles grandeurs ? Comment interviennent les grandeurs dans l'étude des opérations ?

Pour étudier ces questions, nous nous appuyons en grande partie sur des sommaires de manuels. Nous consultons également quelques leçons. À ce propos, compte tenu de la relative hétérogénéité des pratiques des manuels, les éléments que nous indiquons sont souvent davantage de nature impressionniste que quantitative.

Rappelons que nous avons utilisé les mêmes manuels que pour l'étude précédente à l'exception de Brouet et Denise. Nous avons en outre utilisé des extraits de Vassort CECM.

4.1. L'étude des différentes opérations et de leurs techniques opératoires

Dans nos manuels, l'ordre de présentation des quatre opérations est invariablement : addition, soustraction, multiplication et division.

- Une leçon type sur l'étude des opérations

On trouvera bien sûr des exceptions (quelques leçons dans un manuel ou même des manuels qui font exception) mais il nous semble qu'on peut décrire une leçon type sur l'étude des opérations des années 30 à 70. Elle se présente sous la forme suivante :

- Une partie « cours » en deux temps :
  - un (ou plusieurs) problème d'arithmétique résolu. La proposition de solution pour la tâche problématique consiste en la présentation d'une technique élaborée le plus souvent à partir d'éléments technologiques donnés dans le contexte du problème,
  - l'énoncé de la technique : la règle décontextualisée,
- Une partie « exercices », avec deux types d'exercices, le plus souvent :
  - des exercices d'entraînement pour appliquer la notion dans son aspect calculatoire (1ère forme d'utilisation de la technique),
  - des problèmes d'arithmétique d'entraînement pour utiliser la notion en contexte (et non les éléments technologiques). Souvent ces problèmes ne se limitent pas à l'application automatique de la règle : problèmes avec opérations à enchaîner ou opérations parallèles, exercices *intrus* entretenant des notions anciennes (2ème forme d'utilisation de la technique).

Ci-après nous donnons deux types d'exemples : le premier pour l'introduction d'une opération, le second pour l'apprentissage d'une partie d'une technique opératoire. Précisons que d'après les programmes (de 1882 à 1945), les élèves étudient les quatre opérations au CP (peut-être une exception avec l'absence de division au CP dans le programme de 1942). Ainsi, pour aucune des quatre opérations le cours élémentaire (que nous étudions) n'est l'occasion du premier travail avec l'opération. Nous ne savons pas comment on étudie les techniques opératoires au CP de 1930 à 1970, ni ce qu'on en apprend. Précisons toutefois que, comme le signe opératoire est enseigné dès le début de l'étude, l'élaboration d'une technique opératoire et l'enseignement éventuel des propriétés de l'opération participent véritablement de l'étude du sens de l'opération. On pourra d'ailleurs voir dans les exemples ci-après que la résolution des problèmes d'arithmétique qui suivent la partie cours fait souvent appel à plusieurs opérations.

L'« introduction » d'une opération comporte :

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

- toujours, un ou plusieurs exemples d’usage sur plusieurs grandeurs ou plusieurs structures (ceci ne signifie pas qu’on a procédé de la même façon au CP et qu’on a enseigné plusieurs usages différents simultanément),
- souvent, des éléments langagiers.

14 LE CALCUL A L'ÉCOLE PRIMAIRE

4e leçon.

ADDITION

1. Ajouter des collections.

Il y a 3 poires sur une assiette et 2 poires dans la main de Paul.

Paul ***met*** ses 2 poires avec les 3 poires de l'assiette : il ***réunit*** les deux collections de poires.

Paul ***compte*** les poires : il y en a 5 *en tout*.
En *ajoutant* 2 poires à 3 poires, on obtient 5 poires.

2. Ajouter des longueurs. — Louis avait deux morceaux de canne à pêche :
l'un de 3 mètres l'autre de 2 mètres.

Il ***ajoute*** ces morceaux l'un à l'autre en les mettant ***bout à bout.***

Il ***mesure*** la longueur de la canne. Il ***compte*** les mètres. Il y en a 5 en tout. En ajoutant 2 mètres à 3 mètres, on obtient 5 mètres.

3. Addition de nombres. — Qu'il s'agisse de poires ou de mètres, *trois* ***et*** *deux font cinq*.
Compter que 3 et 2 font 5, c'est faire une ***addition.***

Au lieu de 3 et 2 font 5
↓ ↓
on écrit : 3 + 2 = 5
ce qui se lit : 3 **plus** 2 **égale** 5.

4. Définition. — Le *résultat*, 5, de l'*addition* des nombres 3 et 2, s'appelle ***somme*** de ces nombres. (On dit aussi *total*.)
Les nombres 3 et 2, que l'on a additionnés, sont les **termes** de la *somme*.

Remarque. — ***On n'additionne que des nombres d'unités portant toutes le même nom.***

CALCUL ET ARITHMÉTIQUE 15

5. Comment on fait une addition (sans retenue).

a) ***Nombres d'un chiffre.*** Exemple : 3 + 2 + 4.
On les pose en ligne ou en colonne :
3 + 2 + 4 = 9 **ou :**

$$\begin{array}{r} 3 \\ 2 \\ +\ 4 \\ \hline 9 \end{array}$$

On dit : 3 et 2 font 5 ; 5 et 4 font 9.

b) ***L'un des termes, au moins, est formé de dizaines et d'unités.***

Exemples : 32 + 4 et 32 + 24.

HHH II / IIII / HHH IIIIII → 3 6

$$\begin{array}{r} 32 \\ +\ 4 \\ \hline 36 \end{array}$$

HHH II / HH IIII / HHHHH IIIIII → 5 6

$$\begin{array}{r} 32 \\ +\ 24 \\ \hline 56 \end{array}$$

Unités sous unités, dizaines sous dizaines, le signe + de l'addition n'est pas oublié.

On fait la somme des unités et on écrit le résultat sous les unités, puis on fait de même la somme des dizaines.

PROBLÈMES ORAUX ET OPÉRATIONS

1. Paul a 8 plumes et son voisin en a 6. Ensemble ils ont.....
2. Marie a 8 ans. Dans 3 ans, elle aura.....
3. Un enfant a 10 dents dans le haut de sa bouche et 8 dents dans le bas. Combien en a-t-il en tout?
4. Un mur avait 6 mètres de haut. Les maçons ont augmenté cette hauteur de 5 mètres. Quelle hauteur ce mur a-t-il maintenant?
5. J'ai 3 sœurs et 4 frères. Combien y a-t-il d'enfants dans ma famille? *Attention!*
6. Figurez, posez et comptez ***(Additions sans retenue, le total ne dépassant pas 99).***
21 + 7 = 36 + 3 = 42 + 5 =
33 + 65 = 21 + 48 = 64 + 14 =
8. Posez et comptez : 52 + 6 = 71 + 27 = , etc.
7. Ajoutez les chiffres manquants ***(Préparation à la soustraction).***

? + 3 = 8

$$\begin{array}{r} ? \\ +\ 3 \\ \hline 8 \end{array}$$

6 + ? = 15

$$\begin{array}{r} ? \\ +\ 8 \\ \hline 11 \end{array}$$

Combien font 2 litres d'eau, 200 grammes de carottes, 3 hectogrammes de pommes de terre et 5 grammes de sel?
— Réponse : Cela ferait un bon potage et une « mauvaise » addition.

Marijon 1947 CE1 : première leçon sur l’addition (4ème leçon, pp. 14-15)

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

16 LE CALCUL A L'ÉCOLE PRIMAIRE

5e leçon.

SOUSTRACTION

1. Oter. Soustraire. — *Louis avait 9 billes. Il en donne 4 à Paul. Combien lui en reste-t-il ?*

Louis ***compte*** les 4 billes qu'il ***ôte*** et qu'il aura en ***moins.***
Il ***compte*** ensuite les 5 billes qui lui ***restent.***
De 9 billes, Louis a ***soustrait*** 4 billes. Il ***reste*** 5 billes.
On écrit : 9 billes — 4 billes = 5 billes.
Ce qui se lit : 9 billes, ***moins*** 4 billes, égale 5 billes.
On fait une **soustraction** quand on enlève, quand on *ôte* un certain nombre d'objets d'une collection.

2. Définition. — Le résultat de la soustraction s'appelle la ***différence*** (ou le ***reste***).

Les deux autres nombres sont les ***termes*** de la soustraction.

3. Calculer ce qui manque. — *Jean avait 8 noisettes. Il n'en* ***reste*** *que 5 dans sa poche percée. Combien lui en* ***manque-t-il?***
Il lui manque :
8 noisettes qu'il avait **moins** 5 noisettes qu'il a = 3 noisettes.
○○○ ●●●●● — ●●●●● = ○○○

4. Comment on fait une soustraction.
1er Exemple : ***Les deux termes n'ont qu'un chiffre.***

	8 noisettes
Posons le petit nombre au-dessous du plus grand	— 5 noisettes
Tirons un trait	
Comptons : 5 (*ôté*) de 8, reste **3**.	= **3** noisettes

On peut dire aussi 5 et 3, 8, *comme si l'on additionnait au nombre écrit 5, le nombre à écrire 3, pour obtenir 8.*

2e et 3e Exemples : ***Le plus grand nombre est formé de dizaines et d'unités.***

Problème. — ***Louis a cueilli 36 poires et 36 pommes.***
Son panier étant percé, il a perdu 4 poires et 14 pommes. Il lui reste ..... poires et ..... pommes.

CALCUL ET ARITHMÉTIQUE 17

Figurons et écrivons les opérations :

Fruits cueillis :	HHH IIIIII	36 poires		HHH IIIIII	36 pommes
Fruits perdus :	IIII	— 4 »		H IIII	— 14 »
Il reste :	HHH II	32 »		HH II	22 »

Règle. — ***On écrit le plus grand nombre ; puis le petit nombre au-dessous, en posant les unités sous les unités, les dizaines sous les dizaines.***
On met le signe de la soustraction (—) et on tire un trait.

En commençant par la droite, on soustrait les unités des unités, les dizaines des dizaines.

Remarque. — Dans le 2e exemple, il n'y a pas de dizaines au petit nombre, les 3 dizaines du nombre supérieur restent, on écrit 3, au reste, dans la colonne des dizaines.

PROBLÈMES ORAUX ET OPÉRATIONS

1. J'avais 18 noisettes. J'en ai mangé 10. Il m'en reste.....
2. 15 moineaux étaient sur un mur, 8 s'envolent. Il en reste alors.....
3. Terrain à bêcher = 15 m.

Reste : ? m. : Partie bêchée, 9 m.
4. Ma mère a coupé un gâteau en 10 morceaux. Mes 4 frères *et moi* avons eu chacun un morceau. Combien de morceaux reste-t-il ?
5. Jules et Jean ont pris ensemble 17 petits poissons. Jean en a attrapé 8. Combien Jules en a-t-il pris?
6. Louise a laissé tomber 16 perles sur le plancher. Elle en a retrouvé 7. Combien lui en manque-t-il?
7. J'ai 7 oranges. Combien m'en manque-t-il pour en avoir une douzaine ?
8. Marie a 8 ans. Combien lui manque-t-il d'années pour avoir 17 ans?
9. Paul a perdu 12 billes. Il lui en reste 7. Combien en avait-il?
10. Louis était au haut de l'escalier. Il a descendu 13 marches et sauté par-dessus les 4 marches restantes. Combien l'escalier a-t-il de marches?
11.

19	58	47	98	94	68	99	77
— 4	— 6	— 2	— 1	— 41	— 52	— 18	— 25.

Marijon 1947 CE1 : première leçon sur la soustraction (5ème leçon, pp. 16-17)

Pour le cours sur l'addition, différentes grandeurs sont mobilisées : discret, longueur, nombre pur. On pourra noter comment les nombres abstraits sont tirés des nombres concrets : « Qu'il s'agisse de poires ou de mètres, trois et deux font cinq ». Pour le cours sur la soustraction, ce sont différentes structures sémantiques qui sont proposées : calcul du reste et de la transformation dans des situations de transformation négative. Dans les exercices de la leçon sur l'addition, on trouve des problèmes uniquement d'addition - l'un d'entre eux comporte néanmoins un « piège » (le n° 5) -, des additions sur les nombres purs à plusieurs chiffres et des additions à trou (dans la table) en préparation de la soustraction. Précisons que l'addition est la première opération étudiée dans l'année ce qui implique qu'on ne trouve pas de « problèmes de soustraction » dans cette leçon, néanmoins il pourrait y avoir des problèmes qui se résolvent par addition à trou, ici elles sont réservées aux nombres purs. Les exercices de la leçon sur la soustraction comportent des problèmes d'application directe pour le calcul du reste (n°1 à 4), le n°4 comporte un piège. Les exercices 6 à 8 sont aussi des exercices d'application simples, des calculs de la transformation négative. Les exercices 9 et 10 sont des « problèmes d'addition » : calculer un état initial dans une transformation négative pour le premier, calculer un tout dans une situation de réunion pour le second. L'exercice 11 consiste à calculer des soustractions sur les nombres purs.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Pour la partie cours signalons le nombre important de formulations des différentes situations. On peut certes penser qu'il y a la volonté d'enseigner les mots inducteurs d'opérations : en tout, réunir, ajouter, bout à bout pour l'addition ; moins, manque, reste, enlever, ôter pour la soustraction. Néanmoins à ces mots inducteurs s'ajoutent de nombreux éléments langagiers et graphiques qui décrivent les situations. Il y a le vocabulaire des grandeurs : mesurer, bout à bout pour la longueur ; compter, mettre avec pour le discret. Il y a aussi, dans la leçon sur la soustraction, deux mises en relation avec l'addition qui ont un caractère technologique.

Pour les deux thèmes, les différentes grandeurs (longueur, durée, discret) sont présentes dans les exercices. Le mètre a été étudié en leçon 3. En outre, mais c'est une particularité de ce manuel, la technique opératoire est traitée en partie dans ces leçons introductives. Signalons que les éléments technologiques sont donnés hors contexte, ce qui est rare (les éléments technologiques pour l'addition avec retenue sont d'ailleurs donnés en contexte dans ce même manuel).

L'enseignement d'un élément d'une technique opératoire ou d'une propriété d'une opération se présente souvent sous la forme d'un problème résolu qui met en jeu ce qui est nouveau. La résolution du problème donne des éléments technologiques :

DIVISION PAR PLUSIEURS DIZAINES

VITESSE MOYENNE. — Problème. — *Une voiture automobile parcourt, sur une piste,* **72 km.** *en* **50 minutes.** *Combien a-t-elle parcouru,* **en moyenne**, *par minute ?*

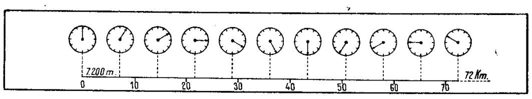
On calcule comme si l'automobile parcourait la même longueur chaque minute.

50 mn., c'est 10 fois 5 mn. En divisant la longueur par 10, on obtient l'espace parcouru en 5 mn. :

72.000 m. : 10 = 7.200 m. ; reste 0.

En divisant ce premier quotient par 5 on obtient l'espace parcouru en 1 mn. :

7.200 m. : 5 = **1.440 m. par mn. ;** *reste* **0.**



Solution. — L'automobile parcourt en moyenne :
72.000 m. : 50. = **1.440 m. par mn.,** *reste* **0.**

POSSIBILITÉ D'ACHAT. — Problème. — *Une commune peut acheter des tables de classe à* **70 fr. pièce.** *Elle dispose d'une somme de* **2.283 fr.** *Combien pourra-t-elle acheter de tables ?*

On peut payer une table en donnant 7 pièces de 10 fr.

La somme de 2.283 fr. peut être formée de 228 pièces de 10 fr. et il reste 3 fr.

On répartit les 228 pièces en paquets de 7 :

228 : 7 = 32 ; reste 4 pièces.

On peut acheter **32 tables.** *Il restera* 4 pièces de 10 fr. et 3 fr., ou **43 fr.,** qui ne permettront pas d'acheter une table supplémentaire.

Solution. — La commune peut acheter :
2.283 fr. : 70 fr. par t. = **32 tables ;** *reste* **43 fr.**

Vérification : 70 fr. × 32 = 2.240 fr.
2.240 fr. + 43 fr. = 2.283 fr.

RÈGLE ET DISPOSITION PRATIQUE.

```
7 2.0 0|0 | 5|0          2 2.8|3 | 7|0
2 2         1 4 4 0        1 8     3 2
  2 0                        4 3
    0 0
      0 0
```

On sépare un zéro à droite du diviseur et un chiffre à droite du dividende. On fait ensuite la division du nouveau dividende par le nouveau diviseur qui n'a qu'un chiffre. A la droite du reste, on place le chiffre séparé du dividende.

Exemples : 72.000 à diviser par 50 ; on divise 7.200 par 5, quotient **1.440**, reste 0 ; reste définitif **0.**

2.283 à diviser par 70. On divise 228 par 7, quotient **32,** reste 4 ; reste définitif **43.**

PROBLÈMES

1046. *Calculer mentalement les divisions :*
210 : 30 **200 : 50** **630 : 70** **180 : 20.**

1047*. *Avec* **3 l.** *d'eau oxygénée, combien peut-on emplir de flacons de* **60 cl. ?**

1048*. *Quelle est la vitesse moyenne en* **m. par mn.** *d'une automobile qui parcourt* **50 km. en 40 mn. ?**

1049*. *Un marchand a* **2.335 kg.** *de pommes de terre et il les revend par sacs de* **50 kg.** *Combien a-t-il pu vendre de sacs ? Combien a-t-il touché à raison de* **22 fr. le sac ?**

1050*. *En 1931 le record de la vitesse en hydravion a été tenu par un Anglais qui a parcouru* **621 km. dans 1 heure.** *Quelle était sa vitesse moyenne en* **m. par mn. ?**

1051*. *En* **30 jours** *un fourneau a brûlé* **10.000 kg.** *de charbon. Combien a-t-il brûlé en moyenne par jour ? Combien brûlerait-il, pendant les* **3 mois d'octobre, novembre** *et* **décembre ?**

1052*. *Trois bennes à vapeur déchargent ensemble un bateau ; en* **8 heures** *elles ont retiré* **960 mètres cubes** *de sable. Combien déchargent-elles en moyenne dans* **1 heure ?** *dans* **1 minute ?**

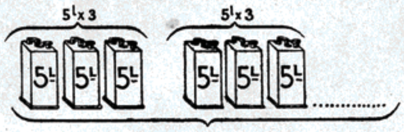
1053*. *En pesant* **50 paquets** *de sulfate de soude on a trouvé* **1.550 g.** *Quel est le poids d'un paquet ? Avec le même poids on ne veut faire que des paquets de* **30 g.** *Combien aura-t-on de paquets en plus ?*

Châtelet 1932 CE1 : division par plusieurs dizaines (pp. 178-179, 72ème leçon)

36^e LEÇON

MULTIPLIER UN NOMBRE ENTIER PAR 20, 200, 2 000; PAR 30, 300, 3 000, ...

144. PROBLÈME. — **Un garagiste a 10 clients. Il a vendu 3 bidons d'essence de 5^l à chacun d'eux (fig. 58). Combien a-t-il vendu de litres d'essence ?**



$$5 \times 30 = 5 \times 3 \times 10$$

FIG. 58.

A chaque client, le garagiste a vendu :

$$5^l \times 3 = 15^l.$$

En tout, il a vendu :

$$15^l \times 10 = 150^l \text{ (fig. 58).}$$

Nous pourrions dire encore : Le garagiste a vendu en tout 10 fois 3 bidons ou 30 bidons de 5^l, soit $5^l \times 30 = 150^l$.

Donc : $5 \times 30 = 5 \times 3 \times 10$.

145. On aurait de même :

$5 \times 300 = 5 \times 3 \times 100$; $5 \times 3\,000 = 5 \times 3 \times 1\,000$.

146. Si, *dans une multiplication, le multiplicateur est formé d'un chiffre suivi de zéros, on multiplie le multiplicande par ce chiffre et on écrit à la droite du produit autant de zéros qu'il y en a à la droite du multiplicateur.*

CALCUL MENTAL

Multiplier par 5.

1. *Compter de 5 en 5 de 0 à 50 et de 50 à 0.*

2. *Apprendre par cœur la table suivante :*

5 fois 1 font 5	**5 fois 6 font 30**
5 » 2 » 10	**5 » 7 » 35**
5 » 3 » 15	**5 » 8 » 40**
5 » 4 » 20	**5 » 9 » 45**
5 » 5 » 25	**5 » 10 » 50**

3. *Quel est le prix de 5 volumes à 3^f? à 30^f? à 300^f?*

4. *Que coûtent 5 tableaux à 8^f? à 80^f? à 800^f?*

5. *A 5^f l'une, que valent 6 gravures? 60? 600?*

EXERCICES ET PROBLÈMES

1re et 2e années. — 423. Effectuer :

1° $58^m \times 5$; $372^m \times 5$; $1\,895^m \times 5$;
2° $45^l \times 50$; $39^l \times 50$; $76^l \times 50$.

424. Effectuer la multiplication et convertir le produit en mètres:

1° $9^{dam} \times 2$; $9^{dam} \times 3$; $9^{dam} \times 4$; $9^{dam} \times 5$;
2° $8^{hm} \times 2$; $8^{hm} \times 3$; $8^{hm} \times 4$; $8^{hm} \times 5$.

425. Effectuer la multiplication et convertir le produit en litres:

1° $7^{dal} \times 2$; $7^{dal} \times 3$; $7^{dal} \times 4$; $7^{dal} \times 5$;
2° $6^{hl} \times 2$; $6^{hl} \times 3$; $6^{hl} \times 4$; $6^{hl} \times 5$.

1re année. — 426. Un ouvrier dépense chaque jour 13^f pour sa nourriture et 6^f de frais divers. Que dépense-t-il en 30 jours ?

427. Votre mère achète, à 5^f le mètre, deux pièces de ruban mesurant l'une 24^m, l'autre 36^m. Que doit-elle ?

428. Un cycliste parcourt 56^{km} dans la matinée et 34^{km} dans la soirée. Le lendemain, il revient, dans les mêmes conditions, au point de départ. Quelle distance a-t-il parcourue ?

429. J'achète 5 douzaines de noix. Le marchand m'en donne une de plus par douzaine. Combien ai-je de noix ?

430. Si vous payez 425^f de loyer par trimestre, quel est votre loyer annuel ?

2e année. — 431. Un livre d'arithmétique coûte 5^f. Un libraire en a vendu 96 à un client, 124 à un 2e, 180 à un 3e. Quel est le prix total de ces trois ventes ?

432. A 3^f le litre, quelle est la valeur du vin contenu dans 3 fûts, l'un de 220^l, l'autre de 125^l, le 3e de 55^l ?

433. Dans une famille, le père gagne 45^f par jour, la mère 36^f. Quel est le gain de cette famille pour 300 jours de travail ?

434. Un marchand de vin achète 5 fûts de vin blanc de 228^l chacun et 8^{hl} de vin rouge. Combien a-t-il de litres de vin en tout ?

435. Un locataire paie 375^f de loyer par trimestre et fait, en moyenne, chaque année, 500^f de réparations à son appartement. A combien lui revient son loyer ?

Boucheny : multiplication par un nombre d'un chiffre suivi de zéros (pp. 87-88, 36ème leçon)

Signalons en particulier dans Boucheny, les exercices 424 et 425 qui mêlent système métrique et la règle du jour. Quand on calcule 9 dam × 3, on obtient 27 dam, qui font 270 m, mais aussi 90 m × 3 = 270 m. Ceci ressemble à une deuxième technologie pour la règle.

A ces éléments sur l'organisation des leçons, il faudrait sans doute ajouter ce qui concerne le calcul mental. Nous nous bornerons à signaler qu'il y a presque toujours des leçons de calcul mental associées aux leçons « thématiques » dans les manuels mais qu'il est intégré de façons très diverses : la progression en calcul mental peut ou non être articulée avec celle des leçons du jour.

- Pour chaque opération : Que fait-on ? A quel niveau ?

Que fait-on au CE1 sur les techniques opératoires de l'addition et de la soustraction ? On étudie au minimum les additions et soustractions *avec retenue* d'au moins trois chiffres, sauf Châtelet 1932 qui se limite à deux chiffres et fait une leçon sur l'addition et la soustraction des grands nombres au début du CE2.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Que fait-on au cours élémentaire dans l'étude de la multiplication ? Globalement à la fin des deux ans, d'après la lecture des sommaires des manuels, les élèves ont appris les tables de multiplication. Ils savent faire les multiplications à 3 chiffres ou plus, dans le cas général et dans les cas particuliers : facteurs terminés par des zéros, zéros intercalés au multiplicateur. Bodard et Vassort et eux seuls respectent la limitation imposée par les programmes de 1945 : multiplication par les nombres de deux chiffres avec étude des zéros terminaux (avec deux chiffres il n'est plus nécessaire d'étudier les zéros intercalés au multiplicateur). Ils ont aussi appris à multiplier par 10, 100 et 1000 (10 et 100 seulement pour Bodard) et presque toujours par les dizaines et centaines entières.

Au CE1, il est clair qu'on apprend les tables même si cela n'apparaît pas toujours dans les sommaires puisqu'il peut s'agir uniquement de calcul mental, leçons et sommaires que nous n'avons pas étudiés. On résout aussi des problèmes.

Du point de vue de l'avancée de l'étude de la technique à la fin du CE1, on repère grossièrement les choix suivants dans nos manuels :

1) toute la technique (2/7),
2) un chiffre au multiplicateur, plusieurs chiffres au multiplicande ET un chiffre au multiplicande, plusieurs chiffres au multiplicateur (2/7, Marijon et Marijon),
3) multiplication avec retenue : 2 ou 3 chiffres au multiplicande, un chiffre au multiplicateur (3/7).

Les deux manuels qui donnent toute la technique sont au début et à la fin de notre période. Le découpage ne semble donc pas être caractéristique d'une époque.

Pour les manuels de type 2, la commutativité de la multiplication apparaît comme une question cruciale. Le programme de 1945 évoque *la possibilité de permutation* des nombres qu'il faut apprendre aux élèves, rien de tel dans ceux de 1923 qui indiquaient pour le CP :

> Compter par 2, par 3, par 4. Multiplier par 2, par 3, par 4.

En fait, dans 8 collections sur 11, on trouve une leçon dont le titre est proche de « Preuve de la multiplication ». Marijon 1947 l'appelle « On peut changer l'ordre des facteurs. Preuve de la multiplication ». Ces leçons constituent *a minima* un mémo sur la propriété de commutativité de la multiplication même si elle est n'est pas désignée par son nom. Cette « preuve », lorsqu'elle apparaît dans le sommaire, clôture souvent l'étude de la technique opératoire. Marijon 1947 et 1957, et Châtelet 1952 la placent ailleurs, mais au même endroit : entre <u>deux chiffres au multiplicateur</u> et <u>trois chiffres au multiplicateur</u>. Sans une étude du

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

texte des leçons, il n'est pas possible d'indiquer comment cette propriété intervient au cours de l'apprentissage de la multiplication.

Que fait-on au CE1 sur la division ? Mortreux ne fait apparemment rien car cette étude n'apparaît que dans la programmation du CE2. Châtelet 1932 traite uniquement la division par 2 des nombres de 1 à 200. Les cinq autres traitent la division avec un chiffre au diviseur. Les manuels de CE et CE2 vont au minimum jusqu'au cas : 2 chiffres au diviseur. Ce cas correspond d'ailleurs à la prescription des programmes de 1923 et 1945.

- Une articulation entre sens des opérations et techniques de calcul

Les exemples donnés par les leçons et les étapes dans l'apprentissage des algorithmes (qu'on peut supposer en regardant les sommaires) laissent penser que les progressions des manuels permettent d'articuler sens des opérations et techniques de calcul.

En effet, on a généralement au CE pour l'apprentissage de l'addition et de la soustraction les étapes suivantes : les tables, l'addition et la soustraction sans retenue, l'addition et la soustraction avec retenue. Pour la division et la multiplication, on a : les tables, la multiplication ou la division par un nombre de un chiffre sans retenue, puis avec retenue, la multiplication ou la division par les puissances de dix déjà étudiées, la multiplication ou la division par un nombre de un chiffre suivi de zéros, la multiplication ou la division par un nombre à plusieurs chiffres, etc. À ces éléments, il faut sans doute ajouter les techniques de calcul qu'on trouve dans les leçons de numération et dont nous reparlerons au chapitre 6 qui portent notamment sur les nombres de un chiffre suivi de zéros (par exemple : 300 + 600 = 900 ou 600 : 2 = 300).

Il nous semble que ces étapes jouent un double rôle. Tout d'abord, nous l'avons dit elles constituent des paliers dans l'élaboration des techniques opératoires. Ensuite, elles constituent, nous semble-t-il, des techniques de calcul sur des nombres particuliers. A ce titre elles peuvent être utilisées (et le sont dans les pages des manuels que nous avons reproduites) pour résoudre des problèmes relevant des quatre opérations. Ces techniques spécifiques à certains types de nombres, en particulier petits nombres et nombres de un chiffre suivi de zéros, sont de plus susceptibles d'être définitives en ce sens qu'elles restent opérationnelles, pour ces nombres même quand on dispose de l'algorithme.

À partir de 1970 et pendant 25 ans, l'addition a été la seule opération enseignée au CP ; l'apprentissage de la division a été plusieurs fois repoussé entre 1970 et 2002. Une conséquence de la programmation issue de la réforme est que les élèves n'ont pas l'occasion de travailler simultanément avec les quatre opérations pendant une bonne partie de leur scolarité primaire. Il nous semble qu'il ne faut en effet pas confondre la rencontre avec des problèmes de soustraction ou de division qu'on résout par exemple avec l'addition ou la multiplication qui a toujours été préconisée à partir de 1980 voire de 1970 et l'utilisation intentionnelle, notamment au niveau du symbolisme ou du mot « division », de la soustraction ou de la division pour résoudre de tels problèmes.

- L'imbrication de l'étude des quatre opérations

Les programmations : imbrication ou séparation ?

Les manuels étudient-ils les opérations successivement ou bien, au contraire, y a-t-il une imbrication des différentes études (au CE1 ou au CE) ? Nos trois auteurs les plus anciens prescrivent des apprentissages totalement disjoints des tables : on apprend successivement toutes celles d'addition, puis de soustraction, puis de multiplication et enfin de division. À partir des années 1930, les tables de soustraction et d'addition sont apprises en parallèle, de même celles de multiplication et de division. Deux auteurs mènent même de front l'étude des quatre tables pour un même nombre.

Du point de vue des techniques opératoires et du sens, seuls nos deux auteurs les plus anciens (Minet et Mortreux) mènent successivement les études des quatre opérations : on commence la soustraction après avoir terminé l'addition, etc. Il est cependant visible dans la répartition mensuelle de Mortreux qu'on prescrit des problèmes portant sur les opérations dont l'étude de la technique est terminée pendant l'étude de celles des autres opérations.

Chez les autres auteurs, on trouve des options diverses pour l'élaboration des techniques :

- Bodard et Boucheny mènent de front l'étude des quatre opérations,
- Marijon 1947 et 1957 commencent l'étude des quatre opérations en parallèle, avec le cas particulier de la multiplication et de la division par 2, ensuite l'étude des techniques des quatre opérations est conduite de façon plus ou moins imbriquée[47],
- Vassort et Châtelet 1932 effectuent une sorte de filage de façon à ce qu'on travaille l'apprentissage des techniques (ou tables) des quatre opérations en parallèle à un moment de l'année, moment plus ou moins long.

[47] Signalons à nouveau que Châtelet 1932 accorde lui aussi un statut très particulier à la table de deux, puisqu'il ne traite qu'elle dans son étude de la division au CE1.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

- Clap, Dumarqué et Châtelet 1952 conduisent une étude plus ou moins conjointe de l'addition et de la soustraction puis, quand cette première étude est terminée, des études conjointes ou non de la multiplication et de la division,

La programmation des apprentissages des différentes opérations constitue sans doute une condition diffuse mais essentielle pour l'apprentissage du sens des opérations. Si les enseignants proposent aux élèves d'étudier les quatre opérations en parallèle, on peut penser que ces derniers seront moins tentés de choisir la *dernière opération étudiée* lorsqu'il s'agira de résoudre un problème d'arithmétique.

Globalement pour notre période, il semble que le début des années 30 marque la fin de l'étude isolée de chaque opération.

Un autre moyen d'imbriquer les opérations : les leçons de révision

Tous les manuels proposent mensuellement des leçons de révision, elles mêlent tous les apprentissages du mois et c'est aux élèves de repérer les savoirs en jeu (une indication est parfois donnée par l'habitat : système métrique ou arithmétique). En outre, il est fort possible qu'on y entretienne la connaissance des opérations dont l'étude est terminée.

Par ailleurs, certains manuels proposent explicitement l'étude conjointe de plusieurs opérations : problèmes sur les quatre opérations ou plus souvent par groupe de deux ou trois opérations. Outre les couplages attendus : addition / soustraction et multiplication / division, on trouve parfois : addition / multiplication ou division / soustraction.

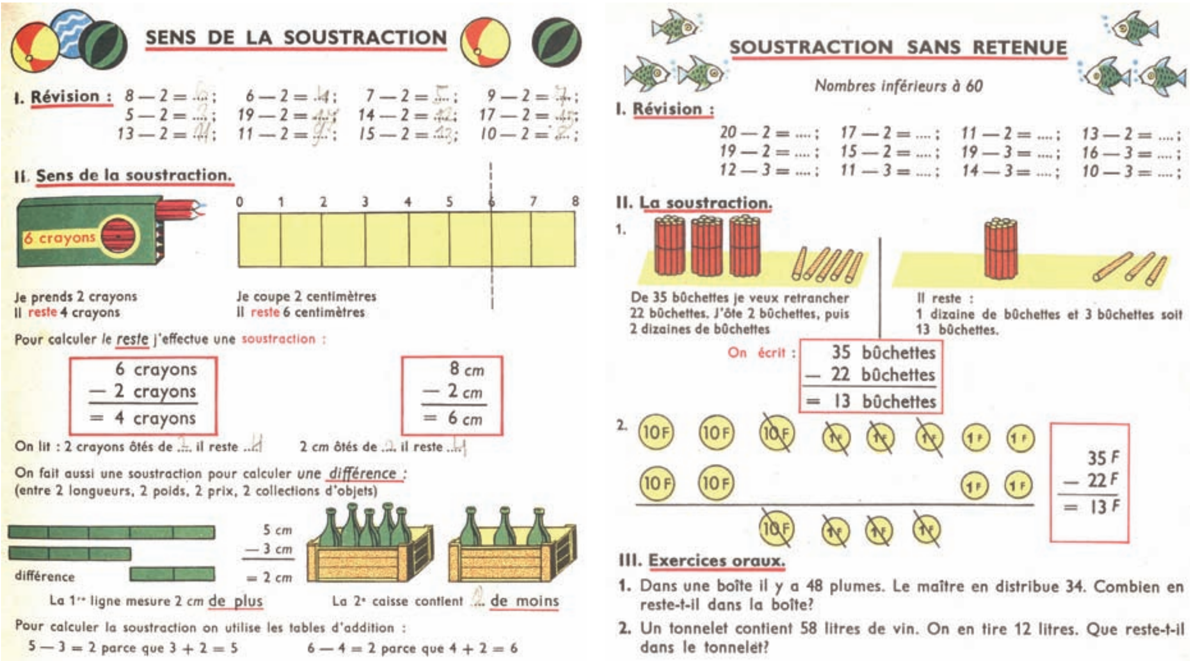
4.2. Unités et opérations

Une façon de regarder le rôle des grandeurs dans l'étude des opérations est de repérer les unités utilisées.

▪ Les unités dans les leçons sur les opérations

À partir des années 30, les pratiques des manuels quant aux unités utilisées dans les leçons spécifiques aux différentes opérations sont très variables. En général, une unité n'apparaît dans un problème d'arithmétique qu'après avoir été étudiée dans le système métrique (sauf pour les unités de durées, peut-être parce que les années ou les jours ne font bien souvent pas l'objet de leçons particulières). En revanche, l'utilisation d'une diversité de grandeurs est plus ou moins répandue selon les manuels : la monnaie et le discret sont omniprésents dans certains alors que d'autres mobilisent alternativement différentes grandeurs : discret, masse, capacité, longueur, monnaie... S'il est clair que certains manuels ont une démarche visible de re-travail des différentes unités (Boucheny utilise de façon assez systématique le discret et la capacité pour les leçons sur les techniques opératoires), pour d'autres cette démarche apparaît moins organisée (si Dumarqué introduit addition et soustraction sur le discret et la longueur, c'est presque toujours la monnaie et le discret qui sont utilisés dans les leçons sur les techniques opératoires, de même pour Bodard au CE1).

Nous donnons ci-après trois exemples tirés respectivement de Bordard CE1, Dumarqué, et Boucheny.



SENS DE LA SOUSTRACTION

I. Révision : 8 — 2 = ... ; 6 — 2 = ... ; 7 — 2 = ... ; 9 — 2 = ... ;
5 — 2 = ... ; 19 — 2 = ... ; 14 — 2 = ... ; 17 — 2 = ... ;
13 — 2 = ... ; 11 — 2 = ... ; 15 — 2 = ... ; 10 — 2 = ... ;

II. Sens de la soustraction.

6 crayons

0 1 2 3 4 5 6 7 8

Je prends 2 crayons
Il reste 4 crayons

Je coupe 2 centimètres
Il reste 6 centimètres

Pour calculer *le reste* j'effectue une soustraction :

6 crayons
— 2 crayons
= 4 crayons

8 cm
— 2 cm
= 6 cm

On lit : 2 crayons ôtés de .... il reste ....   2 cm ôtés de .... il reste ....

On fait aussi une soustraction pour calculer *une différence* :
(entre 2 longueurs, 2 poids, 2 prix, 2 collections d'objets)

5 cm
— 3 cm
= 2 cm

différence

La 1re ligne mesure 2 cm de plus   La 2e caisse contient .... de moins

Pour calculer la soustraction on utilise les tables d'addition :
5 — 3 = 2 parce que 3 + 2 = 5   6 — 4 = 2 parce que 4 + 2 = 6

SOUSTRACTION SANS RETENUE

Nombres inférieurs à 60

I. Révision :

20 — 2 = ... ; 17 — 2 = ... ; 11 — 2 = ... ; 13 — 2 = ... ;
19 — 2 = ... ; 15 — 2 = ... ; 19 — 3 = ... ; 16 — 3 = ... ;
12 — 3 = ... ; 11 — 3 = ... ; 14 — 3 = ... ; 10 — 3 = ... ;

II. La soustraction.

1. De 35 bûchettes je veux retrancher 22 bûchettes. J'ôte 2 bûchettes, puis 2 dizaines de bûchettes

Il reste : 1 dizaine de bûchettes et 3 bûchettes soit 13 bûchettes.

On écrit :
35 bûchettes
— 22 bûchettes
= 13 bûchettes

2. 10 F 10 F 10 F 1 F 1 F 1 F 1 F 1 F

35 F
— 22 F
= 13 F

III. Exercices oraux.

1. Dans une boîte il y a 48 plumes. Le maître en distribue 34. Combien en reste-t-il dans la boîte?
2. Un tonnelet contient 58 litres de vin. On en tire 12 litres. Que reste-t-il dans le tonnelet?

Bodard CE1. La soustraction : sens et technique opératoire sans retenue (pp. 15, 30)

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

— 14 —

Addition. — Somme.

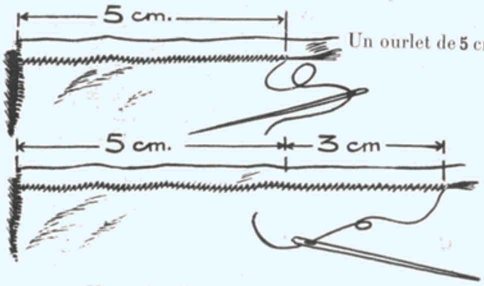
Sur le bureau du maître, il y a **5** livres d'un côté et **3** de l'autre.

Réunissons les livres en un seul tas et comptons-les. Il y a **8** livres.

Les deux tas n'en forment plus qu'un : on les a ***additionnés***.

On écrit : **5** livres + **3** livres = **8** livres.
On dit : **5** livres plus **3** livres égale **8** livres,
ou **5** livres et **3** livres font **8** livres.

*Une fillette doit faire un ourlet. Elle coud d'abord **5** cm. Elle coud ensuite **3** cm. et son ouvrage est terminé. Quelle est la longueur de l'ourlet?*



Un ourlet de : **5** cm. + **3** cm. = **8** cm.

8 est la ***somme*** ou le ***total*** des nombres **5** et **3**.
Quand on calcule une somme, on fait une addition.
Le signe de l'addition est + qui se lit plus.

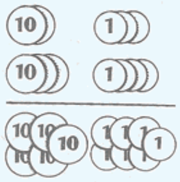
— 28 —

L'addition sans retenue.

Problème. — *Louis a **23** fr. dans une poche et **34** fr. dans l'autre. Combien possède-t-il?*

OPÉRATION	SOLUTION
23 + 34 = 57	Louis possède : **23** fr. + **34** fr. = **57** fr.

EXPLICATION



Louis compte d'abord les pièces de **1** fr. :

3 et **4**, ... **7** pièces de **1** fr.

Il compte ensuite les pièces de **10** fr. :

2 et **3**, ... **5** pièces de **10** fr.

Il possède :

5 pièces de **10** fr. et **7** pièces de **1** fr. ou **57** fr.

Règle. — ***Pour faire une addition :***
1° On écrit les nombres les uns au-dessous des autres en posant les unités sous les unités, les dizaines sous les dizaines,...
2° On additionne les chiffres de chaque colonne en commençant par la colonne des unités.

— 32 —

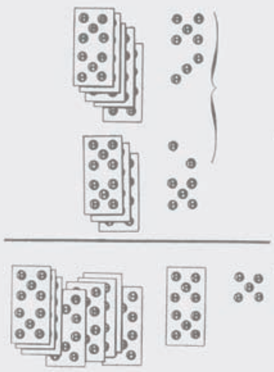
L'addition avec retenue.

Problème. — *En mettant de l'ordre dans ses tiroirs, une couturière a trouvé dans un tiroir **5** cartes de **10** boutons et **8** boutons; dans un autre, elle a trouvé **3** cartes de **10** boutons et **7** boutons. Combien de boutons a-t-elle?*

OPÉRATION	SOLUTION
58 + 37 = 95	La couturière possède : **58** b. + **37** b. = **95** boutons.

EXPLICATION

Cartes de **10** Unités.



1° La couturière compte les boutons :

8 et **7**, ... **15**.

2° Elle coud **10** boutons sur une carte; il lui reste **5** boutons.
3° Elle compte les cartes de **10** :

1 et **5**, **6**; **6** et **3**, ... **9**.

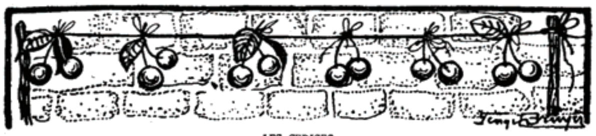
On dit : **8** et **7** ... **15**. Je pose **5** et je retiens **1**.

1 retenu et **5**, **6**;
6 et **3**, ... **9**.

Règle. — ***Quand la somme des chiffres d'une colonne dépasse 9, on écrit le chiffre des unités et on reporte les dizaines à la colonne suivante.***

Dumarqué. L'addition : introduction, technique opératoire sans et avec retenue (pp. 14, 28, 32)

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008



LES CERISES

14e LEÇON

MULTIPLICATION

67. *Opération concrète.* — Formons 3 rangées de 4 jetons (fig. 27).

Nous avons en tout :

4 + 4 + 4 = 12 jetons.

Donc, 3 fois 4 jetons = 12 jetons.

Quand on dit : 4 + 4 + 4 = **12**, on fait une **addition de nombres égaux.**

Une addition de plusieurs nombres égaux constitue une **multiplication.**

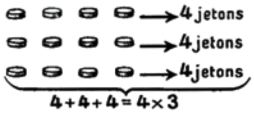


FIG. 27.

68. PROBLÈME. — ***Un épicier remplit d'huile trois récipients de contenance différente (fig 28) : le 1er mesure 3l; le 2e, 4l; le 3e, 5l. Quelle est la contenance totale des trois récipients?***

Contenance totale

$= 3^l + 4^l + 5^l = 12^l.$

FIG. 28.

Pour trouver le résultat demandé, nous faisons une *addition.*

69. ***Si l'épicier remplit trois récipients mesurant chacun 4l (fig. 29), on a :***

FIG. 29.

Contenance totale $= 4^l + 4^l + 4^l$

ou $4^l \times 3 = 12^l.$

Cette addition de nombres égaux constitue une multiplication; le résultat doit être connu par cœur comme nous l'indiquons plus loin.

70. REMARQUE. — **Dans le 1er cas, on calcule la contenance totale en additionnant les nombres exprimant la contenance de chacun des récipients.**

Dans le 2e cas, les récipients étant *égaux*, on peut calculer la contenance totale plus simplement : on effectue une multiplication.

71. La *multiplication est une addition de nombres égaux.* Une telle addition peut se simplifier comme nous le verrons dans la suite.

72. — Les multiplications faites ci-dessus s'indiquent de la façon suivante :

4 jetons × 3 = 12 jetons.

$4^l \times 3 = 12^l.$

Le nombre 4 est le **multiplicande.**

Le nombre 3, qui indique combien de fois le multiplicande entre dans l'addition, est le **multiplicateur.**

Le résultat 12 est le **produit.**

73. Le signe de la multiplication est × que l'on énonce **multiplié par.**

74. Les résultats de la multiplication de deux nombres d'un chiffre sont donnés dans la *table de multiplication*, que l'on doit connaître par cœur. (Voir à la fin du volume.)

64 — *ARITHMÉTIQUE*

25e LEÇON

MULTIPLICATION

LE MULTIPLICATEUR N'A QU'UN CHIFFRE

108. PROBLÈME. — **Un fût de bière contient 78l. Quelle est la contenance de 3 fûts semblables (fig. 45) ?**

Contenance totale $= 78^l + 78^l + 78^l.$

Mais $78^l = 7^{dal} + 8^l.$

Pour faire l'addition des trois nombres, on peut additionner d'abord les litres, puis les décalitres.

Le total des litres est $8^l + 8^l + 8^l$ ou 3 fois $8^l = 24^l.$

Mais $24^l = 2^{dal} + 4^l.$

Ecrivons 4^l au rang des unités et retenons 2^{dal}.

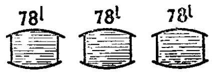


FIG. 45.

$$\begin{array}{r} 2 \\ 78^l \\ 78^l \\ 78^l \\ \hline 234^l \end{array} \qquad \begin{array}{r} 78^l \\ \times\ 3 \\ \hline 234^l \end{array}$$

Le total des décalitres est 7+7+7 ou 3 fois $7 = 21^{dal}$.

Ajoutons à ces 21^{dal} les 2^{dal} retenus, nous obtenons 23^{dal}.

La contenance totale des 3 fûts est de 23^{dal} et 4^l, soit 234^l.

109. Dans la pratique, pour multiplier 78 par 3, on dit :
3 fois 8, 24; j'écris **4** et je retiens 2.
3 fois 7, 21; 21 et 2, 23; j'écris 3 et j'avance 2.
Le produit est 234.

110. RÈGLE. — *Pour multiplier un nombre de plusieurs chiffres par un nombre d'un seul chiffre, on multiplie successivement les chiffres du multiplicande par le multiplicateur, en commençant par la droite.*

On tient compte des retenues, s'il y a lieu.

Boucheny. La multiplication : introduction et technique opératoire (le multiplicateur a un chiffre) (pp. 35-36, 64)

- Les opérations dans les leçons sur les unités métriques

Un autre lieu pour l'étude du sens des opérations est constitué par les leçons sur les unités du système métrique. En effet, dans les manuels des années 30 à 70, ces leçons sont souvent le siège de problèmes d'arithmétique dans l'unité étudiée, problèmes relevant soit de l'étude des

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

quatre opérations, soit de la numération. Les types de problèmes rencontrés dans ces leçons peuvent être très divers et variés selon les manuels mais leur présence est parfois limitée aux leçons relatives aux unités « usuelles ». De plus, la diversité des opérations engagées est variable.

Quand ils existent, ces problèmes confrontent en général les élèves à des pratiques de la vie courante spécifiques des différentes unités (ce qui explique probablement la rareté relative des problèmes sur les unités non usuelles). Compte tenu de la diversité des problèmes, les pratiques de la vie courante engagées seront elles aussi diverses et plus ou moins riches ou variées selon les manuels.

4.3. Pratiques de la vie courante spécifiques de certaines grandeurs

La question des relations entre unités et opérations se cristallise dans l'étude de certaines pratiques de la vie courante spécifiques de certaines grandeurs ou de techniques relatives à ces pratiques. A chaque grandeur (voire à certaines unités métriques) sont attachées des pratiques de la vie courante spécifiques. On va ainsi avoir des progressions quant à l'étude de certaines pratiques de la vie courante. Trois manuels sur huit prescrivent des leçons relatives à la tare. D'ailleurs, certains manuels n'indiquent pas de leçons sur la tare mais évoquent le sujet dans une leçon sur la masse : à propos des pesées ou avec l'étude d'une unité. Les problèmes de train et de robinet, emblématiques de l'école primaire, relèvent du travail de la longueur et de la capacité combinées au temps (on parle en général plutôt de vitesse et débit). Ces derniers problèmes ne sont pas visibles sous cette forme au cours élémentaire néanmoins nous pensons que, pour la grandeur longueur que nous avons étudiée, on y voit assez nettement la préparation à leur résolution.

Peut-être faut-il ajouter que bien souvent il n'y a pas véritablement de leçons sur la connaissance de la monnaie (comme il en existe pour les autres grandeurs) mais les questions monétaires « achat, vente, perte, etc. » sont étudiées au CE. Les leçons sur les pratiques économiques pourraient ainsi constituer le pendant aux leçons sur les grandeurs « physiques ».

Il nous semble qu'on peut considérer que ces leçons sur des pratiques de la vie courante spécifiques à certaines grandeurs viennent compléter la connaissance de ces grandeurs que nous avons évoquée avec l'étude des nombres, du système métrique et des pratiques de mesurage de référence pour la vie courante.

Nous donnons quelques précisions quant à l'étude des problèmes de longueur et sur les questions économiques.

▪ Problèmes de déplacement

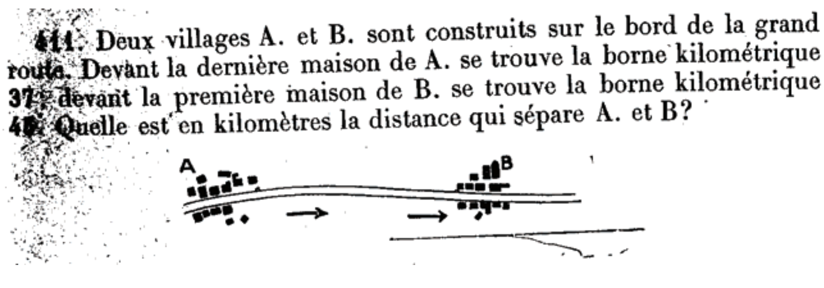
La longueur est toujours la première grandeur continue étudiée au CE (et sans doute dans les autres niveaux). En outre, elle joue sans doute un rôle particulier dans l'apprentissage des nombres et des opérations. C'est un objet de savoir à part entière mais aussi c'est un moyen pour représenter les nombres.

Exemples de problèmes de déplacements

Parmi les problèmes de longueur, ceux qui impliquent des déplacements occupent une place particulière. Dans l'enseignement ancien, on en rencontre principalement dans les leçons sur les grandes unités de longueur. Ci-après quelques exemples de tels problèmes. Les catégories que nous proposons doivent être vues comme un moyen de présentation :

- problèmes de calcul de distances entre deux villes sur une ligne de train ou une route,

> 383. Par voie ferrée, il y a 315 km de Paris à Dijon, 197 km de Dijon à Lyon, 351 km de Lyon à Marseille. Calculer la distance, par voie ferrée : 1° de Paris à Lyon ; de Paris à Marseille ; 3° de Dijon à Marseille.
>
> 384. Par voie ferrée, Paris est à 374 km de Rennes et à 624 km de Brest, situé sur la même ligne. Calculer la distance, par voie ferrée, de Rennes à Brest. (Boucheny CE2, p. 78, leçon « le kilomètre, mesures itinéraires »)
>
> 6. De Paris à Meaux il y a 45 km. De Paris à Château Thierry, par la même route, il y a 95 km. Quelle est la distance entre Meaux et Château-Thierry ? (Bodard, CE2, p. 42, leçon « le kilomètre »)



411. Deux villages A. et B. sont construits sur le bord de la grand route. Devant la dernière maison de A. se trouve la borne kilométrique 37; devant la première maison de B. se trouve la borne kilométrique 4[illegible] Quelle est en kilomètres la distance qui sépare A. et B?

(Dumarqué, p. 55, leçon « le kilomètre »)

Dans le dernier problème, l'origine du mesurage est implicite ce qui est susceptible d'engendrer des difficultés spécifiques.

- problèmes impliquant des pancartes. Avec l'étude du kilomètre, les pancartes sont presque toujours évoquées. Nous les avons évoquées à propos des pratiques de mesurage relatives à l'étude des grandes longueurs. Des problèmes relevant des quatre opérations impliquant cet instrument sont souvent proposés.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

5. 45 *km* ⟵ PARIS FERTÉ-MILON ⟶ 35 *km* En regardant cette plaque, calculons la distance de Paris à la Ferté-Milon.

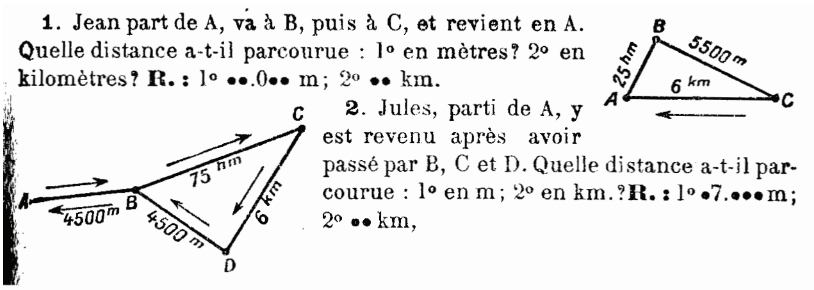
(Bodard, CE2, p. 42, leçon « le kilomètre »)

607. Vous lisez sur une borne Sivry 1 km, Melun 8 km. Quelle est la distance de Sivry à Melun ?

608. Vous lisez sur une borne, d'un côté : Chalou 7 km et de l'autre : Laville 2 km. Quelle est la distance de Chalou à Laville ? (Vassort, CE CM, p 72, leçon « notre route ou notre rue »)

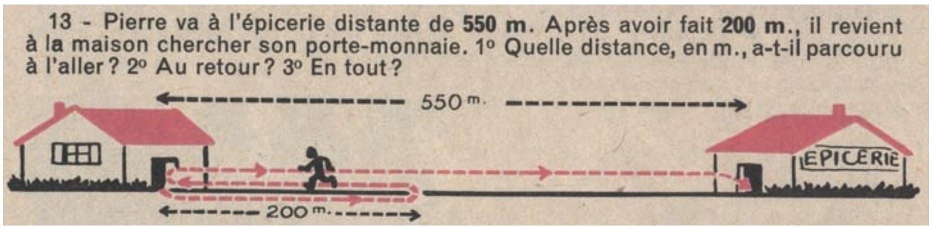
- problèmes de distance parcourue avec des allers-retours, des va-et-vient ou des déplacements relatifs. Ces problèmes sont présentés avec ou sans schéma coté :

4. Un cycliste, après avoir parcouru 176 km, abandonne à 26 km de l'arrivée. Sur quelle distance se courait la course ? (Bodard, CE2, p. 42, leçon « le kilomètre »)

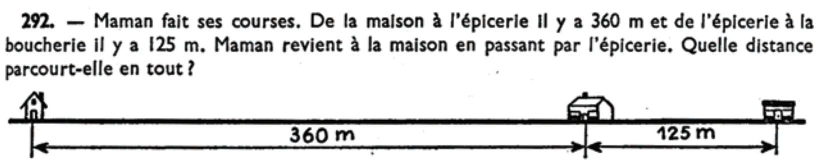

1. Jean part de A, va à B, puis à C, et revient en A. Quelle distance a-t-il parcourue : 1° en mètres? 2° en kilomètres? **R. :** 1° ••.0•• m ; 2° •• km.

2. Jules, parti de A, y est revenu après avoir passé par B, C et D. Quelle distance a-t-il parcourue : 1° en m ; 2° en km.? **R. :** 1° •7.•••m ; 2° •• km,

(Marijon CE2 1947, p. 89, leçon « la route. Kilomètres et hectomètres)


13 - Pierre va à l'épicerie distante de **550 m.** Après avoir fait **200 m.**, il revient à la maison chercher son porte-monnaie. 1° Quelle distance, en m., a-t-il parcouru à l'aller ? 2° Au retour ? 3° En tout ?

(Châtelet 1952, p. 97, leçon « l'hectomètre – le kilomètre »)


292. — Maman fait ses courses. De la maison à l'épicerie il y a 360 m et de l'épicerie à la boucherie il y a 125 m. Maman revient à la maison en passant par l'épicerie. Quelle distance parcourt-elle en tout ?

(Vassort CECM, p. 35, leçon « révision »)

Des éléments de la progression de Marijon 1947

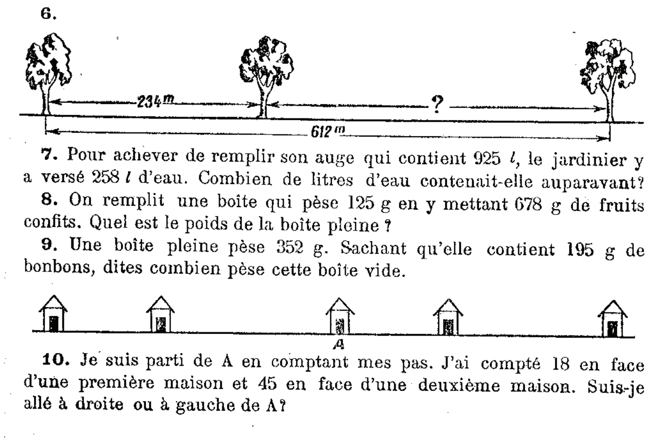
Nous nous attardons sur la progression de Marijon 1947 pour l'étude de la longueur (bien que notre étude ne soit pas systématique sur ce point, il est fort probable que la progression sur la longueur ne soit pas aussi élaborée dans tous les manuels).

Marijon 1947 propose au CE1 plusieurs séries d'exercices pour l'étude de la longueur. Nous présentons trois leçons : 20, 22 et 36 mais il y a en fait d'autres exercices avec des schémas cotés qui précèdent ces leçons. Il n'y a pas d'étiquette « longueur » pour nos trois leçons mais

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

des noms d'opérations néanmoins il nous semble qu'on ne peut considérer cette organisation des leçons relatives à la grandeur longueur comme le fruit du hasard.

La leçon 20 est intitulée « problèmes d'addition et de soustraction ». On y trouve un calcul de longueur d'après un schéma coté (ex. 6) et un travail de mise en relation d'un schéma coté et d'un texte qui mobilise des connaissances en acte sur les échelles et du repérage dans l'espace (ex. 10).



7. Pour achever de remplir son auge qui contient 925 l, le jardinier y a versé 258 l d'eau. Combien de litres d'eau contenait-elle auparavant?

8. On remplit une boite qui pèse 125 g en y mettant 678 g de fruits confits. Quel est le poids de la boite pleine ?

9. Une boite pleine pèse 352 g. Sachant qu'elle contient 195 g de bonbons, dites combien pèse cette boite vide.

10. Je suis parti de A en comptant mes pas. J'ai compté 18 en face d'une première maison et 45 en face d'une deuxième maison. Suis-je allé à droite ou à gauche de A?

(Marijon CE1 1947, p. 47, leçon 20, problèmes d'adition et de soustraction)

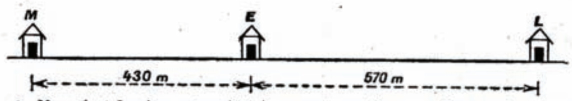
Dans la leçon 21, « le mille », on étudie aussi « le mille et les mesures » : kilogramme, kilomètre et billet de 1000 f. Dans cette leçon, il n'y a pas de problème relevant des quatre opérations spécifique aux unités métriques étudiées dans la leçon. Dans la leçon suivante, la leçon 22, « problèmes sur l'addition et la soustraction », plusieurs unités métriques, toutes déjà étudiées, sont utilisées (kilogramme, litre, mètre, kilomètre, centimètre). Nous considérons qu'on trouve dans cette leçon les exercices d'application pour l'étude des opérations relatives aux unités métriques de la leçon 21. Elle comprend, entre autres exercices, une série d'exercices de déplacements (exercices n°5 à 11, pp. 50-51). On voit qu'on enseigne explicitement le schéma coté dans des situations de déplacement.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

5. Quittant leur école et marchant en sens contraire, Martin et Louis sont rentrés chez eux, en M et L, après avoir fait l'un 430 m et l'autre 570 m. Quelle distance sépare les maisons de ces deux élèves?

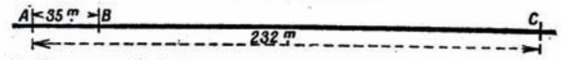
Dessinons.



6. Marcel et Louise ont quitté leur maison. Ils sont allés sur la même route et dans le même sens. Une heure plus tard, Marcel, qui est à pied, est arrivé à 4 km de cette maison, tandis que Louise, à bicyclette, en est à 15 km. A quelle distance sont-ils alors l'un de l'autre?

Dessinons pour bien comprendre.

7. Un cycliste et un automobiliste sont partis d'un même lieu pour se rendre à une ville V, distante de 131 km de leur point de départ. Lorsque l'automobiliste arrive à destination, le cycliste a parcouru 36 km. A quelle distance le cycliste est-il alors de l'automobiliste?



8. Pierre part de A, Jean part de B, distant de A de 35 m. Ils vont dans la même direction et Pierre rattrape Jules en C, à 232 m de A. Quel trajet a parcouru Jean?

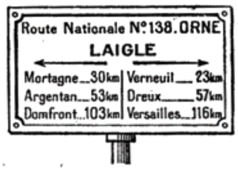
9. Louis et Claude, allant dans le même sens, partent de A et de B. Lorsqu'ils se rejoignent en C, Louis a parcouru 96 km et Claude en a parcouru 111. Quelle est la distance de A à B?

10. Calculez la distance de :

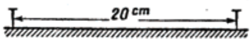
a) Argentan à Domfront;

b) Dreux à Versailles;

c) Argentan à Dreux; etc.



11. Quelle sera la distance de ces deux clous si je les déplace : *a*) tous les deux vers la droite de 10 cm; *b*) tous les deux à gauche : A de 10 cm et B de 5 cm; *c*) A à gauche de 8 cm et B à droite de 2 cm; *d*) A à droite de 8 cm et B à gauche de 2 cm?



(Marijon CE1 1947, pp. 50-51, extrait de la leçon 22)

Cette leçon en fait est complétée par la leçon 36 sur « la multiplication et la division » qui y renvoie.

36e leçon.
(Voir 22e leçon)

PROBLÈMES SUR LA MULTIPLICATION ET LA DIVISION

1er Problème. — *Un cycliste faisant, en moyenne, 18 km à l'heure, a mis 4 heures pour aller de A à B. Quelle est la distance de A à B?*

SOLUTION : La distance de A à B est de : 18 km × 4 = **72** km.

2e Problème. — *Un cycliste a fait 85 km en 5 heures. Combien le cycliste a-t-il fait, en moyenne, de km à l'heure?*

SOLUTION : Le cycliste a fait, en moyenne, par heure :
85 km : 5 = **17** km.

3e Problème. — *Un piéton, parti de A, est allé à B distant de 20 km. Sachant qu'il a marché à la vitesse moyenne de 5 km à l'heure, calculez le temps du parcours.*

SOLUTION : Temps du parcours, en heures : 20 : 5 = **4**.

CALCUL MENTAL

1. Un facteur parcourt 4 km à l'heure, quelle distance parcourt-il en 3 h? en 6 h? en 4 h?

2. Si un piéton a parcouru 24 km en 6 heures, combien a-t-il fait, en moyenne, à l'heure?

3. Quel temps me faudra-t-il pour parcourir 18 km, si je fais 6 km par heure?

4. Je pars pour la ville voisine distante de 20 km, et je fais 5 km à l'heure. A quelle distance suis-je de cette ville au bout de 3 heures?

5. Je pars pour la ville voisine. Après avoir fait 6 km à l'heure pendant 2 heures, je suis à 6 km de cette ville. A combien de km en étais-je quand je suis parti?

6. Je pars pour la ville voisine, distante de 20 km, et j'arrive à 4 km de cette ville après 4 heures de marche. Combien ai-je fait de km à l'heure?

7. Combien de km ferai-je en 2 heures et demie, si je fais 1 km en un quart d'heure?

8. Combien de km ferai-je en 3 heures, si je fais 3 km par demi-heure?

PROBLÈMES

1. Un automobiliste fait 47 km, en moyenne, par heure et se rend à une ville distante de 250 km. Combien de km aura-t-il faits en 4 heures? Combien lui en restera-t-il à faire?

2. Un automobiliste qui se rend à une ville distante de 300 km n'est plus qu'à [illegible] km de cette ville après 4 heures de marche. Combien a-t-il fait de km, en moyenne, par heure?

3. En 5 heures, un automobiliste a parcouru 9 fois un circuit routier de 80 km de long. Combien a-t-il fait de km, en moyenne, par heure?

4. Paul et François partent l'un de A, l'autre de B. Ils marchent en sens contraire et se rencontrent en R. Au moment de la rencontre, Paul a fait 8 km et François a marché pendant 2 heures, faisant 4.500 m à l'heure. Quelle est la distance de A à B. **R. :** •• km.

5. Marchant en sens contraire, Martin, qui fait 4 km à l'heure, est parti de A; Louis, qui fait 6 km à l'heure, est parti de B. Lorsqu'ils se sont rencontrés en R, chacun d'eux avait marché pendant 3 heures. On demande : 1° De combien ils se rapprochent par heure de marche; 2° Quelle est la distance de A à B. **R. :** 1° **1•** km; 2° •0 km.

6. Un cycliste et un automobiliste partent de A et vont dans le même sens. Par heure, le cycliste fait 18 km et l'automobiliste en fait 66. A quelle distance seront-ils l'un de l'autre : 1° au bout d'une heure? 2° au bout de 4 heures? **R. :** •• km; 2° •9• km.

OPÉRATIONS

Exercices portant sur les difficultés suivantes : *a*) un dividende partiel est multiple de plus de 2 nombres. (Ex. : 18, multiple de 2, 9, 6, 3); *b*) un nombre doit être divisé par lui-même; *c*) une différence de 1 existe entre le diviseur et le quotient; *d*) un zéro au quotient.

Diviser :

1. 1260 par 6   249 par 8   968 par 8   716 par 7   1890 par 9   368 par 4

2. 186 par 6   1648 par 4   2436 par 3   1806 par 6   812 par 8   721 par 7

3. 792 par 9   478 par 7   633 par 8   2436 par 3   450 par 6   234 par 5

4. 423 par 6   1470 par 7   1872 par 9   1621 par 3   562 par 8   807 par 4

5. 843 par 7   342 par 6   1506 par 6   916 par 3   236 par 5   1681 par 8.

(Marijon CE1 1947, pp. 78-79)

Dans la leçon 36, les premiers exercices sont en application directe des problèmes de vitesse. Ensuite, il y a une partition de l'espace à parcourir. Dans les derniers exercices on ajoute à ces problèmes de vitesse, les difficultés liées aux directions des déplacements étudiées en leçon 22.

Nous n'avons étudié que de façon tout à fait anecdotique les livres du CM. Au début de l'année, dans la 6ème leçon (sur 148), celle sur l'hectomètre, Royer (1942, p. 13) propose :

> (CM1) 73. Deux terrassiers creusent un fossé de 6 hm de longueur. Ils commencent chacun à une extrémité. L'un creuse 16 m de fossé par jour et l'autre 14 m. Au bout de combien de jours de travail se rencontreront-ils ? Combien chacun d'eux aura-t-il creusé de mètres de fossé ? (Faire un *croquis*)
>
> (CM2) 77. Deux piétons partent en même temps des deux extrémités A et B d'une rue qui a 8 hm,1 de longueur. Ils se dirigent l'un vers l'autre et parcourent à la minute, le premier 60 m et le second 75 m. Après combien de minutes de marche se rencontreront-ils ? A quelle distance du point A ? du point B ? (Faire un *croquis*) (Royer, p. 13, leçon « l'hectomètre ou centaine de mètres »)

Ces exercices semblent venir à la suite de ceux proposés par Marijon. Il est probable qu'ils préparent aux « problèmes de train ».

- Les pratiques économiques

À partir de 1930 seulement, la plupart de nos collections prescrivent au CE ou au CE2 des leçons sur les problèmes additifs relatifs aux pratiques économiques : prix d'achat, prix de vente, prix de revient (6/8) ; gain, dépense, économie (6/8) ; bénéfice, perte (5/8).

Boucheny donne par exemple une série de leçons relative aux pratiques économiques. D'après le sommaire du manuel, elles sont réparties sur les mois de janvier et février, nous en donnons la liste. À titre d'exemple, nous reproduisons la leçon 54 : « gain - dépense - économie ».

Prix total. – Prix de l'unité. – Nombre d'unités

Prix de revient

Bénéfice. – Perte

Prix de vente

Prix d'achat

Gain. – Dépense. – Economie

Gain total (Gain par jour. – Nombre de jours)

Dépense totale (Dépense par jour. – Nombre de jours)

Économie totale.

54e LEÇON

GAIN — DÉPENSE — ÉCONOMIE

203. Problème I. — **Michel gagne 15 000f par an et dépense 12 000f. Combien économise-t-il par an ?**

Michel économise ce qu'il gagne moins ce qu'il dépense, soit 15 000f — 12 000f = 3 000f.

204. Problème II. — **Michel gagne 15 000f par an et économise 3 000f. Combien dépense-t-il ?**

Michel dépense ce qu'il gagne moins ce qu'il économise, soit 15 000f — 3 000f = 12 000f.

205. Problème III. — **Michel dépense 12 000f par an et économise 3 000f. Combien gagne-t-il ?**

Michel gagne ce qu'il dépense plus ce qu'il économise, soit 12 000f + 3 000f = 15 000f.

206. D'une manière générale (fig. 72), on a :

Economie = gain — dépense ;
Dépense = gain — économie ;
Gain = dépense + économie.

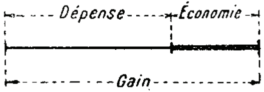


Fig. 72.

(Boucheny, p. 125)

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

4.4. D’autres signes de l’étude du sens des quatre opérations

- Opérations sur objets

Compte-tenu de l’environnement théorique du numérique reposant probablement sur la mesure des grandeurs, nous pensions trouver nombre d’exercices présentant des opérations sur les objets dans les manuels, en particulier pour la longueur. Elles sont en réalité relativement peu présentes. Néanmoins, on trouve généralement de tels problèmes additifs dans les premières leçons sur les unités de longueur à partir de la fin des années 20.

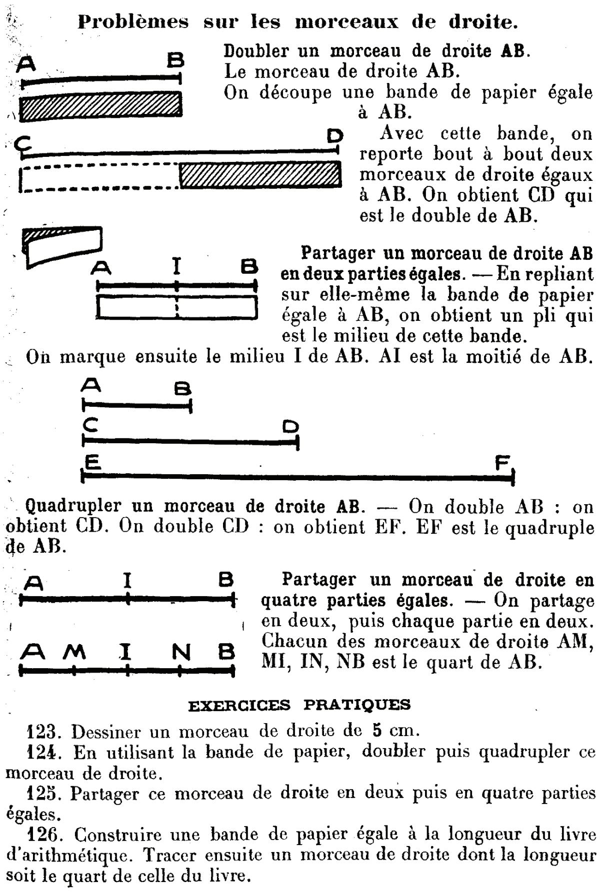
> 7. Dessinez une ligne de 5 cm. Prolongez-la de 35 mm. Par le calcul et par la mesure trouvez la longueur totale. (Marijon CE1 1957, 7ème leçon, « l’écolier mesure ou dessine de petites longueurs », p. 21)
>
> 88. Tracez un trait de 4 cm. Prolongez-le de 6 cm. Quelle est la longueur totale du trait ? (Vassort CECM, leçon « additionner »)
>
> Traçons une ligne de 4 cm. Prolongeons-la de 7 cm. Elle mesure … cm. (Bodard CE1, p. 41, leçon « usage de la règle, les lignes »)

Quelques manuels proposent de relier la division par deux au pliage en deux d’une bande. Dans notre sélection, nous avons repéré seulement deux manuels pour proposer une opération sur les objets reliée à la multiplication. C’est au CE2, dans Marijon 1947 (p. 149) et dans Dumarqué (p. 23). Cette dernière leçon ne mêle que peu les connaissances numériques aux actions sur les objets. Elle se place peu après l’introduction de l’addition et assez longtemps avant l’introduction de la multiplication et de la division, elle pourrait aussi préparer à l’apprentissage des fractions (au CM).

Quelle longueur obtiendrait-on en mettant bout à bout 100 lignes ayant chacune la longueur A ________ B ?

(Donner la réponse en décimètres.)

(Marijon CE2 1947, p. 149, leçon 33 : « Les longueurs. Révision et compléments »)



Problèmes sur les morceaux de droite.

Doubler un morceau de droite AB. Le morceau de droite AB. On découpe une bande de papier égale à AB. Avec cette bande, on reporte bout à bout deux morceaux de droite égaux à AB. On obtient CD qui est le double de AB.

Partager un morceau de droite AB en deux parties égales. — En repliant sur elle-même la bande de papier égale à AB, on obtient un pli qui est le milieu de cette bande. On marque ensuite le milieu I de AB. AI est la moitié de AB.

Quadrupler un morceau de droite AB. — On double AB : on obtient CD. On double CD : on obtient EF. EF est le quadruple de AB.

Partager un morceau de droite en quatre parties égales. — On partage en deux, puis chaque partie en deux. Chacun des morceaux de droite AM, MI, IN, NB est le quart de AB.

EXERCICES PRATIQUES

123. Dessiner un morceau de droite de **5** cm.

124. En utilisant la bande de papier, doubler puis quadrupler ce morceau de droite.

125. Partager ce morceau de droite en deux puis en quatre parties égales.

126. Construire une bande de papier égale à la longueur du livre d'arithmétique. Tracer ensuite un morceau de droite dont la longueur soit le quart de celle du livre.

(Dumarqué, p. 23, leçon « problèmes sur les morceaux de droite »)

- Les schémas cotés

Schémas et autres problèmes de longueur

Nous avons vu que les exercices relatifs aux déplacements sont ou non proposés avec un schéma coté. Dans beaucoup de manuels mais pas tous, d'autres exercices de calculs de longueur (ou la partie cours de certaines leçons) n'évoquent pas de déplacements mais s'appuient néanmoins sur une représentation linéaire de l'espace, un schéma.

Sans doute faut-il distinguer deux types de représentations : celles qui utilisent uniquement les propriétés d'ordre, celles qui constituent une représentation « fidèle » de l'espace dont on tire des informations.

Dans nos deux premiers exemples, c'est l'ordre qui nous semble important :

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

46e LEÇON ARITHMÉTIQUE

PROBLÈMES DE SOUSTRACTION
Addition et Soustraction - Preuve

Addition et soustraction - Problème : Louise a déjà fait **158 cm.** de tissage. Combien lui en manque-t-il pour en avoir **234 cm.** ?

158 cm. + ce qui manque = **234 cm.**

234
— 158
= 76

Solution
Il lui manque :
234 cm. — 158 cm. = **76 cm.**

La soustraction a servi ici à calculer **un des deux nombres** entrant dans un **total.**

1 - Paul a **137** billes. Combien lui en manque-t-il pour en avoir **255** ?

2 - Pierre a **78 fr.** Combien lui manque-t-il pour pouvoir acheter un béret de **155 fr.** ?

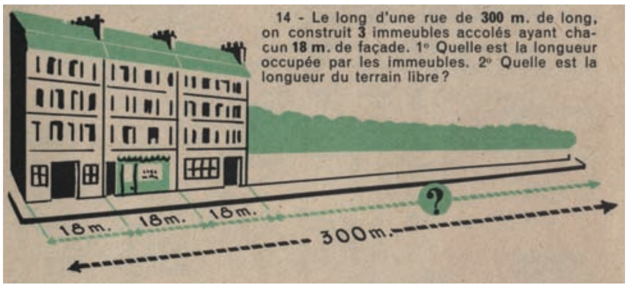
3 - Une ferme a récolté **545 kg.** de pommes de terre. Combien lui en manque-t-il pour avoir les **750 kg.** nécessaires à sa consommation ?

4 - Le fil de la lampe électrique a **168 cm.** de longueur. De combien faut-il l'allonger pour qu'il mesure **185 cm.** ?

5 - J'ai **358 cm.** de fil de fer. Quelle longueur m'en manque-t-il pour pouvoir le tendre entre deux poteaux distants de **385 cm.** ?

Preuve - Dans le problème précédent, **en ajoutant le résultat** de la soustraction au **petit nombre,** on obtient le **grand nombre.**
158 cm. (déjà faits) + 76 cm. (qui manquent) = **234 cm.**
C'est ainsi qu'on fait la **preuve** de la soustraction.

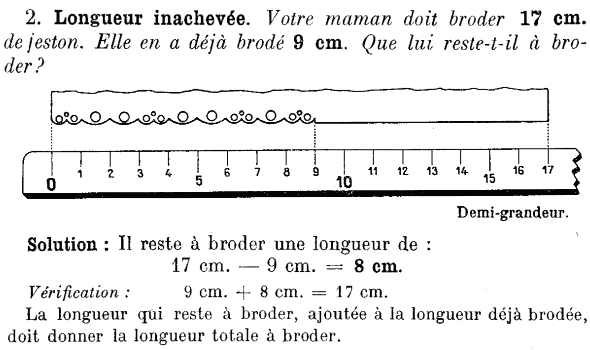
(Châtelet 1952, p. 84, leçon 46, « Problèmes de soustraction, addition et soustraction, preuve »)



14 - Le long d'une rue de **300 m.** de long, on construit **3** immeubles accolés ayant chacun **18 m.** de façade. 1° Quelle est la longueur occupée par les immeubles. 2° Quelle est la longueur du terrain libre ?

(Châtelet 1952, p. 131, leçon 71, « Multiplication par 3, 6, 9 »)

Dans les exemples qui suivent le schéma est presque image fidèle de la réalité. Il est utilisé à ce titre.

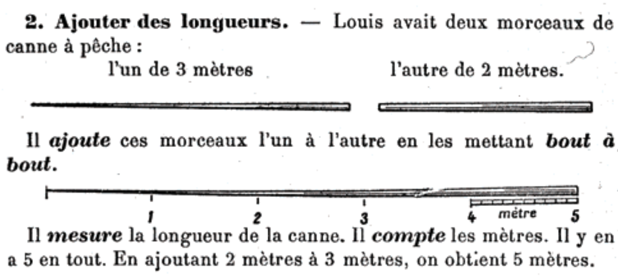


2. **Longueur inachevée.** *Votre maman doit broder* **17 cm.** *de feston. Elle en a déjà brodé* **9 cm.** *Que lui reste-t-il à broder ?*

Solution : Il reste à broder une longueur de :
17 cm. — 9 cm. = **8 cm.**

Vérification : 9 cm. + 8 cm. = 17 cm.
La longueur qui reste à broder, ajoutée à la longueur déjà brodée, doit donner la longueur totale à broder.

(Châtelet 1932, p. 31, leçon 11 « Usage de la table d'addition, partie inconnue d'une somme »)



2. Ajouter des longueurs. — Louis avait deux morceaux de canne à pêche :
l'un de 3 mètres l'autre de 2 mètres.

Il ***ajoute*** ces morceaux l'un à l'autre en les mettant ***bout à bout.***

Il ***mesure*** la longueur de la canne. Il ***compte*** les mètres. Il y en a 5 en tout. En ajoutant 2 mètres à 3 mètres, on obtient 5 mètres.

(Marijon 1947 CE1, p. 14, leçon 4 « addition »)

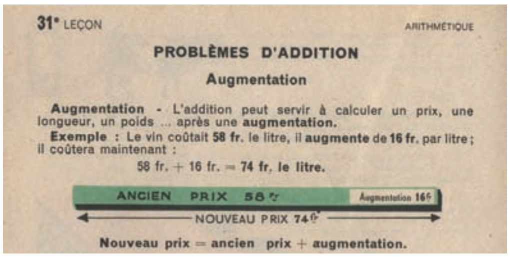
Schémas et problèmes qui ne relèvent pas de la longueur

Par ailleurs, on trouve aussi, notamment dans la partie cours des leçons, des schémas cotés pour représenter d'autres grandeurs que la longueur, en particulier pour les pratiques

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

économiques même si ce n’est pas systématique. D’après nos observations, ces leçons n’interviennent jamais avant l’étude de la longueur. Et les élèves ont en général (mais pas toujours) rencontré au préalable des schémas cotés dans des problèmes de longueur.

Quand il s’agit de représenter d’autres grandeurs, on retrouve la même dualité : respecter des proportions ou seulement un ordre.


31e LEÇON ARITHMÉTIQUE

PROBLÈMES D'ADDITION

Augmentation

Augmentation - L'addition peut servir à calculer un prix, une longueur, un poids ... après une **augmentation**.

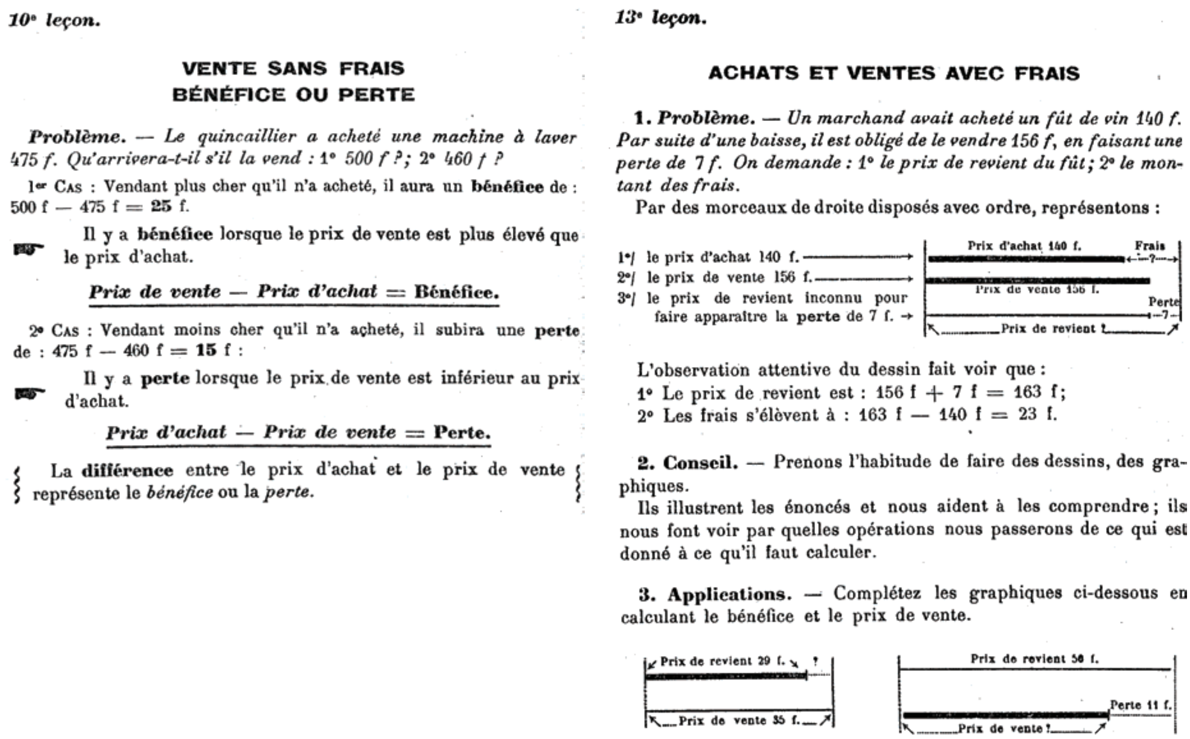
Exemple : Le vin coûtait **58 fr.** le litre, il **augmente de 16 fr.** par litre ; il coûtera maintenant :

58 fr. + 16 fr. = **74 fr. le litre.**

Nouveau prix = ancien prix + augmentation.

(Châtelet 1952, p. 58)

Marijon 1947 propose une progression sur les pratiques économiques avec une prise en compte des schémas, on peut sans doute voir un parallèle avec qu’il avait proposé sur les longueurs. Ci-après deux leçons consécutives : la première ne comporte pas de schéma coté, la deuxième en comporte. En fait, les schémas ne sont pas introduits au début de ces leçons sur les pratiques économiques mais en cours d’apprentissage, à la leçon 13, et y sont objet de la règle du jour.


10e leçon.

VENTE SANS FRAIS
BÉNÉFICE OU PERTE

Problème. — *Le quincaillier a acheté une machine à laver 475 f. Qu'arrivera-t-il s'il la vend : 1° 500 f ? ; 2° 460 f ?*

1er Cas : Vendant plus cher qu'il n'a acheté, il aura un **bénéfice** de : 500 f — 475 f = **25** f.

Il y a **bénéfice** lorsque le prix de vente est plus élevé que le prix d'achat.

***Prix de vente* — *Prix d'achat* = Bénéfice.**

2e Cas : Vendant moins cher qu'il n'a acheté, il subira une **perte** de : 475 f — 460 f = **15** f :

Il y a **perte** lorsque le prix de vente est inférieur au prix d'achat.

***Prix d'achat* — *Prix de vente* = Perte.**

La **différence** entre le prix d'achat et le prix de vente représente le *bénéfice* ou la *perte*.

13e leçon.

ACHATS ET VENTES AVEC FRAIS

1. Problème. — *Un marchand avait acheté un fût de vin 140 f. Par suite d'une baisse, il est obligé de le vendre 156 f, en faisant une perte de 7 f. On demande : 1° le prix de revient du fût ; 2° le montant des frais.*

Par des morceaux de droite disposés avec ordre, représentons :

1°/ le prix d'achat 140 f.
2°/ le prix de vente 156 f.
3°/ le prix de revient inconnu pour faire apparaître la **perte** de 7 f.

L'observation attentive du dessin fait voir que :
1° Le prix de revient est : 156 f + 7 f = 163 f ;
2° Les frais s'élèvent à : 163 f — 140 f = 23 f.

2. Conseil. — Prenons l'habitude de faire des dessins, des graphiques.
Ils illustrent les énoncés et nous aident à les comprendre ; ils nous font voir par quelles opérations nous passerons de ce qui est donné à ce qu'il faut calculer.

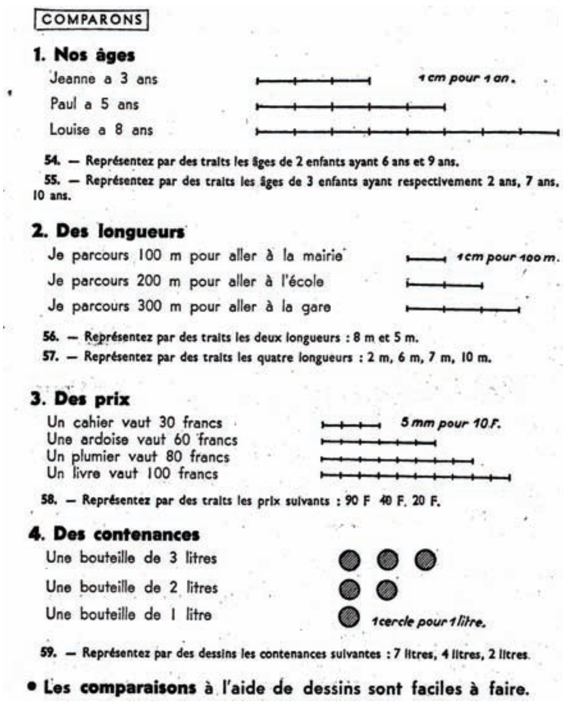
3. Applications. — Complétez les graphiques ci-dessous en calculant le bénéfice et le prix de vente.

(Marijon CE2 1947, pp. 102, 108)

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Vassort (CECM, p. 12, échelle 0,5) propose même, mais c'est exceptionnel dans nos manuels, de représenter des nombres par des longueurs pour les comparer.



On trouve également des leçons du type « problèmes de soustraction » ou « problèmes de division » ; ces titres sont parfois complétés par une des qualifications évoquées ci-après.

- Une certaine étude des structures additives

A partir de 1932, on voit, dans les titres des leçons sur l'addition ou la soustraction de nos 7 collections (pour au moins un des niveaux), des expressions parmi : total / somme (4 fois), reste (6 fois), différence (5 fois), partie inconnue d'une somme / complément (3 fois)[48], et aussi une fois : <u>calcul d'une quantité en trop</u> et <u>problèmes de soustraction. Addition et soustraction. Preuve</u>. On trouve dans Marijon CE1 1957, et seulement là, les deux titres suivants : <u>Combien avait-on : avant d'avoir ajouté ?… ôté ?</u> et <u>Combien a-t-on : ajouté ? ôté ?</u>

Il est clair qu'il s'agit d'étudier le sens des opérations, indépendamment de la grandeur. Nous les avons regroupés par rapport aux trois premières catégories de Vergnaud (1981). Il faudrait une étude plus fine pour déterminer quels sont les cas effectivement étudiés, ce à quoi ils correspondent véritablement, ce qui est institutionnalisé et les justifications éventuelles. Rappelons que *reste, différence* et *partie inconnue d'une somme* sont évoqués dans les instructions officielles de 1945. Ces éléments viennent compléter ce que nous avons dit en présentation des leçons sur une opération : on voit que l'introduction d'une opération peut

[48] Les regroupements sont de nous.

proposer plusieurs structures sémantiques ou bien que c'est au cours de leçons spécifiques qu'elles peuvent être travaillées.

Seuls les quatre manuels les plus anciens ne citent aucune de ces expressions dans leurs titres. Qu'un manuel ne les utilise pas dans ses titres ne signifie pas nécessairement qu'il ne traite pas ces questions, cependant s'il le fait, il ne le met pas en avant.

De plus, toutes nos collections sauf Minet et Châtelet 1932 ont une leçon Preuve de la soustraction qui met en relation l'addition et la soustraction. Il faudrait voir dans quelle mesure les cas étudiés et les discours développés sont susceptibles de contribuer à cette étude du sens des opérations.

- Multiplication division

Redéfinition de la multiplication

Neuf collections sur onze utilisent les mots multiplicande ou multiplicateur dans au moins un des titres du sommaire ou la préface. Minet et Châtelet 1932 ne le font pas. Ceci semble impliquer que l'approche décrite par Harlé (1984) est maintenue jusqu'en 1970. Même si on ne dit pas dans les manuels les plus récents qu'il s'agit de nombres concrets et abstraits, on écrit la multiplication d'un nombre concret par un nombre abstrait.

Sept collections sur onze, réparties sur toute notre période, proposent des leçons sur un, deux ou les trois termes de la relation :

quantité totale = quantité unitaire × nombre d'unités.

Ces leçons n'apparaissent *jamais* en début de progression. Il est donc clair que, dans nos manuels, cette relation n'est pas utilisée pour introduire la multiplication ou la division. Les instructions officielles de 1945 pouvait laisser penser le contraire.

Par ailleurs, ces leçons nous semblent être de plusieurs types. Il peut s'agir de titres relevant de pratiques de la vie courante ou impliquant des grandeurs particulières : recherche du prix de l'unité, salaires, vitesse, longueur, capacité ou poids total. Elles peuvent aussi avoir un titre générique : quantité, valeur d'une quantité, valeur de l'unité. Elles font donc intervenir potentiellement les grandeurs quotients suivantes : monnaie / unité (prix unitaire), monnaie / temps (salaire), longueur / unité (longueur unitaire), capacité / unité (capacité unitaire), masse / unité (poids unitaire), longueur / temps (vitesse). La présence de ces grandeurs quotients peut cependant n'être qu'implicite, non formalisée. Pour savoir ce qu'il

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

en est, il faudrait étudier le texte de ces leçons, ce que nous ne ferons pas. La monnaie semble être très largement représentée dans ces leçons.

Ces leçons sont susceptibles d'avoir plusieurs fonctions : on y enseigne des pratiques de la vie courante, on diversifie les situations multiplicatives rencontrées par les élèves, elles sont susceptibles, sous certaines conditions, de permettre de redéfinir le sens de la multiplication.

En effet, elles permettent, voire obligent, de passer de l'addition itérée à la multiplication (si c'est ainsi que la multiplication a été introduite et si la nouvelle relation multiplicative est explicitée avec les grandeurs quotient). De plus, la relation liée à la valeur totale fonctionne encore quand le nombre d'unités n'est plus entier (multiplicateur décimal), c'est à dire quand l'addition itérée ne suffit plus pour penser la multiplication.[49] Dans l'approche de la multiplication par « multiplicande » et « multiplicateur », le multiplicateur est un nombre abstrait et le produit est de la nature du multiplicande. Dans l'approche par « quantité totale », le « nombre d'unité » n'est pas un nombre abstrait et le produit n'est pas de la nature de la « quantité unitaire ». Les trois termes sont « concrets » mais de natures différentes. Éventuellement, ces deux approches peuvent être soutenues par des savoirs savants de référence différents mais complémentaires (cf. chapitre II).

Une certaine étude des structures multiplicatives

A partir de 1932, tous nos collections sauf Châtelet 1952 (6 sur 7) présentent au CE2 (ou au CE) une ou deux leçons sur le quadrillage (du carré et du rectangle). Chez Marijon cette leçon est intitulée <u>droites parallèles et quadrillages</u> (1947) puis <u>bandes et quadrillages</u> (1957). Chez Châtelet 1932, c'est la leçon précédente qui s'appelle <u>bandes et droites parallèles</u>. La leçon sur le quadrillage est ou non suivie d'une ou deux autres relatives aux surfaces (aires) du carré et du rectangle et aux unités métriques. (Ces deux leçons existent d'ailleurs dans les manuels antérieurs à 1932 qui ne comportent pas de leçons sur le quadrillage). Toutes ces leçons n'apparaissent jamais au début de l'étude de la multiplication. Le programme de 1923 prescrit :

> Idée de la mesure des surfaces rectangulaires par quadrillage.

Les programmes et instructions de 1945 indiquent :

> Carré, rectangle, quadrillages

---

[49] Ceci ne signifie pas que la multiplication avec les nombres non entiers est introduite par cette relation entre grandeurs quotients (ces nombres n'apparaissent pas au CE que nous avons étudié). Cette relation nous semble néanmoins susceptible d'élargir le sens de la multiplication.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

> […] l'examen d'un quadrillage justifie le calcul de la surface d'un rectangle dont les dimensions sont des nombres entiers, soit de cm, soit de m. Cet examen fournit aussi l'objet de petites manipulations et de vérifications d'égalités numériques, par exemple
>
> $6 \times 2 = 3 \times 4$

On met donc en 1945 explicitement en relation multiplication et quadrillage. Peut-être peut-on en outre voir dans l'exemple une incitation à un travail autour de l'associativité de la multiplication.

Quelques mots sur la division

Pour la division, seulement trois collections font apparaître les deux aspects : calcul de la valeur d'une part[50] et calcul du nombre de parts dans les titres des leçons relatives à la division. Deux autres évoquent seulement le premier cas avec « partager en parties égales » ou « partager en n » (n entier). La locution systématiquement utilisée dans les autres collections pour évoquer la division est : diviser par n. Le programme de 1923 indiquait seulement comme mention relative à la division au CP :

> Diviser des groupes d'objets en 2, 3, 4 parts égales.

Les titres ne nous permettent pas de savoir comment ce cas et l'autre sont traités dans les manuels. La leçon « preuve de la division » presque toujours présente est une mise en relation de la multiplication et de la division. Par ailleurs, la division peut trouver sa place dans les leçons sur quantité totale, unitaire et nombre d'unités.

- Enchaîner les opérations

Deux collections font apparaître, dans les sommaires, des leçons relatives aux problèmes où interviennent plusieurs opérations. On a ainsi :

- dans Mortreux au CE2 : <u>additions parallèles ou successives</u>, <u>soustractions parallèles ou successives</u>, <u>addition et soustraction</u>, <u>multiplications successives</u>,
- dans Marijon : <u>Produits de trois facteurs</u> (CE1 1947), <u>Produits de 3 facteurs. Recherche de l'un des facteurs</u> au CE2.

Ces leçons n'apparaissent que dans peu de sommaires mais une lecture superficielle de plusieurs manuels semble montrer que les opérations parallèles ou successives sont souvent utilisées comme un élément des progressions.

Exemple d'opérations parallèles :

---

[50] il s'agit en fait de « partager en parts égales » pour l'un deux

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

> Pour tapisser 3 pièces, j'ai acheté pour la première 14 rouleaux de papier pour 40 francs ; pour la deuxième 12 rouleaux pour 24 francs et pour la troisième 11 rouleaux pour 33 francs. Combien ai-je acheté de rouleaux et pour quelle somme ? (Clap, p. 15, « deux sommes »)

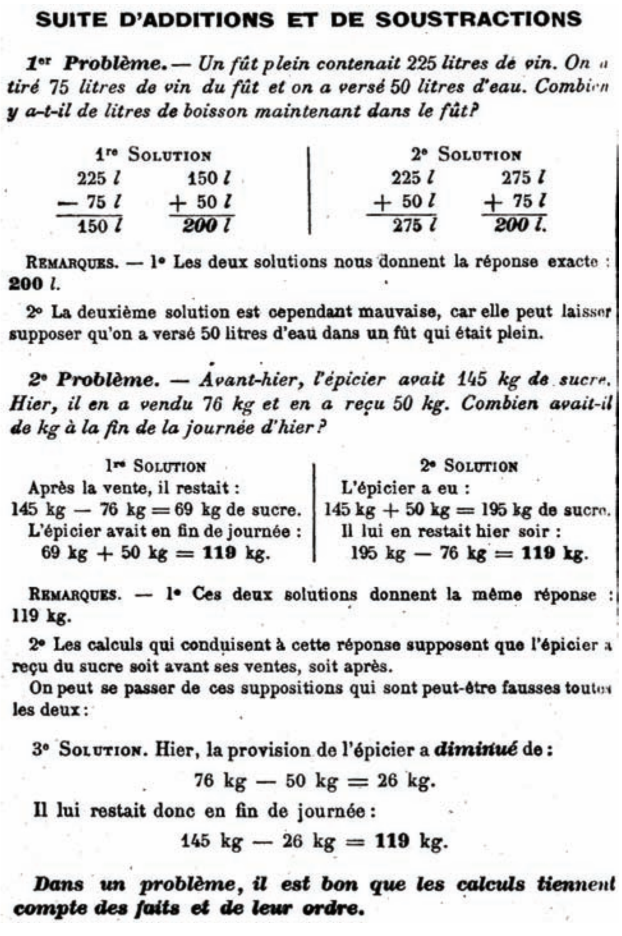
Exemple d'opérations successives :

> Deux troncs d'arbres ont : le premier 12 m de longueur et le deuxième 3 mètres de plus. Quelle est la longueur du deuxième et quelle est la longueur totale des deux troncs ? (Clap, p. 19, « deux sommes »)

Ces opérations parallèles ou successives semblent être un moyen d'approfondir le travail déjà effectué sur le sens des opérations, dans un contexte un peu plus ardu, mais sans concept supplémentaire.

- Problèmes absurdes et adéquation à la réalité

Nous avons trouvé dans un manuel (ce qui ne présage en rien de la fréquence de la chose car nous ne l'avons pas cherchée) une leçon « suite d'additions et de soustractions ». Cette leçon pose le problème de l'adéquation entre le « réel » et les « calculs » ce point a déjà été relevé pour l'enseignement ancien avec les problèmes absurdes de règle de trois par exemple (Hersant, 2005 ; Harlé, 1984). Ces problèmes absurdes se présentent dès lors qu'on ne distingue pas d'une part ce qui relève de la compréhension fine de la situation et de sa traduction par des calculs à effectuer, d'autre part de la façon dont on s'y prend pour effectuer ces calculs pour lesquels on peut mobiliser des propriétés des opérations pour en rendre notamment certains plus agréables à effectuer.



SUITE D'ADDITIONS ET DE SOUSTRACTIONS

1er Problème. — *Un fût plein contenait 225 litres de vin. On a tiré 75 litres de vin du fût et on a versé 50 litres d'eau. Combien y a-t-il de litres de boisson maintenant dans le fût?*

1re Solution		2e Solution	
225 l	150 l	225 l	275 l
− 75 l	+ 50 l	+ 50 l	+ 75 l
150 l	**200 l**	275 l	**200 l.**

Remarques. — 1° Les deux solutions nous donnent la réponse exacte : **200 l.**

2° La deuxième solution est cependant mauvaise, car elle peut laisser supposer qu'on a versé 50 litres d'eau dans un fût qui était plein.

2e Problème. — *Avant-hier, l'épicier avait 145 kg de sucre. Hier, il en a vendu 76 kg et en a reçu 50 kg. Combien avait-il de kg à la fin de la journée d'hier?*

1re Solution	2e Solution
Après la vente, il restait :	L'épicier a eu :
145 kg — 76 kg = 69 kg de sucre.	145 kg + 50 kg = 195 kg de sucre.
L'épicier avait en fin de journée :	Il lui en restait hier soir :
69 kg + 50 kg = **119** kg.	195 kg — 76 kg = **119 kg**.

Remarques. — 1° Ces deux solutions donnent la même réponse : 119 kg.

2° Les calculs qui conduisent à cette réponse supposent que l'épicier a reçu du sucre soit avant ses ventes, soit après.

On peut se passer de ces suppositions qui sont peut-être fausses toutes les deux :

3° Solution. Hier, la provision de l'épicier a ***diminué*** de :

76 kg — 50 kg = 26 kg.

Il lui restait donc en fin de journée :

145 kg — 26 kg = **119** kg.

Dans un problème, il est bon que les calculs tiennent compte des faits et de leur ordre.

(Marijon CE2 1947, p. 106, 12ème leçon)

4.5. En conclusion

Les pratiques des manuels concernant l'étude des opérations semblent assez variées ainsi que l'articulation éventuelle entre les différents axes des progressions. Il nous semble néanmoins

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

important de résumer les ressorts que nous avons identifiés pour les programmations, susceptibles de contribuer à l'étude du sens des opérations :

- l'introduction précoce du symbolisme arithmétique accompagné de l'élaboration de techniques de calcul sur des nombres particuliers qui constituent des moyens de calcul pour travailler le sens des opérations avant de disposer d'un algorithme définitif pour la technique opératoire. Ces moyens ne sont d'ailleurs pas provisoires en ce sens qu'ils restent pertinents même quand l'enseignement de la technique opératoire est terminé,
- l'imbrication de l'étude de plusieurs opérations avec deux leviers :
    - dans la découverte d'une opération et de sa technique opératoire : l'imbrication des études des différentes opérations,
    - les leçons de révision susceptibles de mêler différentes opérations,
- des combinaisons d'opérations (opérations parallèles ou successives) pour retravailler les points déjà étudiés dans un contexte un peu plus complexe,
- une étude plus ou moins systématique de différents « sens » des opérations qu'on peut rapprocher des structures relationnelles additives et multiplicatives (Vergnaud 1981),
- avec les unités utilisées dans l'étude des opérations et l'articulation éventuelle avec leur étude dans le système métrique,
- des progressions relatives à la résolution de problèmes d'arithmétique caractéristiques de certaines pratiques de référence pour la vie courante :
    - avec des questions relatives à l'addition et à la soustraction : déplacements, pratiques économiques, questions relatives aux masses notamment. Dans certains manuels, ces pratiques de la vie courante sont rattachées aux leçons de système métrique.
    - avec des questions relatives à la multiplication et à la division pour l'étude de différentes grandeurs quotients qui correspondent à des pratiques de la vie courante (vitesse, salaire mensuel, prix unitaire, etc.)

Si ces pratiques de la vie courante sont d'abord étudiées séparément sur le plan additif d'une part, sur le plan multiplicatif d'autre part, il semble bien que pour certaines d'entre elles au moins, on peut estimer que l'étude mêlée aux opérations se prolonge au CM dans l'étude de la proportionnalité (voire dès le CE dans certains manuels).

Ces pratiques sont susceptibles de renforcer le sens des différentes grandeurs même si elles peuvent parfois ressembler à un catalogue de techniques. Précisons qu'en général elles interviennent plutôt tardivement dans les programmations (seulement au CE2

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

pour les questions économiques chez Marijon 1947 par exemple, alors qu'il étudie les problèmes de longueur dès le CE1),

- un enrichissement possible du sens de la multiplication en passant de la définition par multiplicande et multiplicateur à la relation ternaire entre quantité totale, quantité unitaire et nombre d'unités qui peut correspondre à une modification du savoir savant de référence.

5. Conclusion du chapitre

À la fin de cette étude, nous avons le sentiment d'une imbrication très forte entre l'étude des nombres, des opérations et des grandeurs. On peut probablement penser qu'on a, à partir des années 30, une période dans laquelle numération, opération et grandeur sont fortement articulés. Cette articulation se manifeste tant dans les tâches, que les techniques que les technologies qui semblent être adaptées pour mieux trouver leur place dans les chaînes trophiques. Elle semble être plus perfectionnée pour l'étude de la numération.

Les pratiques de référence pour la vie courante impliquant les grandeurs apparaissent comme un instrument tant pour l'étude des nombres, que des opérations et que des propriétés des grandeurs. Pour l'étude des opérations, elles nous semblent être à l'origine de progressions sur certaines grandeurs dont elles sont susceptibles de renforcer la connaissance. Pour l'étude du système métrique, elles apparaissent notamment à travers les tâches de mesurage et sont orientées vers l'étude de la numération. Elles réapparaissent, évoquées, dans les problèmes d'arithmétique relevant de la numération. Il semble raisonnable d'affirmer qu'à partir des années 30 l'étude de certaines pratiques de la vie courante passe notamment par leur élucidation à partir des connaissances sur les nombres, sur les opérations, sur les propriétés des grandeurs.

Il semble qu'aujourd'hui certains de ces savoirs didactiques, éventuellement empiriques, qui se sont élaborés notamment dans la première moitié du 20ème siècle soient perdus. Certains de ces savoirs, après avoir disparu, sont visiblement en train d'être reconstruits dans des travaux de didactique (même s'ils apparaissent au sein de logiques différentes). Il nous semble que c'est ce qu'on peut dire par exemple des différents problèmes additifs (ce qu'on a ajouté, ce qui manque…) qui sont, nous semble-t-il, réapparus avec les travaux de Vergnaud (1981). Il nous semble que c'est aussi ce qu'on peut dire des divers moyens d'articuler plusieurs études que nous avons mis en évidence. La densité des réseaux trophiques est d'ailleurs ce qui nous semble le plus remarquable dans ces manuels anciens. Ces réseaux sont assurément le fruit

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

d'une longue élaboration, et il nous semble qu'on la voit en train de se faire pour ce qui concerne l'articulation entre système métrique et numération dans ce que nous interprétons comme la manifestation de différents essais au début du 20ème siècle. Il nous semble que ces transformations sont au cœur de la problématique écologique actuelle en didactique.

À quels moments ces disparitions se sont-elles produites ? La réforme a-t-elle été effectivement le déclencheur ? Y a-t-il eu des prémisses ? Tout ce qui restait a-t-il été balayé dans la décennie 1970 ou bien certains éléments lui ont-ils survécu ?

Nous avons tenté de mettre à jour une organisation mathématique et non une organisation didactique. Pour ce qui concerne les multiples étapes pour l'étude des techniques opératoires (repérables à partir des années 30), nous avons dit qu'elles constituaient des techniques de calcul pour des nombres particuliers, ainsi que des étapes dans la construction des algorithmes. Nous les voyons aussi comme des technologies pour l'étude des algorithmes. Qu'est-ce que les élèves en retenaient ? Nous n'en savons rien mais nous retenons qu'il y a la possibilité de justifier les algorithmes auprès des élèves.

Ensuite, on peut voir, notamment dans les problèmes spécifiques à certaines grandeurs, un répertoire de techniques à apprendre pour résoudre des problèmes des types. Il est connu que des institutionnalisations de trop de techniques ne favorisent pas la prise d'initiative pour la résolution des problèmes d'arithmétique. Nous ne savons pas ce qui se passait dans les classes avant la réforme. Nous pensons qu'on peut aussi voir ces problèmes et ces techniques comme des points de repère *pour l'enseignant* dans une progression pour l'apprentissage des grandeurs.

Que retenir de cette étude pour l'enseignement d'aujourd'hui ? Nous retenons qu'il existait une organisation mathématique très structurée par les réseaux trophiques relatifs aux savoirs sur les nombres, les grandeurs et les techniques opératoires et il nous semble que la situation actuelle est moins structurée et sans doute beaucoup moins homogène. Nous pensons aussi qu'il y a sans doute des équilibres à réfléchir, au niveau de l'organisation didactique notamment, entre les techniques qu'on institutionnalise et les autres, le problème étant d'une part de donner suffisamment de repères aux élèves et d'autre part de leur laisser la possibilité de prendre des initiatives.

Après cette étude de manuels scolaires anciens, nous voulons étudier les connaissances des élèves d'aujourd'hui. Compte tenu des déséquilibres profonds qui semblent s'être produits dans les rapports entre les grandeurs et nombres depuis la réforme, nous cherchons à savoir si

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

les élèves d'aujourd'hui sont capables d'utiliser conjointement leurs connaissances sur les nombres et les grandeurs pour étudier des situations qui impliquent les grandeurs. L'élaboration d'un questionnaire à destination des élèves d'aujourd'hui sera l'objet du prochain chapitre.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Chapitre 4. Elaboration d'un questionnaire pour étudier les liens entre les connaissances des élèves dans les différents domaines

Dans ce chapitre, nous poursuivons notre travail en étudiant, dans les connaissances des élèves, les articulations entre différents savoirs. Nous cherchons principalement à savoir si les élèves actuels sont capables d'utiliser conjointement leurs connaissances sur les grandeurs et les nombres pour traiter les situations qui impliquent des grandeurs. Pour nous, cette question se pose en fin de scolarité primaire et sur des connaissances plutôt anciennes. Pour ce faire, nous mettons au point un questionnaire. Nous cherchons donc à proposer aux élèves des exercices qui, selon nous, imbriquent fortement les grandeurs et les nombres. Nous essayons de proposer un « même » exercice dans différents contextes. Nous voulons notamment savoir si les élèves utilisent le même genre de techniques dans les différents contextes ce qui pourrait n'être pas le cas compte tenu des ruptures, observables dans les programmes, entre grandeurs et nombres. Pour élaborer notre questionnaire, nous utilisons des questions tirées de notre étude des savoirs savants qui permettent d'interpréter les programmes actuels et de celle des manuels scolaires anciens. Une étude de travaux sur l'enseignement actuel nous permet de préciser certaines de nos questions. Les exercices sont inspirés principalement par trois sources : l'enseignement ancien car on y trouve beaucoup de problèmes imbriquant grandeurs et nombres et surtout des problèmes en relation avec nos questions ; de même notre étude des théories nous inspire des exercices ; les évaluations d'entrée en 6ème permettent de repérer des exercices peut-être plus conformes à ce qui se fait actuellement.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

1. Objet d'étude et méthodologie

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié des manuels scolaires d'avant la réforme, nous avons mis en évidence des praxéologies mathématiques relatives à l'étude des grandeurs. Nous considérons qu'il en ressort une très forte imbrication entre les différentes domaines : grandeurs, nombres et opérations. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'enseignement actuel et aux connaissances des élèves d'aujourd'hui. Le problème qui nous préoccupe est de savoir s'ils sont capables d'utiliser conjointement leurs connaissances sur les grandeurs et les nombres pour résoudre des problèmes qui impliquent des grandeurs. Pour étudier ce problème, nous élaborons un questionnaire à leur intention. Nous choisissons de proposer des exercices abordables a priori par les élèves de fin de CM2. Il devrait s'agir de tâches qui ne mobilisent que des connaissances relativement anciennes.

Après avoir précisé nos questions quant aux connaissances que nous voulons étudier en nous appuyant sur nos études précédentes (programmes, théories, enseignement ancien), nous essayons de faire un premier point sur ces questions en utilisant divers travaux sur l'enseignement actuel. Nous présentons ensuite l'élaboration du questionnaire. Il sera mis au point en deux temps : un pré-test puis un test.

1.1. Premières questions

L'étude des programmes montre une rupture entre discret et continu en 1970 pour l'enseignement des nombres et des opérations. Depuis 1980, on réintroduit des grandeurs, de façon locale, pour étudier le numérique. Ceci donne à penser que les grandeurs et le continu sont nécessaires pour conduire les apprentissages numériques (chapitre 2). Avant 1970, les programmes prescrivent d'étudier les nombres et les grandeurs conjointement. Nous avons vu que cette articulation se manifeste de façons diverses dans l'étude des nombres et des opérations et qu'elle semble forte (chapitre 3). En 1970, on peut dire qu'on apprend les nombres avec le discret puis qu'on les applique dans des situations impliquant des grandeurs continues. Ce parti pris est sans doute moins rigoureux aujourd'hui qu'il ne l'a été initialement. Toutefois on peut penser que le maintien du domaine mesure de 1970 à aujourd'hui, le travail en dehors de tout contexte qu'on peut observer dans des leçons du domaine numérique dans beaucoup de manuels scolaires actuels et les traces laissées probablement par la réforme dans les pratiques des enseignants donnent encore de l'actualité à la question de savoir si les élèves sont capables d'utiliser conjointement leurs connaissances sur les nombres et les grandeurs en fin de scolarité primaire pour étudier des « situations ». En outre, n'y a-t-il pas des connaissances spécifiques des grandeurs, nécessaires pour étudier les nombres et les opérations, qui leur manqueraient ?

1.2. Des questions tirées de nos études précédentes sur les théories, programmes et enseignement ancien.

Nos études précédentes permettent de préciser ces questions.

- Théories et programmes

Nous avons vu que l'explicitation des opérations sur les objets a progressivement disparu des programmes et instructions du primaire à partir de 1980. Notre étude des théories met en évidence qu'une théorie des grandeurs-objets relie l'ordre et l'addition : soit par l'axiome d'Archimède, soit par l'axiome de l'addition qui agrandit. Par ailleurs, la construction de nombres non entiers utilise toujours le partage en parts égales d'un objet ou d'une grandeur. L'absence d'opérations explicites sur les objets dans les programmes se manifeste-t-elle dans les connaissances des élèves ou bien l'enseignement les prend-il en charge même si ça ne se voit pas dans les programmes et instructions ?

- Numération et système métrique

Techniques communes à la numération et au système métrique.

Notre étude de l'enseignement ancien met notamment en évidence des technologies mixtes

entre numération et système métrique pour traiter les tâches que nous avons appelées de décomposition et recomposition. Cette étude n'est pas terminée néanmoins on peut penser que pour tout ce qui concerne les unités de la numération et les unités métriques, on enseignait des techniques très proches dans les deux domaines. Nous cherchons à savoir si les élèves actuels utilisent le même genre de techniques dans les deux domaines. La rupture entre les deux domaines, dans les programmes, pourrait masquer la possibilité d'utiliser les mêmes techniques dans l'un et l'autre.

Par ailleurs, l'étude de l'enseignement ancien montre une articulation entre les tâches de mesurage et l'apprentissage de la numération. Cette étude met aussi en évidence l'appui sur les pratiques sociales pour étudier le système métrique. Ces pratiques sociales ont beaucoup évolué. Est-il possible, aujourd'hui, de proposer des tâches d'étude du système métrique qui

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

s’appuient sur des pratiques sociales ? Peut-on concevoir de telles tâches ? Comment les élèves les réussissent-ils ? Observe-t-on une différence selon qu’il s’agit de tâches formelles ou de pratiques sociales évoquées ou effectives ? C’est la faiblesse présumée des pratiques sociales engageant le système métrique dans l’enseignement actuel, relevée par Brousseau (cf. chapitre 1) notamment, qui nous fait poser ces questions.

- Opérations

Pour les opérations, nous retenons trois éléments de notre étude des manuels anciens.

L’influence de la grandeur

Dans l’enseignement ancien, on observe une relative diversité des grandeurs dans les problèmes proposés aux élèves (bien que cela semble dépendre fortement des manuels) qu’on peut repérer dans les unités des exercices ou dans les pratiques sociales étudiées. Peut-on repérer une incidence de la grandeur sur la réussite des élèves d’aujourd’hui pour des exercices qui ont la « même » structure ? La rupture entre discret et continu imposée par le programme de 1970 et peut-être plus ou moins conservée jusqu’à aujourd’hui se manifeste-t-elle dans les réussites des élèves ?

Les schémas cotés

Dans l’enseignement ancien, nous avons relevé la place relativement importante accordée aux schémas cotés qui, dans certains manuels au moins, sont véritablement pris dans des progressions. Cette place se manifeste de deux façons : d’une part ces schémas participent de la résolution de problèmes spécifiques de la longueur, d’autre part ils constituent des outils pour résoudre des problèmes qui ne relèvent pas de la longueur. Dans quelle mesure les schémas sont-ils disponibles chez les élèves d’aujourd’hui ? Savent-ils les interpréter ? Savent-ils les utiliser ? Comment les élèves d’aujourd’hui réussissent-ils les problèmes de déplacement qui mobilisent sans doute des connaissances spécifiques relatives à la structuration de l’espace ? Peut-on repérer des difficultés spécifiques liées à l’interprétation ou à la production de ces schémas ?

La programmation des apprentissages des opérations

Nous avons vu qu’il semble qu’avant la réforme les élèves étudient de front plusieurs opérations. Ceci est possible notamment parce qu’on développe des techniques de calculs sur des nombres spécifiques et qu’on les utilise pour résoudre des problèmes d’arithmétique. La

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

programmation actuelle, tardive, de l'apprentissage de certaines opérations (alors qu'on travaille beaucoup plus tôt le « sens » des problèmes qui pourraient se résoudre avec ces opérations) a-t-elle une incidence sur la connaissance du sens des opérations en fin de scolarité primaire ? Peut-on repérer des difficultés des élèves relatives au sens des opérations qu'on pourrait attribuer à cette programmation ? Un travail sur des « nombres ronds » a-t-il une pertinence en fin de scolarité primaire, même après que les élèves ont appris tous les algorithmes ?

1.3. Méthode

Pour étudier ces questions nous élaborons un questionnaire que nous proposons à des élèves en fin de scolarité primaire. Il a une visée exploratoire. Nous voulons faire une étude statistique pour repérer des régularités dans les connaissances et les difficultés des élèves. Le but de ce chapitre est de présenter l'élaboration du questionnaire. Nous avons identifié trois problèmes à résoudre. Il nous faut :

- préciser les questions que nous étudions,
- mettre au point une série d'exercices pertinents au regard de ces questions,
- étalonner notre questionnaire : il doit, en un sens que nous préciserons, être adapté au niveau des élèves.

Il nous faut aussi prévoir la façon dont nous pourrons traiter les réponses des élèves pour étudier nos questions.

▪ Dialectique entre questions, exercices et étalonnage

Pour résoudre nos trois problèmes nous utilisons plusieurs sources :

- nos deux études précédentes sur les théories et programmes et sur l'enseignement ancien,
- les évaluations nationales d'entrée en $6^{ème}$,
- des travaux plus divers contenant des éléments sur les connaissances et les difficultés des élèves.

A-t-on déjà des éléments sur les connaissances et les difficultés des élèves qui pourraient nous permettre de commencer à répondre à certaines de nos questions ? Nous pourrions alors soit considérer certaines d'entre elles comme résolues, soit mieux formuler ce qui est problématique en elles. Pour ce faire, nous avons deux types de sources : des études à relativement grande échelle, des études de cas.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Nous voulons proposer des tâches qui nous semblent *significatives* d'une forte imbrication entre les grandeurs et les nombres. Notre première série de questions renvoie, pour certaines questions au moins, à des tâches spécifiques que nous avons évoquées dans nos études des théories et des manuels anciens. Compte-tenu de leur origine, certaines d'entre elles sont susceptibles de ne pas être très familières aux élèves d'aujourd'hui. Nous souhaitons donc diversifier nos sources pour choisir nos tâches, en utiliser de moins « étranges ». De ce point de vue, les évaluations d'entrée en 6ème sont sans doute aux antipodes. En effet, elles représentent parfois pour les enseignants, à tort ou à raison, la norme attendue par l'institution à laquelle il convient donc de se conformer. Il n'est pas rare par exemple de trouver dans les manuels scolaires de CM2 ou de 6ème des exercices tirés directement des évaluations nationales quelques années après qu'ils y ont été proposés.

Pour étalonner la difficulté de nos exercices, nous utilisons nos ressources constituées par les études à grande échelle. Nous réalisons aussi un pré-test dans une seule classe, il pourra nous permettre de supprimer, ajouter, modifier des exercices.

Les évaluations d'entrée en 6ème constituent donc un double indicateur :

- c'est une base d'exercices, dont certains imbriquent probablement grandeurs et nombres (ou grandeurs et opérations), qui fournit une première idée de la réussite qu'on peut attendre des élèves,
- s'il ne s'agit pas de réutiliser un exercice précis, elles donnent des informations sur les performances des élèves dans certains domaines, performances qu'elles permettent de cerner de façon plus ou moins fine.

- Remarques sur les questions que nous retenons

Nous étudions les connaissances des élèves dans le domaine de l'apprentissage de la numération de position des entiers et du sens des opérations sur ces nombres. Nous recherchons des tâches qui nous semblent caractéristiques de l'intégration des grandeurs et des nombres. Nous utilisons des sources variées : certaines sont probablement étrangères aux pratiques actuelles quand d'autres sont plus ordinaires. Bien que pour partie tirées de l'enseignement ancien, les tâches que nous proposons ne doivent pas être caduques socialement, on les choisira surtout parce qu'elles semblent satisfaire des besoins qui existent dans le développement de certains apprentissages actuels, avec les objectifs de l'école d'aujourd'hui. Même si nous voulons proposer des tâches problématiques pour les élèves,

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

nous voulons qu'elles soient à la portée des élèves de fin de primaire, du point de vue de leur développement.

- Dispositif pour concevoir le questionnaire

Au regard de nos questions nous ne savons pas s'il serait pertinent de faire des comparaisons « absolues » de niveau entre enseignement actuel et enseignement ancien. C'est une question délicate, à laquelle nous n'avons pas essayé de répondre et qui pose des problèmes méthodologiques considérables. Aussi, notre projet peut-il sans doute se résumer dans la volonté de croiser les résultats des élèves en leur proposant des exercices ayant des structures proches mais dans des contextes différents.

Nous élaborons des groupes de tâches au sein desquels nous comparons les réussites des élèves. Au sein d'un groupe, les tâches doivent donc différer par la modification de la valeur d'une seule variable que nous espérons maîtriser au mieux en fonction de notre questionnement.

2. Eléments sur les connaissances des élèves actuels

Nous voulons proposer des exercices qui nous renseignent sur l'imbrication entre les grandeurs et les nombres pour les élèves. Nous donnons maintenant des éléments quant aux connaissances et difficultés des élèves relativement à cette imbrication.

Nous avons réuni un certain nombre de travaux existant à ce propos. En particulier nous avons consulté les résultats de l'évaluation nationale d'entrée en 6ème[51] pour les années 1993-1994 et 1997-2007. Apparemment, depuis 2004, la DEP (ou ses héritiers) ne propose plus d'étude détaillée annuelle. En revanche, les résultats bruts des années 2003 à 2007 sont consultables en ligne avec quelques éléments d'analyse.[52]

[51] Nous reproduisons les résultats des évaluations et les codages lorsque nous les avons. En outre, d'une année à l'autre, les consignes de codage peuvent varier. Nous indiquons nc (non codé) lorsqu'un code n'est pas utilisé certaines années.

Par ailleurs, chaque année, les cahiers de passation indiquent des durées pour chaque exercice. Elles peuvent être imposées lorsque c'est l'enseignant qui rythme la passation, elles sont cumulées pour former une « séquence » dont seul le temps total est imposé lorsque « les élèves travaillent à leur rythme ». Nous indiquons les durées et le type de rythme (imposé ou non) lorsque nous avons ces informations. Elles nous seront utiles pour la mise au point des durées pour notre questionnaire.

[52] http://evace26.education.gouv.fr/ au 16 février 2008

En 2006, l'Inspection Générale de l'Éducation Nationale a réalisé un rapport intitulé « L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire » (Durpaire, 2006). Nous y faisons référence. En outre, nous évoquons quelques travaux spécifiques à certains thèmes qui nous permettent de mieux situer certaines difficultés d'élèves.

2.1. A propos des problèmes de la « vie courante »

Le rapport Durpaire (2006) cherche notamment à réunir des éléments sur l'évolution du niveau des élèves. Il souligne la difficulté de cette entreprise et les précautions qu'il est nécessaire de prendre. Il donne néanmoins quelques éléments (p. 16 et suivantes). Il compare notamment une évaluation proposée en 1980 à l'entrée en 6ème aux évaluations mises en place chaque année à partir de 1989.

Il s'intéresse d'abord à la nature des exercices. Il souligne que la part des problèmes de la vie courante a largement baissé dans les évaluations entre 1980 et les années 2000. A propos de la répartition des différents types d'exercice, le rapport indique :

> « La différence majeure porte donc sur les problèmes puisqu'en 1980, 21 questions portaient sur les *problèmes élémentaires de la vie courante*, soit plus du quart, et 9 *sur l'aptitude au raisonnement*, soit au total 30 (36%), alors qu'en 2002, en regroupant les 6 *problèmes numériques* et les 16 questions classées *en traitement de l'information*, on n'obtient que 22 questions, soit 29%. Il y a donc une baisse significative de la présence de problèmes et même une perte très forte de la notion de problèmes de vie courante, ce qui ne peut que surprendre car les programmes successifs de 80, 85 et 95 ont mis cette notion au premier plan des objectifs. L'explication que nous avançons est une lecture des programmes valorisant essentiellement d'une part les problèmes qui contribuent à construire les notions nouvelles, d'autre part les problèmes dits de recherche. La catégorie des exercices d'entraînement ou d'apprentissage systématique serait délaissée. Les évaluations reflètent en tout cas cette relative disparition d'exercices simples et de vie courante. Une autre explication peut être cherchée du côté des techniques d'évaluation et d'analyse des résultats des élèves : les problèmes « de vie courante » conduisent les élèves à des activités complexes mettant en jeu de nombreuses compétences qui ne sont pas « directement mathématiques » (lecture, compréhension verbale, modélisation de la réalité, etc.) et qui sont difficilement dissociables les unes des autres. Ce ne sont pas de « bonnes » épreuves dans la perspective d'une évaluation analytique des lacunes des élèves. »

Il nous semble que, précisément, tout ou partie du travail sur les grandeurs à l'école primaire a parfois été assimilé à l'immixtion de « la vie courante » dans l'enseignement des mathématiques, tel par exemple dans le travail d'Harlé (1984). Du fait de l'effet normalisateur des évaluations nationales d'entrée en 6ème, il est possible que ce recul des problèmes de la vie courante dans les évaluations se retrouve dans les pratiques des enseignants.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

2.2. Numération et système métrique

À propos de l'enseignement ancien, nous avons vu que les questions sur le système métrique semblent appeler un traitement du même type que celui de la numération. Aussi, recherchons-nous l'imbrication des grandeurs et du numérique pour la numération du côté du traitement du système métrique.

A propos de la numération et du système métrique, nous présentons les quelques éléments que nous avons trouvés dans les évaluations nationales d'entrée en 6ème. Pour le système métrique, nous excluons les items sur les unités de durée. Nous complétons ces éléments par certains résultats de (Parouty, 2005), étude conduite dans le cadre d'un DESS, et par un exercice provenant des évaluations 6ème de 2002 et 2003.

- ### Système métrique

Nous avons relevé un exercice qui prend en compte les unités de longueur en tant que grandeur-objet. Nous l'indiquons. Il ne concerne pas les conversions. Les conversions simples dans le système métrique décimal semblent avoir disparu entre 1993 et 2002. Nous incluons dans cette présentation les exercices qui utilisent les décimaux (ceux sur les entiers étant trop rares).

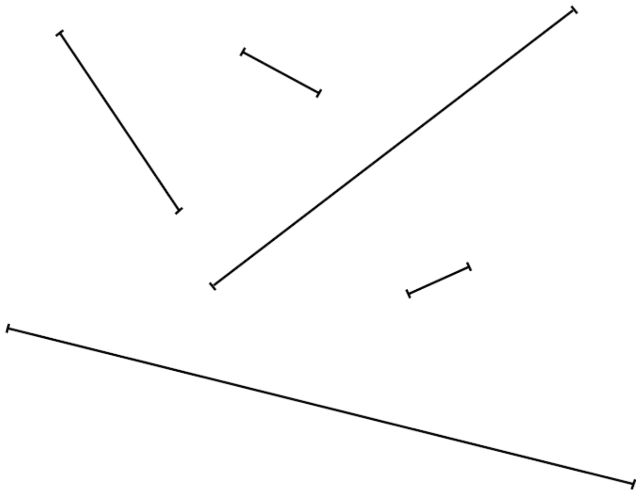
Ordre de grandeur des unités métriques

En 2002 et 2003, les évaluations ont proposé en 6ème un exercice impliquant mesurage et unités de longueur. Comme on peut le voir, l'exercice a été fortement modifié entre les deux années.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Exercice 17

Parmi les segments ci-dessous, entoure celui qui mesure 15 mm.



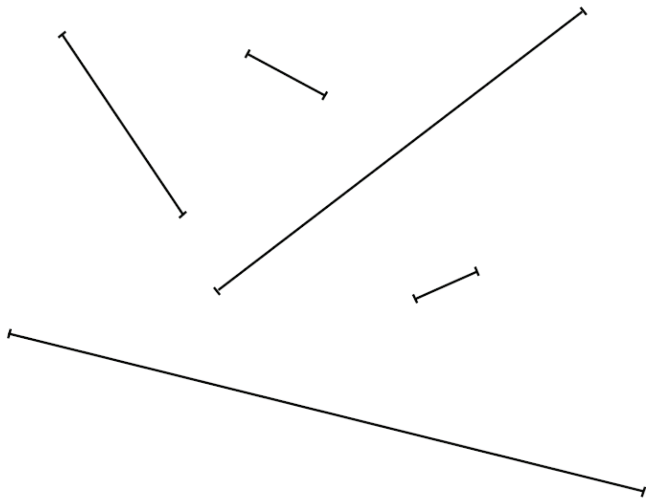
Exercice 6ème 17 2002	
réponse	2002
Le bon segment est entouré	74,2
Le segment de 15 cm de longueur est entouré (code 6)	22,3
Autre	2,8
Absence	0,7

Fac-similé échelle 0,5

Exercice 17

Mesure le segment le plus court.

Écris sa longueur : ……………………



Exercice 6ème 17 2003	
réponse	2003
15 mm ou 1,5 cm (au mm près)	44,9
15 ou 1,5	32,2
Autre	21,7
Absence	1,2

Fac-similé échelle 0,5

En 2002, le dossier propose le commentaire suivant :

> « Plus de 20% des élèves ne lisent pas la consigne dans sa globalité et ne font pas attention à l'unité demandée (code 6). » (dossier CE2-6-5, 2003, résultats 2002, p. 276).

En 2003, la nomenclature des réponses ne permet pas de repérer les élèves qui donnent 15 mm comme réponse ni ceux qui écrivent 15. Pour ces derniers, il nous semble peu probable que la réponse 15 provienne du mesurage du segment le « plus long » qui aurait été *remplacé* (dans la tête de certains élèves) par le « plus court », ceci est néanmoins possible en particulier si un élève se trouve démuni pour mesurer le segment le plus court. Ces deux réponses pourraient constituer un signe de reconnaissance du millimètre comme unité. En revanche, on voit que près du tiers des élèves donnent une réponse sans mentionner d'unité de longueur. On ne sait pas comment la réponse 1 cm 5 mm a été comptabilisée (si elle est apparue).

Ces exercices nous renseignent un peu sur la façon dont les élèves appréhendent la grandeur des unités de longueur (du système métrique). Ils ne nous disent rien du rapport à la numération.

Des conversions de système métrique, hors contexte

En 2002 et 2003, on a l'exercice suivant. La consigne est écrite : « Complète les égalités »

exercice 6ème 19 2002 2003, 1 min 30 s (rythme non imposé)

3 km = …………. m

réponse	2002	2003
3000	80,1	77,9
Autre	15,3	16,8
Absence	4,6	5,3

0,5 kg =………… g

réponse	2002	2003
500	44,4	40,5
0,500	16,0	17,8
Autre	30,5	30,7
Absence	9,1	11,0

Depuis 2005, on trouve un autre exercice, toujours le même. Il n'y a pas de consigne écrite. En revanche, le maître doit dire : « Complétez chacune des lignes.»

Exercice 6ème 5 2005 2006 2007, 2 min (rythme imposé)

5 kg = …………. g

réponse	2005	2006	2007
5000	61,41	60,38	62,0
autre	34,05	34,70	33,8
absence	4,54	4,92	4,2

630 mm = ………. cm

réponse	2005	2006	2007
63	60,01	58,77	58,0
6,30 ou 6,3	14,32	14,06	14,3
6300	5,42	5,06	5,2
autre	15,51	16,53	18,0
absence	4,74	5,58	4,5

400 m =………… km

réponse	2005	2006	2007
0,4	49,82	48,31	49,3
autre	42,88	43,70	43,2
absence	7,30	7,99	7,5

1,5 L = ………… cL

réponse	2005	2006	2007
150	36,64	36,27	33,0
0,15	1,86	2,56	2,3
autre	49,51	47,20	51,5
absence	11,99	13,97	13,1

Dans les différences entre les deux séries d'exercices, on peut noter le rôle différent joué par le nombre décimal : 0,5 kg en g et 400 m en km, les deux autres items : 5 kg en g et 3 km en m étant formellement beaucoup plus proches. Entre les deux séries d'exercices, les espèces de grandeurs (relativement au type de nombre) sont inversées.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Dans les réussites, on observe une assez grande stabilité de 2005 à 2007. En outre, même s'il y a une légère baisse entre 2002 et 2003, la différence de réussite est notable entre les item km et kg des deux séries. Il semblerait que les conversions en kilomètre / mètre soient mieux réussies que les conversions en kilogramme / gramme. Peut-être cela s'explique-t-il par la familiarité avec la grandeur plutôt que par les aléas de l'expérience : en effet on peut penser que les élèves sont plus familiers des mesures en kilomètres et mètres que de celles en kilogrammes et grammes.

Durpaire (2006) rapporte des résultats de l'évaluation de 1980 et les compare à ceux des années 2000. On peut lire (nous soulignons) :

> 6. Pour les mesures, plus d'un tiers des élèves des années 2000 ne savent pas convertir des kilogrammes en grammes ou des millimètres en centimètres [il s'agit très probablement des deux premiers items de l'exercice 5 des années 2005 à 2007]. L'appel à l'écriture décimale fait encore chuter les résultats puisque seulement un sur deux convertit des mètres en kilomètres. [il s'agit très probablement du troisième item de l'exercice 5 des années 2005 à 2007]
>
> Ces résultats n'étaient pas meilleurs il y a vingt ans puisque les deux exercices posés (encadré ci-dessous) conduisent à des scores de réussite respectivement de 65 % et 69 %.
>
> *Une corde mesure 1,4 mètre ; elle mesure…centimètres.*
>
> *Ce paquet pèse 4 570 grammes ; il pèse…kilogrammes.*

Contrairement à ce que semble indiquer le rapport, les deux exercices de 1980 mobilisent les nombres décimaux comme les deux derniers de 2005-2007. Ceux des années 2000 sont posés hors contexte ce qui n'est véritablement pas le cas de ceux de 1980. (Nous ne savons dans quel sens cela influe sur les résultats). De plus les difficultés liées aux chiffres pour la conversion de grammes en kilogrammes (1980) est sans doute moindre que celle des kg en g (années 2000). Dans le second cas, il ne suffit pas de déplacer la virgule, il faut écrire des zéros supplémentaires. D'un point de vue formel, si on rapporte les données en centimètres (de 1980) aux données en centilitres (de 2005 et suiv.), on a respectivement 65% et environ 35% de réussite ce qui constitue une baisse de 30%. Si on regarde maintenant la conversion de 1980 des grammes en kilogrammes et qu'on rapproche les chiffres des années 1980 et 2000 (ce ne sont pas tout à fait les mêmes nombres aux deux époques), on a : 69% en 1980 et 44,4% en 2002 (ou 49% pour mètres en kilomètres) ce qui fait une baisse de 25% à 20%.

Il est sûr qu'il faut prendre des précautions quant à la comparaison de tels chiffres néanmoins nous pointons cette différence car elle nous semble assez importante. En outre, il semblerait que le nom de l'unité n'est pas neutre, il pourrait avoir un rôle dans la réussite des élèves, les conversions, même formelles, pourraient ne pas être qu'un exercice formel.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

- Numération

Nous indiquons ci-après les quelques éléments quantitatifs que nous avons réunis sur les questions de conversion en numération.

Des problèmes de numération (Parouty, 2005)

Parouty (2005) a conduit une étude sur la numération au cycle 3. Elle montre notamment la grande difficulté des élèves à résoudre des problèmes de numération et s'intéresse aux représentations de leurs professeurs quant à la difficulté de ces problèmes. Elle rapporte les résultats suivants :

> Pour carreler une pièce, il faut 8564 carreaux. Les carreaux sont vendus par paquets de 100. Combien de paquets faut-il commander ?

Ce problème posé au CE2 obtient 10% de réussite.

> Pour carreler une pièce, il faut 28 464 carreaux. Les carreaux sont vendus par paquets de 200. Combien de paquets faut-il commander afin de pouvoir tout carreler ?

Ce problème posé au CM1 obtient 10% de réussite.

> Une barrique contient 66 864 millilitres de cidre. On veut remplir des bouteilles contenant chacune 2000 millilitres. Combien de bouteilles pourra-t-on remplir complètement si on vide la barrique ?

Ce problème posé au CM2 obtient 30% de réussite.

Nous ignorons comment Parouty définit la réussite, en particulier si elle inclut ou non les réponses à 1 unité près par défaut qui correspondent à une troncature au nombre de centaines ou milliers conjuguée à une division par 2 pour les 2ème et 3ème exercices. Quoi qu'il en soit la réussite apparaît faible.

Elle dit que les progrès en CM2 ne s'expliquent pas par une meilleure maîtrise de la numération mais parce que les élèves ont appris à poser les divisions avec plusieurs chiffres au diviseur et qu'ils utilisent cette connaissance. Peut-être que cela plaide paradoxalement pour une introduction plus précoce de la division. En effet, l'introduction de nouveaux signes, et en premier lieu du mot division, pourrait aider à faire le lien avec la numération (multiplication et division par 10, 100, 1000, etc.).

Elle interroge les enseignants qui considèrent que le problème est :

Très facile : 0%	Assez facile : 13%	Difficile : 85%	Inabordable : 5%[53]

[53] Dans la communication dont nous disposons le total est effectivement différent de 100.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

D’une certaine façon, les difficultés des élèves s’expliquent par celles des enseignants. Néanmoins, s’il est probable que les enseignants qui jugent inabordable ces problèmes ne les proposent pas à leurs élèves, la conviction des autres peut être forgée sur l’expérience des résultats de leurs élèves ou sur la conviction qu’ils ne pourraient pas les réussir. Il est difficile de trancher.

Les enseignants considèrent majoritairement que ce sont des problèmes de division, même s’ils déclarent ne pas utiliser de division pour les résoudre. Il est d’ailleurs fort possible qu’ils considèrent qu’il faille avoir étudié la division (en un sens qui resterait à préciser) pour s’attaquer à ce genre de problèmes.

Nous voulons préciser que, sauf peut-être en 1970, ces problèmes n’ont jamais disparu des programmes. En revanche, les exercices du même type, portant sur le système métrique, semblent fort rares dans les pratiques actuelles contrairement à ce qui apparaît dans les manuels scolaires anciens. Nous n’en avons trouvé que de façon tout à fait exceptionnelle dans les manuels actuels et aucun dans les évaluations d’entrée en $6^{\text{ème}}$.

Des conversions de numération, hors contexte

Nous n’avons pas cherché à relever les éléments des évaluations d’entrée en $6^{\text{ème}}$ sur la comparaison des nombres ou les dictées de nombres, ni les multiplications ou divisions par les puissances de dix. Nous avons voulu nous limiter aux exercices de conversion.

Nous avons relevé un exercice de conversion de numération, hors contexte. Sa formulation a évolué sensiblement entre les deux années où il a été proposé.

Exercice $6^{\text{ème}}$ 9 2002, 1 min 30 s, rythme imposé

Complète les égalités : 25 dizaines = …………unités

réponse	2002
250	54,2
5 (confusion entre chiffre des unités et nombre d’unités) (code 6)	14,7
Autre	26,1
Absence	5,0

7 unités 4 dixièmes = ……………. dixièmes

réponse	2002
74	43,0
4 (confusion entre chiffre des dixièmes et nombre de dixièmes) (code 6)	13,3
7,4 (non-prise en compte de l’unité demandée)	17,5
4,7 ou 47 (confusion entre dizaines et dixièmes)	5,9
Autre	15,0
Absence	5,3

En 2002, la publication de la DEP qui analyse les réponses des élèves donne le commentaire suivant :

> « La présentation de cet exercice sous forme d'égalité est inhabituelle pour les élèves de cycle 3. L'élève est plus habitué à répondre à une question du type : « Combien y a-t-il d'unités dans 25 dizaines ? ».
>
> Près de 15% des élèves n'appréhendent pas la question dans sa totalité et ne tiennent pas compte du signe « = » (code 6). » (p. 260)

La forme est-elle la raison principale de l'échec des élèves ?

En 2003, cet exercice est repris mais présenté sous une forme peut-être plus « habituelle », pour les auteurs des évaluations. La réussite pour 25 dizaines est encore plus faible. Pour le nombre décimal, elle est un peu meilleure mais l'exercice est devenu la dictée ordinaire d'un nombre décimal.

Exercice 6ème 9 2003

1 min 30 s, rythme imposé

Écris en chiffres : 25 dizaines	
réponse	2003
250	40,8
25 (non prise en compte de l'unité)	24,1
Autre	29,2
Absence	5,9

Écris en chiffres : 7 unités 4 dixièmes	
réponse	2003
7,4	54,8
74 (non prise en compte de l'unité)	4,7
Autre	35,3
Absence	5,2

Les données rapportées par Parouty sont-elles à rapprocher de ces résultats dans un contexte formel ?

Ce que nous retenons de cette première étude sur système métrique et numération est :

- la réussite très médiocre aux problèmes de conversion en contexte, la faiblesse relative quant au « nombre de »,
- la faiblesse relative des conversions ordinaires sur les entiers, avec toutefois une plus grande réussite avec les kilomètres que les kilogrammes,
- la sensibilité possible à la grandeur même pour des conversions données dans un contexte formel.

En outre, il est possible que la réussite aux exercices de conversion dans le système métrique se soient dégradée entre 1980 et 2002.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

2.3. Opérations et grandeurs : discret et continu

La rupture entre le discret et le continu apparaît comme un élément essentiel de la constitution du numérique en 1970. Que peut-on dire de la réussite des élèves dans le discret ? dans le continu ? A-t-on des éléments de comparaison de leurs performances dans les deux domaines ? On peut d'ores et déjà penser que le « continu » est une caractéristique trop vague quand on repère les variations sur les conversions ordinaires entre les kilogrammes et les kilomètres.

Dans un premier temps nous recensons les variables connues dans le domaine de l'étude des problèmes d'arithmétique. Ensuite, nous donnons les éléments que nous avons quant à la réussite des élèves.

- **Les variables connues dans l'étude du sens des opérations**

La résolution des problèmes d'arithmétique a fait l'objet de nombreuses recherches, notamment en psychologie cognitive. Néanmoins compte tenu de la cible très large de notre questionnaire notre étude bibliographique sur ce thème est restée assez limitée.

Les « word problems » sont très étudiés, ce sont ceux dont l'énoncé est constitué par des mots. Les problèmes simples sont les plus étudiés.

Nous voulons notamment proposer des « problèmes d'arithmétique » avec des opérations sur les objets. Ces problèmes ne sont pas simples car ils demandent de coordonner plusieurs actions.

La structure des problèmes constitue une variable connue. Plusieurs catégorisations ont été proposées. Parmi celles-ci, il y a les travaux de Vergnaud sur les structures relationnelles des problèmes des champs additif et multiplicatif.

La taille des nombres, le type de nombres et les relations numériques (additive ou multiplicative) qu'ils entretiennent constituent des variables connues. La place de la question, la congruence entre l'énoncé et la question constituent d'autres variables.

- **Influence du choix de la grandeur**

Nous n'avons pas connaissance de beaucoup de travaux qui étudient « de front » la question de l'influence de la grandeur sur la réussite des élèves. La psychologie cognitive s'intéresse beaucoup aux problèmes isomorphes. Il semble qu'on propose souvent aux élèves de résoudre

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

plusieurs problèmes de structures identiques et qu'on compare leur capacité à transférer les résultats de l'un à l'autre.

Néanmoins Julo a conduit plusieurs études qui prennent en considération cet aspect. Julo (1995) indique que la seule modification des grandeurs dans un énoncé modifie la façon dont les élèves investissent l'énoncé. Il obtient ainsi des résultats très différents pour un problème non classique qui évoque dans un cas un mélange de billes et dans l'autre un mélange de liquides. Dans le deuxième cas les élèves cherchent à étudier le problème du point de vue de la concentration (ce qui ne constitue pas un bon moyen pour le résoudre), alors qu'ils ne le font pas dans le premier. Julo précise qu'en général si les élèves échouent c'est plutôt parce qu'il n'investissent pas suffisamment de connaissances quand il résolvent un problème. La situation des « mélanges » est en fait exceptionnelle.

Julo (2002) rapporte que dans le champ de la proportionnalité, les problèmes mettant en jeu des prix ne sont pas traités de la même manière que les autres. Brissiaud (1984) identifie des « connaissances pragmatiques », il rapporte que les élèves de CM2 adaptent leur lecture d'un énoncé de problème de dépenses et de recettes qui comporte une ambiguïté à l'image qu'ils se font de ce type de problème (à savoir, en l'absence d'une question supplémentaire pour utiliser l'argent restant, on s'attend à une faible différence entre recettes et dépenses).

Cauzinille-Marmèche & Julo (1998) déterminent six ordres de passation pour trois problèmes ayant la même structure et indiquent qu'ils n'observent pas de différences significatives en regard du contexte sémantique (longueurs de cordes en cm, âges en années, nombres) ni d'influence de l'ordre (n=85). Les données ne sont pas jointes.

- Problèmes de division dans les évaluations nationales

Nous avons recensé tous les problèmes sur les quatre opérations à l'évaluation à l'entrée en 6ème. Dans l'ensemble, comme l'indiquait (Durpaire, 2006), ils sont assez peu fréquents. Par ailleurs nous avons voulu nous limiter aux opérations sur les entiers. On trouve des problèmes sur les durées de façon systématique, en revanche les autres problèmes additifs sont rares. On trouve chaque année des problèmes simples de division, ce sont à eux que nous allons principalement nous intéresser.

De 1998 à 2004, la division dans un contexte de partition n'est jamais évaluée pour le discret. Elle est évaluée avec les nombres décimaux (pour la capacité, exercice 6ème 26 2004) et pour des longueurs dans le problème des étiquettes (dont nous reparlerons). C'est à dire très rarement et jamais dans un contexte « simple et isolé » pour des entiers.

En revanche, la division dans un contexte de quotition est évaluée tous les ans avec des nombres du même ordre de grandeur pour le discret la plupart du temps sauf en 1998 et 2001 (liquide, avec des petits nombres, et longueur). Nous donnons la liste des exercices (si un « même » problème est proposé à plusieurs reprises avec des variations dans l'énoncé, nous indiquons les différences en gras). Nous proposons ensuite quelques commentaires.

Problèmes de quotition dans le discret

Les roses

Exercice 6ème 34 1999 3 min, rythme imposé	Exercice 6ème 35 2000 3 min, rythme imposé	Exercice 6ème 35 2004 3 min, rythme imposé
Avec 150 roses, **on** veut réaliser des bouquets tous composés de 7 roses. a) Combien de bouquets peut-**on** réaliser ? Réponse : .... b) **Combien de roses faudrait-il ajouter pour obtenir un bouquet de plus ?** Réponse :	Avec 150 roses, **un fleuriste** veut réaliser des bouquets tous composés de 7 roses. a) Combien de bouquets peut-**il** réaliser ? Réponse : .... b) **Quel est le plus petit nombre de roses que le fleuriste doit ajouter pour obtenir un bouquet de plus ?** Réponse :	Avec 150 roses, **un fleuriste** veut réaliser des bouquets tous composés de 7 roses. a) Combien de bouquets peut-**il** réaliser ? Réponse : .... b) **Combien lui manque-t-il de roses pour obtenir un bouquet de plus ?** Réponse : ....

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Question a : procédure

réponse	1999	2000	2004
Division euclidienne convenable	67,8	nc	nc
Division euclidienne bien écrite ou bien posée quel que soit le résultat	nc	72,8	nc
Division de 150 par 7	nc	nc	70,3
Toute autre procédure correcte	7,1	5,1	4,0
Autre	17,7	15,0	13,6
Absence	7,4	7,1	12,1

Question a : réponse

réponse	1999	2000	2004
21	68,1	66,3	66,6
22	1,3	nc	nc
Réponse fausse mais cohérente avec les calculs écrits par l'élève	nc	5,1	nc
21,4 (division poursuivie au delà de la virgule)	2,1	2,0	1,7
Autre	20,1	17,0	21,9
Absence	8,4	9,6	9,8

Question b : réponse

réponse	1999	2000	2004
4	51,6	32,3	49,5
3 (reste au lieu de son complément à 7)	8,0	29,8	13,7
Autre	26,7	20,6	21,4
Absence	13,7	17,3	15,4

Les photos

Exercice 6ème 1997	Exercice 6ème 32 2002 3 min, rythme imposé	Exercice 6ème 32 2003 3 min, rythme imposé
non disponible	Xavier range les 50 photos de ses dernières vacances dans un classeur. Chaque page contient 6 photos. a) Combien y **aura**-t-il de pages complètes ? b) Combien y a-t-il de photos sur la page incomplète ? Il y a ...... pages complètes. Il y a ..... photos sur la page incomplète.	Xavier range les 50 photos de ses dernières vacances dans un classeur. Chaque page contient 6 photos. a) Combien y **a**-t-il de pages complètes ? b) Combien y a-t-il de photos sur la page incomplète ? Il y a ……………. pages complètes. Il y a …………… photos sur la page incomplète.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Nombre de pages complètes

réponse	1997	2002	2003
8	56,9	58,0	53,6
8,3	nc	0,7	0,7
décimal non entier	1,8	nc	nc
9	2,4	nc	nc
50×6	9,9	4,8	4,6
Autre	23,5	28,9	31,9
Absence	5,5	7,6	9,2

Nombre de photos sur la page incomplète

<table>
<tr><td>réponse</td><td>1997</td><td>2002</td><td>2003</td></tr>
<tr><td>2</td><td rowspan="4">non disponible</td><td>61,2</td><td>57,2</td></tr>
<tr><td>4 (ce qui manque pour constituer une page supplémentaire)</td><td>3,4</td><td>3,4</td></tr>
<tr><td>Autre</td><td>23,0</td><td>26,0</td></tr>
<tr><td>Absence</td><td>12,4</td><td>13,4</td></tr>
</table>

La réponse « 9 » qui correspond au nombre de pages sur lesquelles il y a des photos n'est codée qu'en 1997 ; elle est peu présente cette année là.

Le carrelage

M. Bron veut carreler sa terrasse. Il dispose d'une boîte de 160 carreaux et il a besoin de 13 carreaux par rangée.

Combien de rangées complètes pourra-t-il poser ?

Écris les calculs que tu fais. (Exercice $6^{\text{ème}}$ 1993)

résultat

réponse	1993
12	62,1
réponse décimale, juste ou fausse	4,9
13	2,7
Autre	20,9
Absence	9,4

démarche

réponse	1993
160 : 13 sans tenir compte du résultat	75,7
Autre suite correcte de calculs	3,0
Autre	12,9
Absence	8,4

Problèmes de quotition dans le continu

Le jus d'orange et les nappes

a) Avec une bouteille de jus d'orange, on peut remplir 8 verres.

Combien faut-il ouvrir de bouteilles pour que chacun des 20 élèves de $6^{\text{ème}}$ A soit servi ?

b) Pour la fête de l'école on veut recouvrir chaque table avec une bande de papier d'une longueur de 4 m.

Combien de tables pourra-t-on recouvrir avec un rouleau d'une longueur de 50 m ?

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Exercice $6^{\text{ème}}$ 6 1996,

Exercice $6^{\text{ème}}$ 25 1998 (2 min)+5 min, rythme imposé

Exercice $6^{\text{ème}}$ 27 2001 (3 min)+5 min, rythme imposé

(les deux problèmes sont groupés)

Problème du jus d'orange

réponse	1996	1998	2001
3 (bouteilles)	60,3	54,9	59,1
2 bouteilles	4,5	4,7	3,9
2,5 ou 2 et ½ ou 2 bouteilles et demie	16,3	15,5	12,5
Autre	14,7	19,6	20,6
Absence	4,3	5,3	3,9

Problème des nappes

réponse	1996	1998	2001
12 (tables)	45	38,6	40,5
12 (tables) et demie ou 12,5 (tables)	9	8,4	1,9
13 (tables)	7	6,3	8,0
Démarche correcte mais erreur de calcul	3,1	2,3	6,9
Autre	25,5	28,5	30,8
Absence	10,5	15,9	11,9

Il nous semble qu'il est difficile de comparer les différents résultats entre les différents exercices, pour plusieurs raisons. Le codage est variable selon les exercices (voire selon les années pour un exercice). On code parfois le résultat seul, parfois la démarche et le résultat séparément, parfois le résultat seulement avec des indications de démarche. Dans les résultats, on repère parfois les erreurs de calcul. Parfois dans les réponses, on repère le quotient à une unité près, les quotients décimaux (compte tenu de la suppression de cet enseignement depuis quelques années, ces réponses susceptible de diminuer exceptée celles qui font référence aux « demi »).

Outre ces différences dans les codages institutionnels, on repère aussi des variations plus ou moins importantes sur la taille des nombres : problèmes dans la table de multiplication (jus d'orange et photos) ou hors de la table (les autres exercices), diviseur à deux chiffres (carrelage) ou à un chiffre (les autres exercices), quotient à deux chiffres (les roses, le carrelage, les nappes) ou à un chiffre (les autres exercices).

Si on ajoute toutes les réponses pour le problème du jus d'orange : 3 bouteilles, 2 bouteilles et demie, 3 bouteilles, on obtient plus de 71% ce qui rend honorable le score mais les nombres sont tout petits et aucun des problèmes sur le discret ne propose de tels nombres. Il nous semble légitime, en un sens, d'ajouter ces scores car ils constituent des réponses à d'autres questions (Combien utilise-t-on de bouteilles pour servir les 20 élèves ? 2 et demie peut être une réponse acceptable ; combien utilise-t-on de bouteilles entières pour servir les 20 élèves ? 2 est une bonne réponse) Il semble que le problème des nappes (longueur) est moins bien réussi (à dix ans d'intervalle) que celui des carrelages (discret) : 50% environ pour les nappes (en cumulant les trois réponses) contre près de 65% pour le carrelage. A des époques moins éloignées, les nappes (longueur) sont moins bien réussies que les photos (discret), mais le quotient est à deux chiffres dans un cas, c'est un résultat de la table dans l'autre.

En fait, il nous semble que ces données ne nous permettent pas de nous faire une idée de l'influence de la grandeur (ou des unités) sur la réussite des élèves dans les problèmes de division. Elles confirment cependant la grande sensibilité au contexte même pour des questions relativement élémentaires.

2.4. Lexique et grandeurs

▪ Généralités

Chaque grandeur possède son lexique spécifique. Ceci est particulièrement évident pour les situations de comparaison (qui est le plus léger, le plus cher, le plus riche, le plus grand, le plus vieux, etc.) mais reste vrai pour d'autres situations. Ci-après une liste non exhaustive :

monnaie	riche, pauvre, cher, coûteux, gain, dépense, économie, bénéfice, perte, frais, prix…
longueur	court, long, grand, petit, distance, bout à bout, devant, derrière, jusqu'à, direction, distance, aller, revenir…
durée	court, long, vieux, jeune, longtemps, rapide, lent, pendant, tôt, tard, avant, après jusqu'à …
masse	lourd, léger, tare…
capacité	gros, remplir, déborder, récipient, plein, vide…

On peut remarquer que les lexiques relatifs à la longueur et la durée sont connectés, long et court sont communs aux deux sujets mais ce n'est pas le seul point de jonction, la vitesse y participe. *A priori*, on peut penser que rapide ne relève pas de la durée, pourtant : *Ali et Paul ont couru un 100 m, Ali a mis 23 s, Paul en a mis 19. Qui est le plus rapide ?* Il faut interpréter *rapide* en termes de durée pour traiter cette question.

Prendre le parti d'utiliser le lexique spécifique d'une grandeur quand on propose une tâche aux élèves n'est probablement pas anodin. Nous l'avons d'ailleurs évoqué dans notre premier chapitre à travers les exemples tirés des manuels actuels.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Une autre particularité des grandeurs peut être repérée à travers les instruments qui les mesurent. Par exemple, « le chronomètre indique 3 h 20 min » n'a pas tout à fait la même signification que « l'horloge indique 3 h 20 min ». Une question importante est alors de savoir si on donne aux élèves l'occasion de travailler les concepts spécifiques à chaque grandeur.

- Un exemple sur les pratiques économiques

> Un employé a reçu une avance de 750 F sur le salaire qu'il doit recevoir en fin de mois.
> Son salaire est de 8275 F.
>
> Combien recevra-t-il à la fin du mois ?

Résultat

réponse	1980	1993
7525 F	37,9	39,5
7525	10,4	4,2
9025 (somme de 750 et 8275)	nc	27,0
Autre (code 9)	33,3	14,3
Absence	18,4	15,0

Démarche

réponse	1980	1993
soustraction	52,8	49,8
Autre	26,5	37,3
Absence	20,7	12,9

Commentaires et analyse des réponses [pour l'exercice 6 23 1993]

> La présentation de [cet] exercice est identique à celle de 1980. […]
>
> Pour l'item [résultat], un code 3 a été créé : il affine le code 9 en pointant l'erreur qui consiste à effectuer une addition. Ce code met effectivement en évidence un pourcentage d'erreurs important qui est peut-être dû plus à une mauvaise compréhension du vocabulaire utilisé dans l'énoncé qu'à une confusion dans le sens des opérations. (dossier CE2-6, 1993, résultats 1993, pp. 180-181)

Cet exercice nous semble intéressant. Il s'agit de calculer un complément. Le dossier CE2-6 considère que les difficultés sont liées au vocabulaire. On peut aussi estimer que si les élèves étaient davantage initiés aux pratiques économiques, ils sauraient ce qu'est une *avance sur salaire* et cet exercice serait sans doute mieux réussi.

- Nécessité ou non de connaissances spatiales dans certains problèmes de longueur

On peut penser que l'utilisation d'éléments du lexique de la longueur va avoir une incidence sur la difficulté éventuelle à résoudre certains problèmes. Plus généralement, certaines situations ou des éléments graphiques spécifiques de certaines grandeurs sont probablement susceptibles de constituer des variables didactiques. Par exemple, les trois problèmes suivants mettent en jeu la même structure relationnelle mais il n'est pas sûr qu'ils soient de difficultés équivalentes :

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

1) Le tour du Vendômois se court sur la distance de 176 km. Paul abandonne à 26 km de l'arrivée. Quelle distance a-t-il parcourue ?
2) Dans le tour du Vendômois, il y a 176 km à parcourir. Paul doit encore parcourir 26 km pour terminer. Combien de km a-t-il déjà parcouru ?
3) 176 élèves ont participé au cross de l'école. 26 élèves n'ont pas terminé le cross. Combien l'ont-ils terminé ?

Jusqu'où un problème d'arithmétique sur la longueur mobilise-t-il des connaissances spatiales et lesquelles ? Par exemple, dans le deuxième problème on peut remplacer le verbe *parcourir* par *manger* et l'unité *km* par *bonbon*. Par une simple substitution, le problème (2) devient : « Dans le tour du Vendômois, il y a 176 bonbons à manger. Paul doit encore manger 26 bonbons pour terminer. Combien de bonbons a-t-il déjà mangés ? » Ainsi formulé, ce problème devient peut-être plus proche du troisième. Cette substitution n'est pas possible dans le premier problème qui utilise un lexique propre à la longueur, plus varié : se court sur, de l'arrivée, distance. Les travaux de Julo nous indiquent néanmoins que la substitution que nous proposons n'est pas forcément « naturelle » même si elle est possible.

Cette question de la substitution n'est en fait pas spécifique à la longueur, elle se pose pour chaque grandeur dès lors qu'elle engage des pratiques spécifiques.

2.5. Deux grandeurs plus ou moins liées : longueur et durée

Nous avons indiqué un travail important sur les problèmes de déplacement et les schémas cotés dans l'enseignement ancien. A-t-on une idée des connaissances et des difficultés des élèves dans ce domaine ? Nous avons rassemblé plusieurs travaux sur les déplacements et les schémas cotés qui représentent des longueurs. Nous incluons ce qui concerne la relation entre instant et durée car elle correspond à la relation entre position et écart de longueur qu'on peut relier à la relation entre position et déplacement, le déplacement étant un écart orienté.

- Des questions sur la représentation « mentale » d'un espace linéaire

La « mathématisation » de la valeur absolue en seconde (Amra, 1994)

Amra (1994) étudie une suite de leçons sur la valeur absolue en seconde. La valeur absolue a été introduite en relation avec la distance entre deux points de la droite graduée. On définit d'abord la distance entre deux nombres x et y comme étant la distance entre les points M et N d'abscisses x et y. On dit qu'elle se calcule par la différence entre le plus grand et le plus petit

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

de ces deux nombres. MN=d(M,N)=d(x,y) d(x,y) =x-y si x>y ou d(x,y) =y-x si y>x. La valeur absolue d'un nombre x est la distance de ce nombre à 0. On la note |x|.

On considère l'exercice suivant qui vient après le cours sur la valeur absolue :

> Monsieur Dupont travaille dans la compagnie WW dont le siège est à Paris. Il est chargé des relations avec les succursales situées en Seine-Maritime (Rouen, Yvetot, Le Havre).
>
> Sa semaine est organisée ainsi :
> - le lundi et le samedi, il se rend au siège de la compagnie WW ;
> - le mardi et le jeudi, il va à Rouen ;
> - le mercredi il va au Havre et le vendredi à Yvetot.
>
> Chaque soir Monsieur Dupont rejoint sa famille.
>
> Le Havre, Yvetot, Rouen et Paris sont situés, dans cet ordre, sur une même route (ordre Ouest - Est).
>
> On supposera que « la route est droite ».
>
> Paris - Rouen : 110 km, Le Havre - Yvetot : 50 km ; Le Havre - Rouen : 85 km.
>
> Quelle distance Monsieur Dupont parcourra-t-il chaque semaine
> - s'il habite à Paris ?
> - s'il habite à Barentin (Barentin est situé sur la route précédente à 7 km à l'ouest de Rouen) ?
>
> (…)

Amra observe le travail de trois groupes de quatre élèves de seconde (de classes différentes). C'est le début du travail qui nous intéresse.

Dans les trois groupes, elle observe que les élèves se lancent rapidement dans la représentation d'une droite graduée en plaçant de suite les « points O et I » et qu'ils graduent la droite avec application (ce passage pose déjà problème car ils placent les « points O et I » et sont gênés par les ordres de grandeur des nombres de l'énoncé).

Ensuite ils peinent. Elle dit qu'ils ont des « difficultés à représenter les villes ». A propos du premier groupe elle rapporte les éléments suivants. Un élève qui « développe une attitude de rejet par rapport aux mathématiques (…) tente d'imposer son avis. Il remarque que les villes doivent être placées selon un certain ordre. Il exige que Le Havre soit le point « O », et à partir du Havre, place Yvetot et Rouen. (…) Il a quelques difficultés à placer Paris ». Elle indique qu'il faut 20 minutes au groupe pour proposer une représentation correcte. Dans le deuxième groupe, c'est le professeur qui dit « Pourquoi tout de suite un dessin à l'échelle ? » A propos du troisième elle écrit « Comme avec les autres groupes il y a toujours un laps de temps non négligeable qui s'écoule entre la graduation de la droite et la représentation adéquate des villes. ».

Les conclusions d'Amra qui nous semblent importantes pour notre travail sont les suivantes :

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

- elle indique que les trois groupes sont plus préoccupés par produire un dessin à l'échelle qu'à respecter l'ordre des villes,
- elle considère qu'« ils ont perdu leur temps sur des questions de détail (comme la graduation de l'axe) » et estime que « la graduation de la droite semble avoir eu tellement d'impact, qu'ils n'ont même pas remarqué, qu'il était plus important de représenter les villes selon un certain ordre »,
- elle observe aussi des questions dans le choix de l'origine : est-on obligé de prendre Paris ? ou bien une autre ville est-elle possible ?
- le placement de Paris est visiblement problématique pour certains élèves (il n'y a pas d'origine commune pour les trois distances de l'énoncé et quand on traite les données dans l'ordre, la troisième, celle qui permet de placer Paris n'a pas la même origine que les deux précédentes),
- en revanche, elle indique qu'une fois la représentation produite, « [les] questions ne posent ensuite aucune difficulté » (dans les trois groupes).

Signalons que les difficultés de placement sont peut-être accentuées par le fait que les élèves commencent par choisir une origine. On peut attribuer cette attitude au fait qu'il s'agit de la première partie d'un exercice qui se trouve dans la leçon sur la valeur absolue qui a été introduite à partir de la droite graduée (la suite de l'exercice va d'ailleurs nécessiter une algébrisation).

A propos de la plongée d'un sous-marin (Marchand, 2001)

Dans son mémoire professionnel de Professeur des Écoles 2$^{\text{ème}}$ année, Marchand (2001) a proposé à une classe de CM2 l'exercice suivant. Les élèves ont 15 minutes pour le résoudre :

> Un sous-marin effectue à partir de la surface de la mer les manœuvres suivantes :
> - plongée verticale de 1240 m - arrêt ;
> - poursuite de la plongée : nouvelle descente de 950 m à partir du niveau atteint précédemment ;
> - remontée jusqu'à 250 m de la surface ;
> - plongée à 2650 m au-dessous du niveau de la mer ;
> - retour à la surface.
>
> Quelle est la profondeur atteinte à chaque niveau ?
>
> Quelle est la plus grande profondeur atteinte ?
>
> Quelle est la distance parcourue par le sous-marin entre chaque palier ?
>
> Quelle est la distance totale parcourue verticalement pendant les manœuvres ?

Dans son analyse a priori, elle indique :

> « il y a de nombreuses données à gérer. Il est probable que les élèves ne vont pas prendre en compte toutes les informations. De plus les élèves seront sans doute troublés car pour certaines étapes il est nécessaire d'effectuer une opération, mais pour d'autres non, la réponse étant donnée dans l'énoncé ». (Marchand, 2001, p. 10)

Les profondeurs des paliers sont : 1240 m, 2190 m, 250 m, 2650 m, 0 m. La classe a été partagée en 9 groupes de 3 élèves. Elle rapporte les difficultés suivantes des élèves. Un groupe n'a pas produit d'écrit mais l'enregistrement audio « prouve qu'ils ont tout compris », c'est le seul qui a réussi. Un groupe « trie les données » en vain. Un des groupes est en « réussite » au « début de la question 1 » mais on n'en sait pas plus. Pour les six groupes restant, elle indique « confusion entre profondeur et distance » et/ou « erreur de repérage ». Un groupe répond correctement aux deux premières questions et donne, pour la troisième, les mêmes réponses que pour la première. Trois groupes produisent les mêmes réponses à la première question : 1240, 2190, 1940 et 4590. Elles correspondent aux calculs : 1240 ; 2190=1240+950 ; 1940=2190-250 ; 4590=1940+2650. Selon nous, en prenant les nombres dans l'ordre où ils se présentent et en considérant une descente comme une variation positive et une montée comme une variation négative, ces calculs pourraient être ceux d'une position atteinte après un déplacement : position atteinte = position précédente + variation (algébrique)

A propos du calcul 1940 + 2650 pour le 4ème palier, Marchand écrit : « ils ont donc bien pris en compte l'information « plongée à 2650 m » mais n'ont, en revanche, pas pris en compte l'information « au-dessous du niveau de la mer ». Plus radicalement, nous pensons qu'ils ne discriminent pas véritablement profondeur et distance parcourue. On voit d'ailleurs que la subtilité des prépositions dans la langue n'aide sans doute pas à discriminer : « à » indique selon les contextes ou les usages une position ou un déplacement. L'habitude veut sans doute que dans un usage correct « plongée à 2650 m » signifie « à une profondeur de 2650 m », on dirait plongée de 2650 m pour un déplacement, toutefois c'est assez subtil. Je vais à 100 m signifie que je me déplace de 100 m et je vais à Paris indique la position que je souhaite atteindre. D'ailleurs, un autre groupe donne correctement les trois premiers paliers mais donne 250 + 2650 pour le 4ème palier. La réussite aux trois premières réponses laisse penser qu'il est possible qu'il interprète « plongée à 2650 m » comme « plongée de 2650 m »

Dans le mémoire, Marchand n'envisage pas de travail spécifique sur ces questions, elle veut travailler sur la « schématisation ». Le problème du sous-marin apparaît dans la première séance d'une série de quatre, ce sera le seul qui fait travailler ces questions de positions absolue et relative. Ceci serait à étudier mais cette différence entre position et déplacement n'est pas sans rappeler celle que nous avons déjà signalée avec le chronomètre qui indique des

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

durées et l'horloge des heures (qui ne sont que des durées dont l'origine n'est en général pas précisée)

Ce travail semble montrer que la question de la discrimination entre déplacement et position ou position relative et position absolue ne relève pas de l'évidence pour des élèves de CM2. Le travail d'Amra semble montrer que c'est aussi le cas des élèves de seconde. Ce n'est pas sans rappeler la présence régulière des problèmes de calculs de distance sur une route ou une ligne de train que nous avons évoqués au CE dans l'enseignement ancien.

Par ailleurs, peut-être est-ce lié au travail sur la droite graduée mais aussi aux représentations habituelles de l'espace sur des cartes notamment, les élèves qu'observe Amra semblent très préoccupés par le fait de produire une représentation de l'espace à l'échelle, ce qui est inutile pour ce genre de problèmes.

- Distinction entre instant et durée

Nous avons indiqué que les problèmes additifs simples n'étaient que peu présents dans les évaluations à l'entrée en 6ème, en revanche les questions de durée sont systématiquement évaluées. Elle mettent souvent en jeu les calculs sexagésimaux mais pas toujours. Ce n'est toutefois pas cette question qui nous préoccupe, ce sont les questions de repérage dans le temps qui incluent la distinction entre instant et durée. A titre de comparaison, nous donnons les quelques résultats dont nous disposons pour les problèmes relevant du champ additif ne concernant pas la relation entre instant et durée.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Le train le plus rapide

Exercice 22

Voici les horaires de trains qui partent tous de Paris et vont en direction de Nantes, en traversant les villes de Chartres, Le Mans et Angers.
Lis attentivement le tableau et réponds aux questions posées.

	Numéro du train			
	207	209	346	1402
PARIS	6 h 30 min	7 h 30 min	9 h 30 min	11 h 30 min
CHARTRES	7 h	|	10 h 15 min	12 h
LE MANS	8 h	|	11 h	
ANGERS	9 h 15 min	9 h 45 min	12 h 15 min	|
NANTES	10 h 30 min	11 h		14 h 30 min

a) En partant de Paris, Clémentine doit arriver au Mans avant 10 heures.
Indique le numéro du train qu'elle doit prendre.

Train n° : …………………

b) Luc se rend de Chartres à Nantes. Il veut prendre le train le plus rapide.
Indique le numéro du train qu'il doit prendre.

Train n° : …………………

c) Capucine se rend à Angers en partant de Paris. Elle a un rendez-vous important à 11 heures.
Indique le numéro des trains qu'elle peut prendre.

Train n° : ………………… ou n° : …………

d) Victor est arrivé à destination à 9 h 45 min.
De quelle ville est-il parti ?
Dans quelle ville est-il arrivé ?

Ville de départ : ………………………..

Ville d'arrivée : ………………………..

Exercice 4

Voici les horaires de trains qui partent tous de Paris et vont en direction de Nantes, en traversant les villes de Chartres, Le Mans et Angers.
Lis attentivement le tableau et réponds aux questions posées.

	Train n°207	Train n°209	Train n°346	Train n°1402
PARIS	6 h 30 min	7 h 30 min	9 h 30 min	11 h 30 min
CHARTRES	7 h	|	10 h 15 min	12 h
LE MANS	8 h	|	11 h	|
ANGERS	9 h 15 min	9 h 45 min	12 h 15 min	
NANTES	10 h 30 min	11 h		14 h 30 min

a) En partant de Paris, Clémentine doit arriver au Mans avant 10 heures.
Indique le numéro du train qu'elle doit prendre.

Train n° : …………………

b) Luc se rend de Chartres à Nantes. Il veut prendre le train le plus rapide.
Indique le numéro du train qu'il doit prendre.

Train n° : …………………

c) Capucine se rend à Angers en partant de Paris.
Elle a un rendez-vous important à 11 heures.
Indique le numéro des trains qu'elle peut prendre.

Train n° : ………………… ou n° : …………………

d) Victor est arrivé à destination à 9 h 45 min.
De quelle ville est-il parti ? Dans quelle ville est-il arrivé ?

Ville de départ : ………………………..

Ville d'arrivée : ………………………..

exercice 6ème 22 2001, rythme non imposé, exercice situé en milieu de série, temps estimé à 6 min
exercice 6ème 4 2004 ; 6 min, rythme imposé

Question a

réponse	2001	2004
207	74,8	74,9
Autre	20,2	22,8
Absence	5,0	2,3

Question b

réponse	2001	2004
1402	34,8	31,3
207	nc	47,1
Autre	61,9	18,1
Absence	3,3	3,5

Question c

réponse	2001	2004
207 et 209	78,0	75,2
207 ou 209 et rien	2,3	2,7
Autre	16,7	18,3
Absence	3,0	3,8

Question d

réponse	2001	2004
Paris-Angers	78,9	71,2
Autre	16,9	22,7
Absence	4,2	6,1

Nous ne savons pas expliquer la légère baisse de réussite entre 2001 et 2004 aux questions b, c et d. La gestion du temps est différente entre les deux passations : gestion libre en milieu de série (durée évaluée à 6 min en 2001), 6 min avec départ et fin imposés en 2004, mais cela ne nous semble pas être une raison suffisante car les taux de non réponse sont peu différents.

Commentaires et analyse des réponses [pour l'exercice 6ème 2 2001]

> Cet exercice permet de vérifier la capacité de l'élève à lire un tableau à double entrée. Afin de répondre, l'élève doit mettre en relation des éléments explicites, puis explorer les différentes cases du tableau pour en extraire les informations demandées. Les difficultés peuvent être liées à la compréhension du contenu du tableau ou à une mauvaise organisation spatiale.
>
> Le peu de réussite à l'item 43 [question b] peut provenir de la difficulté de compréhension de l'expression : « le train le plus rapide », cette expression pouvant être comprise comme « le train qui arrive le plus tôt ». De plus, la réponse à cet item est la seule nécessitant des calculs sur les durées.
>
> D'autres questions, prenant appui sur le tableau et conduisant à une lecture plus directe, peuvent aider les élèves à en comprendre la structure. Par exemple :
> - Quel train part de Paris à 9 h 30 min ?
> - Quels trains s'arrêtent au Mans ?
>
> Des fiches horaires authentiques peuvent être un bon support pour travailler la lecture de tableau et le calcul sur les durées. (dossierCE2-6, 2002, résultats 2001, p. 249

Du point de vue de notre objet d'étude, nous retenons de cet exercice la difficulté possible à discriminer instant et durée. Ces deux notions peuvent se traduire dans la langue par « tôt » ou « rapide », l'une n'implique pas de calcul à partir des données alors que l'autre en implique.

L'âge d'Hergé

À deux reprises, en 1991 et 1998, cet exercice a été proposé conjointement sous deux formes un peu différentes dans les évaluations de mathématiques et de français. La partie mathématique a aussi été proposée en 1995.

En mathématiques

> Georges RÉMI, dit HERGÉ, est un dessinateur belge. Il est né en 1907 et il est mort en 1983. En 1929, il publie les premières aventure de Tintin.
>
> A quel âge a-t-il publié les premières aventures de Tintin ?

Exercice 6ème 1991, 35 1995, 33 1998		
réponse	1995[54]	1998
22 (ans) ou 21 (ans)	66,6	57,8
Opération 1929-1907 explicitement présente, mais résultat absent ou faux	1,3	1,1
54 (ans) ou 53 (ans) ou 76 (ans) ou 1983-1929 ou 1983-1907 (code 5)	9,3	9,1
Autre	7,6	22,3
Absence	5,3	9,7

> **Commentaires et analyse des réponses** [exercice 6 33 1998]
>
> Il s'agissait de reconnaître une situation soustractive dans un problème où il est nécessaire de sélectionner les données pertinentes.

[54] Le total ne fait pas 100. Nous ne savons pas où est l'erreur.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Étant donné qu'il s'agit d'une durée et que ni le mois de la naissance d'Hergé ni celui de la publication des premières aventures de Tintin ne sont précisés, les deux réponses « 21 ans » et « 22 ans » sont admises.

De plus, on ne code pas l'absence d'unité qui ne présente pas d'ambiguïté.

Le code 5 correspond à un mauvais choix des années.

Un travail en collaboration avec le professeur d'histoire pourra être effectué avec profit pour donner du sens aux notions de durée et de succession.

En français

Lis ce texte pour répondre aux questions.

> **1.** Tintin, le reporter-aventurier le plus connu du monde entier, a perdu "son père" le 3 mars 1983. Hergé s'appelait en réalité Georges RÉMI ; il a imaginé ce nom de Hergé à partir des initiales inversées de son vrai nom. C'est en 1929 qu'il crée Tintin, alors qu'il dirige la publication d'un journal pour les jeunes, *Le Petit Vingtième*.
>
> **2.** Avec les années, Tintin devient tellement populaire que les albums qui présentent ses aventures sont traduits en trente-trois langues. Ils se sont vendus à plus de 100 millions d'exemplaires à travers le monde.
>
> **3.** C'est dans *Tintin au Tibet* que Hergé illustre le mieux son génie. C'est d'ailleurs, de toutes ses œuvres, celle qu'il préférait.
>
> **4.** Le créateur est décédé à l'âge de 76 ans, mais sa créature vivra encore longtemps dans la tête et le cœur de millions de jeunes lecteurs et de jeunes lectrices.

1. Entoure la bonne réponse.

Georges Rémi est né en :

1867 1907 1929 1983

Comment as-tu fait pour trouver cette réponse ?

....

(…)

3. Indique à la fin de chaque énoncé s'il est vrai ou faux, en écrivant V ou F dans la case.

Hergé a composé son premier album avant de diriger un journal. ☐

(…)

Tintin est « né » en 1929. ☐

Exercice 6ème 1991

Exercice 6ème 11 1998 – français (réponses partielles)

Question 1, résultat	
réponse	1998
1907	53,6
Erreur sur le résultat, mais raisonnement correct	2,4
Autre	38,3
Absence	5,7

Question 1, démarche	
réponse	1998
Soustraction utilisant les bonnes données quel qu'en soit le résultat	42,6
Mauvaise donnée : 1929	4,9
Autre	37,9
Absence	14,6

Avant	
réponse	1998
Faux	81,2
Autre	16,3
Absence	2,5

Est né	
réponse	1998
Vrai	87,5
Autre	10,4
Absence	2,1

Comparaison avec d’autres problèmes du champ additif

Nous indiquons maintenant les quelques données dont nous disposons hors du champ des relations entre instant et durée (et des pratiques économiques) :

Exercice $6^{\text{ème}}$ 1 1993	Exercice $6^{\text{ème}}$ 19 1998 ; 20 2001, 2 min (rythme non imposé)	Exercice $6^{\text{ème}}$ 31 2004
Frédéric a 40 francs. Il lui manque 4 francs pour acheter une bande dessinée. Quel est le prix de la bande dessinée ?	Marie fête son anniversaire le 22 Septembre : elle a 11 ans. Elle dit à sa maman : « J’ai exactement 32 ans de moins que toi ! » Quel est l’âge de la maman de Marie ?	Le 14 novembre 2003, les 92 élèves de 4 classes d’un collège ont participé à une course d’endurance. Le départ a été donné à 14 h 15. Le premier de la course a mis 32 minutes pour parcourir le circuit. Le dernier concurrent est arrivé à 15 h 10. Il y a 13 élèves qui n’ont pas terminé la course. a) Combien d’élèves ont terminé la course ?

réponse	1993
44 F	89,2
44	4,0
36 F qui correspond à l’interprétation directe du mot inducteur « manque » (code 6)	4,4
Autre	1,7
Absence	0,7

réponse	1998	2001
43 (ans)	70,5	75,3
L’élève a fait une soustraction qui conduit à 21 ans (code 6)	13,2	9,9
Utilisation d’une donnée parasite (22 septembre) (code 7)	1,3	2,1
Autre	8,4	9
Absence	6,6	3,7

réponse	2004
79 élèves	66,1
Trace de l’opération 92-13 avec un résultat erroné (code 6)	3,6
Trace de l’opération 92×4 (code 7)	0,6
Autre	26,1
Absence	3,6

Erreurs de calcul comprises, pour toutes les années pour lesquelles nous avons des données, il semblerait que les différentes structures soient réussies au moins à 70%. On peut d’ailleurs noter que le troisième problème, le moins bien réussi, a un énoncé qui comporte beaucoup d’informations qui ne sont pas utilisées pour la question a). Le travail de l’élève est donc plus complexe pour ce problème que pour les deux premiers. Les deux questions sur la relation entre instant et durée sont réussies à moins de 60%. Les nombres ne sont pas de la même taille. La différence dans les scores est-elle significative d’une difficulté spécifique des élèves avec la relation entre instant et durée ?

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

- Articuler longueur et temps

Nous avons déjà évoqué les problèmes de déplacement. Nous en avons relevé deux dans les évaluations nationales à l'entrée en 6ème dont l'un fait également intervenir des durées.

L'arrêt à la station essence

Exercice 28

Au départ de Neuville à 7 h 30 min, M. Martin constate que le compteur kilométrique de sa voiture indique 34 528 km.

Il s'arrête 10 minutes dans une station essence. Il la quitte à 7 h 48 min et arrive à Bourgneuf 30 minutes plus tard.
Le compteur indique alors 34 558 km.

a) Complète la question qui correspond au calcul : *7 h 48 min - 10 min = 7 h 38 min*

Question : A quelle heure……………………………………………………

……………………………………………………………………………

b) Formule la question dont la réponse est 30 km.

Question : ……………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

Dans l'énoncé de 2000, le verbe « formule » est remplacé par « écris ».

exercice 6ème 28 1999 ; 6ème 29 2000

3 min, rythme imposé

Question a

réponse	1999	2000
L'élève évoque l'heure d'arrivée à la station service (point d'interrogation écrit ou non)	34,4	34,7
Réponse faisant allusion à l'heure d'arrivée à Bourgneuf (code 6 - 1999)	16,1	nc
Réponse faisant allusion à une heure d'arrivée (à Bourgneuf ou sans précision de lieu) (code 6 - 2000)	nc	23,6
Autre	34,0	26,4
Absence	15,5	15,3

Question b

réponse	1999	2000
L'élève formule une question dans laquelle est demandée la distance entre les deux villes	40,6	36,3
L'élève évoque la distance entre les deux villes mais sans formuler de question (par exemple : « Il a parcouru 30 km entre les deux villes »)	2,3	2,4
L'élève formule une question dans laquelle est demandée la distance entre la station-service et une des deux villes	non codé	3,9
Autre	24,0	28,4
Absence	33,1	29,0

« Commentaires et analyse des réponses [pour exercice 6 29 2000]

Cet exercice nécessite un repérage et un tri des informations numériques permettant d'élaborer des questions. De plus, des grandeurs de nature différente interviennent (distance et durée).

> Le fort pourcentage de codes 6 à [la question a] pointe sans doute des questions cohérentes au vu des données initiales de temps et de durée mais ne prenant pas nécessairement en compte le lieu d'arrivée.
>
> La gestion simultanée du temps et de l'espace ne semble pas acquise et pose problème aux élèves.
>
> Les résultats relativement médiocres à cet exercice comme à l'item 41 de l'exercice 13 [qui consistait à compléter un énoncé à partir d'une ébauche de l'énoncé et de lignes de calcul] dénotent la difficulté pour les élèves à formuler des questions à partir de données. » (dossier CE2-6, 2001, résultats 2000, p. 283)

Distance entre les pancartes

Pour cet exercice, nous ne disposons pas d'image de l'énoncé original ni de la formulation des codages de réponses. Il y a deux couples de panneaux indicateurs qui indiquent des directions opposées : Tours 15 km - Blois 38 km, puis : Tours 12 km – Blois 41 km. On demande la ville dont on se rapproche et la distance qui sépare les deux panneaux.

Exercice 6ème 13 1997

Ville dont on se rapproche	
réponse	%
Tours	89
Autre	4,1
Absence	6,9

Distance entre les panneaux	
réponse	%
3 km	52,2
53 km	2,5
79 ou 27	0,8
distance sur un des panneaux	1,0
somme des 4 distances	0,4
Autre	32,6
Absence	10,6

Il semble que les élèves s'approprient bien la situation puisqu'ils répondent massivement correctement à la première question. En revanche, la deuxième est beaucoup moins bien traitée. Toutefois, concernant position et déplacement, signalons que la ville dont on est le plus proche est Tours et que c'est aussi celle dont on se rapproche. Un élève qui ne distinguerait pas correctement les deux réussirait. Il faut donc être prudent quant à l'interprétation de la réussite à la première question.

Quant à la deuxième question, le contrat est sans doute un peu inhabituel puisque l'usage n'est pas forcément de demander la distance entre des panneaux. En outre, l'illustration peut apporter une certaine ambiguïté : à chaque « étape » du parcours, il y a deux panneaux.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

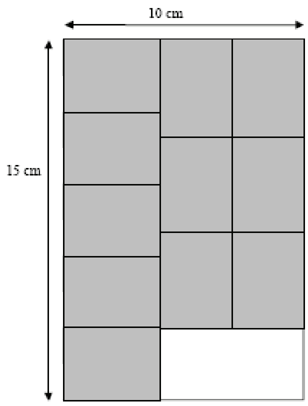
- Schémas cotés représentant des longueurs

Dans les évaluations nationales d'entrée en 6ème, on trouve quelques problèmes incluant des schémas cotés. Nous rapportons le problème des étiquettes (deux présentations), les problèmes du cercle et du rectangle (trois présentations), la lecture de schéma en 1994 (exercice 6ème 32 1994).

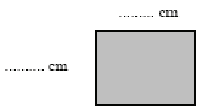
Les étiquettes

Exercice 29

Sophie veut découper des étiquettes rectangulaires toutes identiques dans une plaque de carton rectangulaire de dimensions 10 cm et 15 cm. Elle en a déjà tracé onze comme tu peux le voir sur le dessin.

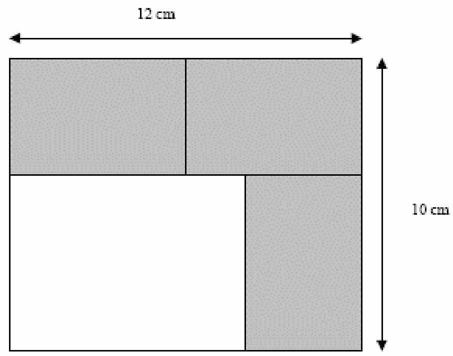


Calcule les dimensions réelles d'une étiquette et indique-les sur le dessin ci-dessous.



Exercice 30

Sophie a dessiné et colorié trois étiquettes rectangulaires toutes identiques sur une plaque de carton, comme le montre le dessin. La plaque de carton est rectangulaire et a pour longueur 12 cm et pour largeur 10 cm.



a) Calcule la longueur réelle d'une étiquette.
Ecris tes calculs.

La longueur d'une étiquette est ....

b) Calcule la largeur réelle d'une étiquette.
Ecris tes calculs.

La largeur d'une étiquette est ....

exercice 6ème 29 1999, échelle 0,5
3 min 30 s, rythme imposé

réponse	1999
3 (largeur) et 4 (longueur) bien placés	12,4
3 et 4 mais inversion de la longueur et de la largeur	0,1
La largeur 3 est donnée et recherche de la longueur en divisant 10 par 3 (code 6)	1,9
La largeur 3 est donnée et absence de réponse ou réponse fausse (autre que celle donnée en code 6) pour la longueur	6,1
L'élève a mesuré (largeur proche de 1,8 ; longueur proche de 2,4)	50,9
Autre	22,6
Absence	6,0

exercice 6ème 30 2000 ; 6ème 32 2004, échelle 0,5
3 min 30 s, rythme imposé

réponse	2000	2004
6 cm ou 6	43,8	47,3
L'élève a mesuré (longueur proche de 4,5) (code 6)	22,4	nc
Autre	26,4	45,2
Absence	7,4	7,5

réponse	2000	2004
4 cm ou 4	23,1	24,9
L'élève a mesuré (largeur proche de 3) (code 6)	22,2	nc
5 cm ou 5 (largeur obtenue en divisant 10 par 2)	11,1	nc
Autre	25,4	58,3
Absence	18,2	16,8

« **Commentaires et analyse des réponses** [exercice 6ème 29 1999]

Cet exercice nécessite une mise en relation des éléments présentés et une exploration de différentes stratégies envisageables.

La propension des élèves à mesurer directement sur une figure, sans référence aux indications d'accompagnement, est peut-être encouragée par la présence d'une étiquette dans la partie réponse. » (dossier CE2-6, 2000, résultats 1999, p. 222)

« **Commentaires et analyse des réponses** [exercice 6ème 30 2000]

Cet exercice nécessite une mise en relation des éléments présents dans le texte et sur la figure.

Il s'inspire de l'exercice 29 du protocole de 1999 dont la présentation a induit, chez 50 % des élèves, le recours au mesurage. Cette modification a tout de même réduit de moitié le pourcentage d'élèves ayant utilisé cette méthode. Le code 6 montre la prégnance de la géométrie-mesure.

L'exercice actuel hiérarchise, pour l'élève, les étapes (calcul de la longueur en premier). De plus, pour trouver la longueur de l'étiquette, on utilise la longueur de la plaque (ce qui n'était pas le cas en 1999). Enfin, chaque étape ne nécessite qu'une opération.

Le fait de diviser par deux pour obtenir la longueur a pu induire un calcul du même ordre pour déterminer la largeur. De plus, l'emploi de la longueur (c'est à dire l'utilisation du résultat trouvé précédemment) pour déterminer la largeur a pu gêner certains élèves.

L'observation des résultats incite à porter une attention particulière aux productions des élèves et à leur faire expliciter leur démarche (certains semblent avoir utilisé les données 10, 12 et 3 un peu au hasard). Pour aider les élèves à développer les compétences visées, on pourra notamment utiliser, en situation d'apprentissage, l'exercice du protocole de 1999.

En phase d'apprentissage, le passage à la réalisation de la figure en vraie grandeur, est une étape préliminaire au calcul. » (dossier CE2-6, 2001, résultats 2000, p. 285)

Nous retenons d'abord de ces exercices la forte propension des élèves à utiliser la règle graduée, ensuite qu'il sont plutôt mal réussis, surtout la version où les questions ne sont pas détaillées. On note aussi une légère amélioration entre 2000 et 2004 qui peut peut-être s'expliquer en partie par le fait que ce type d'exercice, que nous pensons assez original, a pénétré dans les classes après les première évaluations de 1999.

Rectangle et cercle, cotations

Un exercice de géométrie avec un dessin à main levée coté a été donné plusieurs fois (1997, 1998 et 2002) avec des variations plus ou moins importantes dans l'énoncé. La modification la plus importante se trouve entre 1997 et 1998 car on a changé les dimensions et la figure. à cette occasion, on ajoute aussi la phrase « Les mesures réelles sont en centimètres. » qu'on supprime en 2002. Entre 1998 et 2002, on formule la tâche différemment : « Trouve la longueur du segment [EB] » est remplacé par « Quelle est la longueur du segment [EB] ? ». « Explique ta réponse. » est remplacé par « Justifie ta réponse » mais on conserve la figure de 1998.

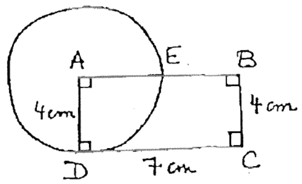
tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

exercice 6ème 6 1997, échelle 0,5

Exercice

Sur ce dessin à main levée (les vraies grandeurs sont écrites en cm), on a représenté un rectangle ABCD et un cercle de centre A qui passe par D.
Ce cercle coupe le segment [AB] au point E.



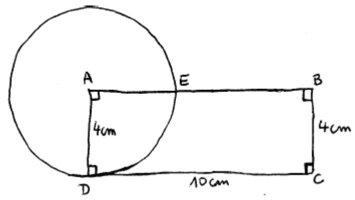
Trouve la longueur du segment [EB]. ....

Explique ta réponse : ....

exercice 6ème 14 1998

Exercice 14

Sur ce dessin à main levée, on a représenté un rectangle ABCD et un cercle de centre A qui passe par D. Les mesures réelles sont en centimètres.
Ce cercle coupe le segment [AB] au point E.



Trouve la longueur du segment [EB]. ....

Explique ta réponse : ....

....

....

exercice 6ème 6 1997

exercice 6ème 14 1998 ; exercice 5ème 12 2002

Longueur du segment [EB]

réponse[55]	6 1997
3 et démarche (rayon, rectangle)	8,4
3 et calcul (7-4)	0,9
3, sans démarche	1
mesurage	16,6
3,5 ou 4 (allusion au milieu)	26,3
Autre	30,8
Absence	16,9

réponse	6 1998	5 2002
6 et argument pertinent (allusion au rayon ou à la longueur du rectangle ou 10-4)	22,2	nc
6 et aucun élément de démarche	2,7	nc
6 cm	nc	50,4
6 (code 2)	nc	1,7
3,5 ou 3,6 (l'élève a mesuré) (code 6)	39,6	24,7
Autre	24,4	18,4
Absence	11,1	4,8

En 1997, outre le faible taux de bonnes réponses (environ un élève sur dix), nous retenons que :

- environ un élève sur six « mesure sur le dessin »,
- et plus d'un sur quatre répond 3,5 ou 4. Ceci signifie que ces élèves considèrent implicitement ou explicitement que le point E est le milieu du segment [AB] (ou que EB=BC) qui est une information « prise sur le dessin » mais qu'ils ajoutent à ce

[55] Pour 1997, nos intitulés de codages ne sont pas exactement ceux qui étaient proposés.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

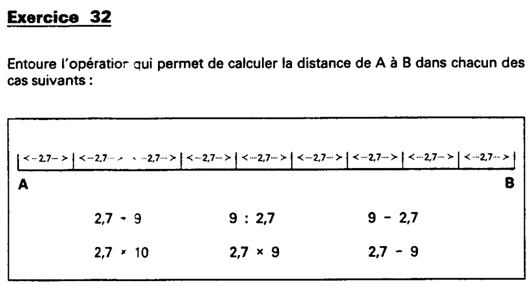
renseignement une partie des informations données dans le registre symbolique : la longueur du segment [AD], [BC] ou [CD].

Selon nous, ce dernier point n'est pas sans rappeler la volonté de faire un « dessin à l'échelle » observée par Amra.

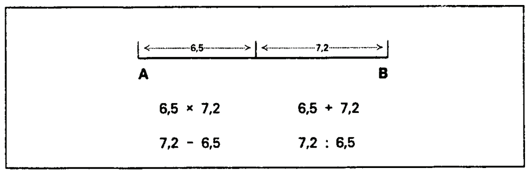
Les résultats sont assez nettement meilleurs en 2002 qu'en 1998. Est-ce lié au codage, au progrès des élèves ou à d'autres éléments ? Signalons que dans la deuxième version, qui est presque un dessin à l'échelle, on ne repère pas les élèves qui donneraient une réponse estimée d'après les proportions. L'estimation pourrait donner entre 5 cm et 7 cm. Ils peuvent bien sûr donner 6 cm ce qui constitue la bonne réponse.

Lire une opération sur un schéma coté

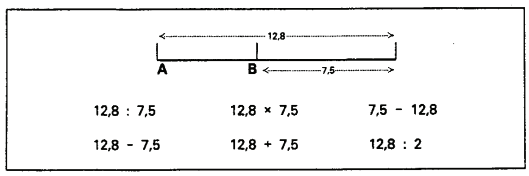
En 1994, les évaluations ont proposé de traduire par une opération un schéma coté.



item 74



item 75



item 76

exercice 6ème 32 1994, rythme imposé : 2 min					
Item 74		Item 75		Item 76	
réponse	%	réponse	%	réponse	%
2,7×9	76,4	6,5+7,2	77,1	12,8-7,5	46,7
Autre	16,8	Autre	14,9	12,8 : 2	7,3
Absence	6,9	Absence	8,1	12,8 : 7,5	9,4
				Autre	25,3
				Absence	11,2

L'item 76 concernant la reconnaissance de la soustraction attire notre attention. Nous retenons qu'il est beaucoup moins bien réussi que les deux premiers. Toutefois, les réponses 7,5-12,8

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

ne sont pas codées. On note aussi que 16% des élèves voient une division dans ce « partage » inégal.

- Pour conclure sur les schémas cotés

Nous retenons de ces résultats sur les schémas que la situation est sans doute complexe. Si les élèves semblent capables pour plus des trois quarts d'entre eux de relier une multiplication et une addition à un schéma. Le cas de la soustraction est moins clair (ex. 32 1994).

Par ailleurs, le problème des étiquettes ainsi que la deuxième version du problème « rectangle et cercle » amènent à penser que les élèves ont tendance à mesurer les longueurs sur le schéma pour produire leur réponse. Néanmoins, il semble qu'il faille moduler cette affirmation. En effet, dans la première version de « cercle et rectangle », il y a des proportions simples visibles entre différents éléments de la figure. Il y a alors moins d'élèves qui mesurent sur le dessin que d'élèves qui utilisent ces proportions en relation avec les dimensions indiquées (et non celles du dessin) pour formuler leur réponse.

La proportionnalité apparaît en fait très prégnante dans les représentations par des schémas cotés. Il y a en effet deux types de schémas cotés : ceux qui sont proportionnels et ceux où seuls l'ordre compte. Les élèves semblent se tourner plus spontanément vers des représentations « proportionnelles » que vers des représentations qui ne conservent que l'ordre (Amra, 1994).

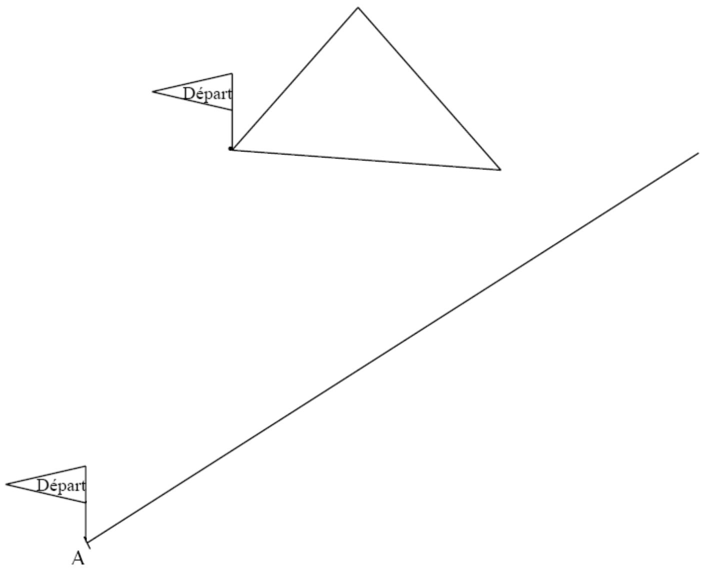
Les résultats médiocres concernant « la distance entre les panneaux », les difficultés des élèves qu'observent Marchand et Amra à représenter l'espace, à choisir une origine chez Marchand, à distinguer position et déplacement chez Amra nous amènent à penser qu'il y a une difficulté à penser l'espace décrit quantitativement et qualitativement dans un texte pour en tirer d'autres informations quantitatives.

Les problèmes plus ou moins nombreux relatifs aux longueurs que nous avons observés dans l'enseignement ancien prenaient-ils en charge l'enseignement de ces questions ? On peut penser, en regardant les manuels, que certaines de ces questions étaient travaillées, en revanche il est difficile de dire si les difficultés étaient dépassées.

2.6. Opérations sur objets

Les évaluations nationales comportent régulièrement des tâches d'évaluation de périmètre. Il faut en général mettre en relation des données chiffrées et un dessin. Nous n'avons pas retenu de telles tâches. En revanche, en 2001, une tâche sans mesure est proposée. Nous l’appelons « la fourmi ».

Une fourmi fait le tour du triangle en se déplaçant sur les côtés.
Une autre fourmi parcourt la même distance sur la ligne droite en partant du point A.
Place sur cette ligne droite le point où elle arrive.



Exercice 6ème 11 2001	
réponse	
Point correct à 3 mm près avec les trois reports apparents	14,7
Point correct à 3 mm près sans reports visibles : par exemple, l’élève a posé une addition et a reporté le résultat	43,1
Point incorrect mais cohérent avec les mesures ou calculs écrits par l’élève	1
Le point d’arrivée a été placé à « l’autre extrémité	12,2
Autre	24,6
Absence	4,1

Dans ce genre d’exercice, les grandeurs sont données dans le registre matériel et non dans un registre symbolique comme c’est le cas avec un schéma coté. Un peu moins de 60% des élèves réussissent. Est-ce lié à l’instrumentation de la tâche, à la formulation de l’énoncé ou bien à une difficulté conceptuelle avec l’addition des longueurs ?

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

3. Conception du test

3.1. Généralités

▪ Mise en œuvre du test

Pour commencer, nous donnons des généralités quant à la réalisation matérielle du test. Ces généralités sont utiles pour comprendre le dispositif d'élaboration du questionnaire qui, rappelons le, se fait en deux temps : un pré-test puis un test.

Types d'exercices

Nous voulons proposer une série d'exercices abordables *a priori* par les élèves de fin de CM2. Les tâches ne devraient mobiliser que des connaissances relativement anciennes. Nous voulons explorer un champ assez vaste. Il nous faut donc poser beaucoup de questions. Nous choisissons des exercices courts. Pour éviter la fatigue des élèves et pour pouvoir modifier les instruments à disposition des élèves au cours de la passation, nous décidons que notre questionnaire comportera deux parties, chacune de 45 minutes.

Un pré-test pour mettre au point le test

Avant de nous lancer dans un recueil de données à échelle moyenne (277 élèves), nous effectuons un pré-test dans une classe.

L'analyse du pré-test ne conduit pas à un traitement statistique. Il n'y a pas d'analyse fine des réponses comme il y en aura pour le test. Le bilan du pré-test sera principalement qualitatif. Essentiellement, il a pour fonction de rendre plus homogènes les groupes d'exercices que nous prévoyons : réduction éventuelle du nombre de variables, suppression d'exercices « trop faciles » notamment. Il permet aussi de repérer des difficultés liées à la présentation des exercices qui pourraient parasiter nos analyses à plus grande échelle.

Conditions matérielles

Le pré-test a été réalisé début février 2006. Le test a été réalisé en mai et juin de la même année. Ceci signifie que les élèves qui passent le test sont véritablement en fin de scolarité primaire.

Pour le pré-test : le chercheur (le meneur) fait passer le test et il y a quatre observateurs (l'enseignant de la classe est présent mais muet). Pour le test : le chercheur (le meneur) fait passer le test (le plus souvent l'enseignant de la classe est présent mais muet[56]).

Pour le pré-test, des observateurs prennent des notes sur la façon dont les élèves s'y prennent pour résoudre les exercices. Ils observent précisément les gestes de 12 des 30 élèves de la classe. Ces données seront évoquées, la plupart du temps, pour justifier les modifications entre le pré-test et le test.

La mise au point de la durée

Nous fixons la durée de chaque exercice. La passation sera contrainte de cette façon pour éviter que les premiers exercices soient traités et pas ceux de fin, « par manque de temps ». Les élèves seront donc soumis à des « top » pour le début et la fin de chaque exercice. Ils n'auront pas le droit de revenir sur un exercice déjà traité.

Une première estimation de la durée nécessaire pour faire chaque exercice est obtenue d'après les indications des cahiers de passation des évaluations nationales d'entrée en 6ème. Le pré-test permet d'affiner ces durées :

- chaque observateur note pour chaque exercice si les élèves ont eu suffisamment de temps ou bien pas assez (qualitatif),
- éventuellement pendant la passation, si le temps n'est pas du tout adapté, ils le signaleront au meneur pour qu'il augmente ou réduise le temps prévu. L'enregistrement audio du pré-test permet d'accéder aux temps effectifs de passation du pré-test.

Ces informations sont utilisées pour définir, pour chaque exercice du test, le temps qui sera accordé aux élèves.

- Remarques préalables sur les instruments à disposition des élèves

Récolter des traces des techniques mises en œuvre

Nous voulons identifier les techniques que les élèves choisissent pour résoudre la plupart de nos problèmes et nous ne voulons pas leur imposer d'écrire des éléments qui ne leur apparaîtraient pas indispensables car ils nous semblent susceptibles d'avoir une influence sur

[56] Il a pu arriver qu'il fasse quelques commentaires au cours de la passation. Nous n'y ferons pas référence car nous ne les avons pas relevés.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

les techniques de résolution choisies. Cette double contrainte nous impose, pensons-nous, des conditions matérielles pour la passation et le choix des exercices.

Nous laissons un espace pour le brouillon (qui est matérialisé par un cadre avec un intitulé *brouillon* dans le pré-test qui ne l'est plus dans le test car il a semblé que des élèves l'interprétaient comme une injonction à écrire leurs calculs). Dans le test, il y a seulement une zone blanche à droite ou en-dessous de l'énoncé. Ces éléments sont présentés oralement au début de la passation.

Nous avons néanmoins besoin de récolter le plus possible de traces. Par suite, les élèves n'ont pas de gomme, ni d'effaceur. Nous leur demandons de rayer légèrement les éléments qu'ils voudraient supprimer. Pour les mêmes raisons et aussi parce que nous proposons des exercices de numération qui sont aussi des exercices du champ multiplicatif, ils n'ont pas droit à la calculatrice.

Avoir ou ne pas avoir la règle graduée

Nous avons vu dans la première partie de ce chapitre que nombre d'élèves semblent utiliser la règle graduée pour produire une réponse dès lors qu'il y a un schéma (coté ou linéaire). Nous voudrions éliminer ces procédures dans la mesure du possible. Une solution simple nous semble être que les élèves ne disposent pas de cet instrument dès lors qu'ils ont un exercice qui comporte un schéma coté ou linéaire. Cependant les élèves vont avoir besoin de cet instrument pour résoudre certains exercices. Comme notre test se fait en deux parties, nous demandons aux élèves d'avoir une règle graduée (de 30 cm) dans une des parties (qui sera la première) et pas de règle pour l'autre (qui sera la deuxième). Cette nouvelle contrainte matérielle nous impose donc des conditions sur l'ordre de passation des exercices.

Les seuls instruments autorisés sont :

- un stylo et une règle graduée pour la première partie,
- un stylo et une bande cartonnée que nous distribuons aux élèves (nous y reviendrons) pour la deuxième.

Les élèves font les exercices dans le livret où sont écrits les énoncés.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

- Le choix des exercices

Principes généraux

Pour les exercices concernant le sens des opérations et pour ceux qui concernent le système métrique et la numération, nous avons identifié globalement les variables à notre disposition. Nous voulons pouvoir croiser les réponses aux exercices. Ceci nous impose de limiter les variables qui sont modifiées entre deux exercices d'un groupe. Nous voulons proposer des problèmes les plus isomorphes possibles qui se distinguent par les grandeurs, par des instanciations différentes d'une grandeur donnée ou par le registre d'expression de l'énoncé. De façon simple, voire simpliste, nous identifions des variables pour nos différentes tâches. Une tâche peut être formulée dans le discret, dans le continu, sur les nombres purs (ce qui semble impliquer qu'elle est alors présente de façon formelle). Dans le continu, elle peut être formulée sur des grandeurs différentes : longueurs, masses, capacités, voire pour plusieurs « instanciations » d'une même grandeur (la longueur peut être un déplacement ou une position, par exemple). L'unité peut aussi apparaître comme une variable. Dans le discret, on peut imaginer qu'elle implique des familles d'objets différents. On peut aussi la proposer dans un registre symbolique ou dans un registre matériel, registre dans lequel les instruments autorisés pour la résoudre peuvent varier. Enfin, la tâche peut être formulée dans des registres différents : schéma coté ou en langue naturelle.

Le champ numérique est également une variable importante. À son propos, nous distinguons les problèmes « dans la table » (table), ceux qui sont susceptibles d'être résolus par du calcul réfléchi ou par du calcul posé (HT) et ceux qui portent sur des nombres ronds, souvent des nombres de « 1 chiffre suivi de zéros » et susceptible d'être résolus par du calcul mental, hors de la table (R). Par ailleurs pour la multiplication, on peut penser qu'il y une différence entre les petites tables et les grandes tables. Pour l'addition et la soustraction, la présence ou non de retenues est une variable.

Parmi les questions que nous avons évoquées précédemment, nous avons retenu :

- des questions de numération et de système métrique qui utilisent le même ordre d'unités,
- des questions de système métrique pour étudier la différence dans les techniques utilisées par les élèves entre les situations formelles et les pratiques sociales évoquées,

- des problèmes simples plutôt destinés à éprouver la difficulté éventuelle des élèves avec le sens des opérations qui pourrait être liée au retard dans la programmation des apprentissages de certaines opérations,
- des problèmes avec des opérations sur objets (évoqués partiellement dans notre partie sur les théories et dans l'étude des évaluations nationales). Une question importante quant à l'addition des longueurs est notamment de savoir si elle est disponible chez les élèves. Il nous semble qu'elle peut être nécessaire pour interpréter des schémas cotés,
- le problème des étiquettes parce qu'il mobilise les quatre opérations sur des petits nombres et qu'il utilise la grandeur longueur et des schémas côtés,
- des problèmes de déplacement. Ce sont les seuls problèmes spécifiques que nous avons retenus de notre étude de l'enseignement ancien. Ils nous intéressent parce qu'ils sont spécifiques mais aussi parce que la longueur est utilisée, en mathématiques, pour représenter toutes les grandeurs.

Remarque sur la classe « pré-test »

Il s'est trouvé que la classe retenue pour le pré-test n'avait pas encore abordé l'algorithme de la division au mois de février en CM2 et que l'algorithme n'avait pas non plus été abordé en CM1 (l'enseignant a suivi ses élèves sur les deux années). Les élèves avaient néanmoins déjà résolu des problèmes de division par d'autres procédures que l'algorithme. Ceci a eu une incidence sur le choix des exercices du pré-test. Nous avons décidé de proposer des exercices de division dans le champ numérique « hors de la table » ainsi que des exercices de division « dans la table ». Nous avons repris un champ numérique unique « hors de la table » pour le test. La particularité de cette classe est d'ailleurs susceptible d'avoir eu une incidence sur les techniques utilisées par les élèves de cette classe pour résoudre les problèmes de numération et de système métrique en contexte. Nous n'avons pas étudié cela précisément.

Le sens des opérations

Problèmes simples sur les quatre opérations

Parce qu'il faut faire un choix et que nous éliminons *a priori* les problèmes qui nous sembleraient trop « faciles » (cas simples de structures additives, par exemple), trop « difficiles » (cas complexes de structures additives, par exemple). Dans nos catégories de problèmes isomorphes nous retenons les problèmes simples de type suivant :

- division : cas quotition,

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

- division : cas partition,
- soustraction : cas complément. Parce qu'ils sont peut-être trop « faciles » nous ajoutons une « donnée inutile », ce qui est souvent le cas des problèmes simples qu'on trouve dans les évaluations nationales.

Nous avons retenu ces opérations et non l'addition et la multiplication parce que nous avions des éléments sur la réussite des élèves dans les évaluations nationales mais aussi parce que ce sont des opérations inverses et qu'elles sont introduites, en tant qu'opération, assez longtemps après l'opération directe. Ceci ne veut pas dire, rappelons le, que les élèves n'ont pas rencontré des problèmes de division ou de soustraction avant qu'on ait « introduit » l'opération. Ces éléments ont-ils une incidence sur les procédures des élèves ?

Opérations sur objets

Pour « répartir » les différents types de problèmes et aussi parce que nous sommes préoccupée par l'addition de longueur, nous choisissons de proposer des opérations sur objets avec l'addition (cas réunion) et la multiplication. La question de la primauté de l'opération directe sur l'opération inverse nous semble en outre moins cruciale pour ce type de question, les opérations sur les objets étant plus inhabituelles.

- Remarques sur la présentation des exercices dans la suite du chapitre

Échelle réduite

Nous élaborons des groupes d'exercices. La confrontation entre les énoncés nous semble donc être primordiale pour mettre en évidence nos intentions. Par suite, nous donnons ici les énoncés à une échelle réduite (0,6 sauf indication contraire) pour pouvoir en juxtaposer plusieurs sur un petit espace. Les énoncés donnés aux élèves « à échelle 1 » sont disponibles en annexe.

Nomenclature

Les exercices du test sont désignés par une abréviation. La plupart du temps elle fait appel aux noms des opérations et à la grandeur utilisée pour les problèmes sur les opérations, aux unités métriques ou de numération et au contexte pour les exercices de système métrique et de numération. Pour les autres exercices les abréviations sont plus diversifiées. Ci-après une liste.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Pour les opérations, nous avons S pour soustraction ; M pour multiplication ; P pour partition ; Q pour quotition. Pour le type de registre (au sens large), nous avons Tr pour tracé ; Co pour en contexte ; Fo pour formel ; C pour case à cocher ; S peut aussi désigner un énoncé sous forme de schéma et T sous forme d'un texte. R signifie règle ou rectangle. L'abréviation all est utilisée pour allonger. Pour les grandeurs, nous avons :

- Lg : longueur ; dis : discret ;
- les unités : mm, kg et hg sont utilisées ;
- et les abréviations nc : nombre de centaines ; cd : chiffre des dizaines.

Les abréviations pour des groupes ou des exercices spécifiques sont : 4op pour quatre opérations ; De pour déplacement ; Sc pour l'exercice intitulé « schéma » ; Pa pour pancarte. L'abréviation diPa est utilisée pour la « distance entre les pancartes ».

Différence entre pré-test et test

Pour gagner du temps, nous présentons en même temps les énoncés du pré-test et du test. Les exercices du pré-test sont numérotés de 1 à 24 qui correspond à l'ordre de passation. Lorsque nous présentons les exercices, nous utilisons le principe suivant :

- s'il s'agit d'un exercice du pré-test, qui n'est pas conservé sous cette forme dans le test, nous indiquons « 1 dans le pré-test » par exemple,
- s'il s'agit d'un exercice du test qui ne provient pas directement du pré-test, nous indiquons son abréviation « SSCLg » par exemple, pour soustraction schéma case à cocher longueur,
- s'il s'agit d'un exercice du test qui provient du pré-test, même s'il a subi des modifications, nous indiquons son abréviation suivie du numéro qu'il avait dans le pré-test, numéro précédé de la mention « ex » : « kgFo, hgFo (ex 1) » par exemple. Ceci désigne l'exercice qui comporte deux questions : une conversion formelle avec les kilogrammes, une autre avec les hectogrammes et que cet exercice correspond à l'exercice 1 du pré-test.

3.2. Numération

Comme nous l'avons déjà indiqué, nous cherchons à mettre en évidence la relation entre les réussites à des exercices de même structure présentés sous différentes modalités. Il y a deux séries d'exercices. La première consiste à travailler sur la relation entre centaine et millier. La deuxième sur les conversions entre centimètres et millimètres.

- Relation de centaine à millier

Intention et premières variables

Nous choisissons d'étudier la relation de centaine à millier car elle nous semble susceptible d'être la plus travaillée au cycle 3. La relation entre dizaine et centaine est plus pauvre du point de vue des relations entre unités comme nous l'avons évoqué au chapitre 3.

Nous nous inspirons des exercices de Parouty pour la numération et des exercices de conversion en contexte pour le système métrique évoqués à propos de l'enseignement ancien. Nous choisissons alors deux modalités : grandeur discrète et masse pour le continu. Par ailleurs, comme nous voulons croiser différents contextes, nous voulons aussi voir comment les élèves réussissent les conversions formelles (en numération et en système métrique).

Nous choisissons d'abord deux exercices de conversion en contexte : l'un pour la numération, l'autre pour le système métrique. Nous ajoutons un exercice formel de numération : le nombre de centaines d'un nombre de 4 chiffres pour faire pendant à l'exercice de conversion en contexte pour la numération. Nous demandons en plus de repérer « le chiffre des dizaines » d'un nombre de quatre chiffres pour savoir si l'élève connaît la position des chiffres. Pour le système métrique, comme nous étudions la relation de centaine à millier, nous devrions travailler avec les hectogrammes et les kilogrammes mais nous voulons nous placer dans une situation familière, ce qui exclut de faire appel à l'hectogramme. Nous choisissons donc deux unités usuelles, le kilogramme et le gramme, et nous parlerons de centaines de grammes au lieu d'hectogrammes. Pour mieux situer les erreurs éventuelles, nous ajoutons aussi une conversion formelle pour évaluer la connaissance de la relation entre kilogramme et gramme.

Énoncés des exercices

Entre le pré-test et le test, il y a plusieurs modifications d'énoncé que nous commentons ultérieurement.

cdFo & ncFo (ex 18)
Complète chacune des lignes : Le **chiffre des dizaines** de 6529 est ……... Le **nombre de centaines** de 8734 est …….
hgCo (ex 12)
Combien de sachets de 100 g de farine peut-on remplir avec un sac de 4 kg de farine ?

1 dans le pré-test	kgFo, hgFo (ex 1)
Complète chacune des lignes : 5 kg = ………………..g	Complète chacune des lignes : 5 kg = ………………..g 8 kg = ………………hg
8 dans le pré-test	ncCo (ex 8)
Pour carreler une pièce, il faut 8564 carreaux. Les carreaux sont vendus par paquets de 100. Combien de paquets faut-il commander ?	Pour faire les photocopies de l'école, il faut 8564 feuilles de papier. Les feuilles sont vendues par paquets de 100. Combien de paquets faut-il acheter ?

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Modifications entre le pré-test et le test

Numération en contexte

Pour éviter les difficultés langagières, nous remplaçons le contexte du carreleur, du pré-test, par une question de photocopies que nous supposons plus familière aux élèves dans le test.

Système métrique formel

Initialement la conversion des kilogrammes en grammes doit servir de référence pour l'exercice de conversion en contexte. L'analyse des réponses au pré-test montre que peu d'élèves convertissent directement les 100 g en kilogrammes, relation qui correspond à la conversion des kilogrammes en hectogrammes. Nous décidons donc d'ajouter la conversion formelle des kilogrammes en hectogrammes pour étudier si les élèves ont les mêmes techniques pour convertir des kilogrammes en hectogrammes formellement que des kilogrammes en centaines de grammes en contexte.

Techniques de résolution attendues

Pour tous ces exercices, on peut attendre une résolution mentale liée à la connaissance de la numération ou du système métrique. Néanmoins, les résultats de Parouty laissent penser que cela ne sera pas toujours le cas.

Numération en contexte (8564 feuilles par paquet de 100 feuilles)

Nous envisageons quatre techniques :

- la technique de la troncature (l'élève sait que pour résoudre un tel problème, il faut tronquer le nombre au rang des centaines),
- la technologie de cette technique (l'élève utilise la relation entre centaine et millier, 8 milliers sont 80 centaines auxquelles il faut ajouter 5 centaines),
- division posée (en colonne),
- division par 100 (calcul mental ou écriture en ligne).

On voit que la technique de la troncature et la division par 100 (non écrite) sont deux techniques qui ne laissent pas de traces et sont donc indiscernables sur des productions d'élèves.

Par ailleurs, dans tous les cas, il faut ajouter 1 au quotient entier ou au nombre de centaines pour donner une réponse correcte au problème.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Nombre de centaines

A priori, toutes les techniques valables pour le problème de numération en contexte sont utilisables. Néanmoins il nous semble que c'est la première qui devrait dominer (car il est possible que cette technique soit enseignée comme un rituel). Toutefois la deuxième, voire les suivantes, peuvent aussi se rencontrer pour un élève qui ne connaîtrait pas le « rituel » et qui chercherait effectivement combien il y a de centaines dans 8564.

Conversion en contexte (4 kg par paquets de 100 g)

Nous envisageons plusieurs techniques. Il y a celles qui ne passent pas par la conversion des kilogrammes en grammes, on peut avoir :

- 100 g c'est 1 hectogramme, 1 kg c'est 10 hg donc 4 kg c'est 40 hg,
- 1 kilogramme, c'est mille grammes, un millier c'est 10 centaines, donc 4 kg c'est 40 centaines,
- utilisation d'un tableau de conversion pour convertir les kilogrammes en hectogramme (à condition de savoir qu'un 1 hg = 100 g). Cette technique est peu probable. Car si on connaît cette relation, on n'utilise pas le tableau pour convertir des kilogrammes en hectogrammes, nous semble-t-il.

Il y a celles qui passent par la conversion explicite des kilogrammes en grammes : 4 kg = 4000 g car 1 kg = 1000 g (ou par le tableau de conversion). On peut ensuite utiliser une des techniques permettant de résoudre le problème précédent de numération en contexte. Les calculs éventuels sont néanmoins plus simples avec 4000 qu'avec 8564 et il n'y a pas d'ajustement du quotient à réaliser (ajout de 1) pour résoudre le problème.

Conversions des kilogrammes en grammes

On peut penser que la relation entre kilogramme et gramme est très familière et qu'elle est naturalisée. Néanmoins les évaluations d'entrée en 6ème montrent qu'environ 60% des élèves seulement réussissent. Les élèves peuvent donner la réponse directement « sans réfléchir ». Si on « réfléchit », on peut utiliser un tableau de conversion (ou savoir que les deux cases sont côte à côte) ou encore faire référence au préfixe « kilo » si on sait qu'il signifie « millier ».

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Conversions des kilogrammes en hectogrammes

La relation du kilogramme à l'hectogramme n'est *a priori* pas naturalisée. On peut donc utiliser les techniques que nous avons évoquées pour les kilogrammes en grammes : tableau, préfixe.

Durée

	Problème numération	Formel numération	Problème système métrique	Formel syst. métr.
Pré-test	2 min	1 min	2 min	1 min 30 s (pour 3)
Test	2 min	1 min	1 min 45 s	1 min 30 s (pour 3)
Év. nat.				1 min 30 s (pour 2), 2 min (pour 4)

- Relation entre centimètre et millimètre

Intention

Nous utilisons le résultat des conversions des millimètres en centimètres donné par les évaluations nationales. Au départ nous voulons étudier la différence de techniques entre les conversions formelles et les conversions en contexte. Dans l'enseignement ancien, il y a manifestement des liens qui sont tissés dans l'étude du système métrique entre ce qu'on fait de façon formelle et ce qu'on fait en contexte. Dans nos représentations, ces liens sont beaucoup plus ténus aujourd'hui. Est-ce que les élèves utilisent des techniques différentes lorsque la conversion est donnée hors de tout contexte et en contexte ?

Nous décidons donc de donner la même conversion : en contexte et hors contexte. Nous choisissons l'ordre de grandeur de ce qui est proposé dans les évaluations. Cette question est déjà étudiée en partie dans la rubrique précédente avec les conversions d'hectogrammes en kilogrammes.

En fait, sur la classe du pré-test, les différences de réussite entre les deux modalités ne sont pas frappantes. Par suite, nous décidons, pour le test, d'adjoindre un exercice dans une troisième modalité : il s'agit d'utiliser une conversion pour faire un tracé.

Énoncés des exercices

mmFo (ex 1)	mmCo (ex 21)	mmTr
Complète chacune des lignes : 630 mm = ………………cm	Combien de morceaux de 1 cm peut-on découper dans un fil de 420 mm de long ?	Trace un trait de 260 mm de long.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Modification de l'énoncé mmTr

L'exercice mmTr n'a pas bénéficié de « rodage » dans le pré-test. Les passations du test dans les deux premières classes ont révélé des anomalies que nous avons prises en compte à partir de la troisième classe.

Pour repérer les élèves qui ne prendraient pas en compte l'unité mm, mais essaieraient de tracer un trait de 260 cm, dans un premier temps, nous avions prévu une case à cocher :

Trace un trait de 260 mm de long. Si tu penses que le trait ne rentre pas dans la feuille, fais une croix : ☐

Cette case à cocher n'a pas rempli sa fonction, elle a dérouté les élèves alors que nous cherchons à proposer des exercices « ordinaires ». Cette version n'a été utilisée que dans les deux premières classes du test. Dans les autres classes, il n'y a donc plus de case à cocher.

Techniques de résolution attendues

Pour les deux exercices, formel et en contexte, nous pensons que les élèves sont susceptibles d'utiliser la même technique : une technique pour convertir (avec tableau ou naturalisée).

Pour le tracé, on peut bien sûr utiliser une conversion. On ne peut néanmoins exclure que des élèves comptent les millimètres 10 par 10 sur leur règle graduée en centimètres (et en millimètres) : dix, vingt, trente...

Durée et ordre de passation

	Tracé	Formel système métrique	Problème système métrique
Pré-test		1 min 30 s (pour 3)	2 min
Test	1 min 15 s	1 min 30 s	1 min 15 s
Évaluation nationale		1 min 30 s (pour 2), 2 min (pour 4)	

Pour l'ordre de passation, nous voulons éviter que les élèves utilisent la relation de mm à cm sur leur règle ce qui implique que la règle ne soit pas disponible pour les exercices mmFo et mmCo.

3.3. Problèmes simples

Pour ces problèmes relevant de la division et de la soustraction nous utilisons le discret et la longueur. Pour la longueur, nous avons choisi d'utiliser à plusieurs reprises la locution « bout à bout » spécifique de cette grandeur.

- La division

Récapitulation des valeurs des variables

Nous donnons ci-après un tableau récapitulant les valeurs des variables. En gras nous soulignons ce qui a été modifié entre le pré-test et le test :

- en gras grisé : variable modifiée entre le pré-test et le test,
- en gras non grisé : modification interne de la rubrique sans modification de la valeur de la variable.

	Pré-test				Test				
Réf ex.	10	20	19	4	Pdis (ex 10)	**PTLg (ex 20)**	PSLg (ex 20)	Qdis (ex 19)	QLg (ex 4)
Type	partition	partition	quotition	quotition	partition	**partition**	partition	quotition	quotition
Champ numérique	HT	HT	table	table	HT **(nombres)**	HT **(nombres)**	HT **(nombres)**	**HT**	**HT**
Registre énoncé	Texte	Schéma	Texte	Texte	Texte	**Texte**	Schéma	Texte	Texte
Grandeur	Discret	Lg	Discret	Lg	Discret	**Lg**	Lg	Discret	Lg
Unité	gâteau	cm	bonbon	cm	gâteau	**cm**	cm	bonbon	cm
Opération sur objet	non	non	non	non	non	**non**	non	non	non

Énoncés des exercices

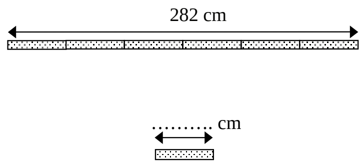
Pour les exercices dont seules les valeurs numériques sont modifiées entre le test et le pré-test, nous ne donnons que l'énoncé du test et rappelons, en dessous les valeurs numériques du pré-test.

Pdis (ex 10)	Qdis (ex 19)	QLg (ex 4)
Ali a 7 paquets de gâteaux, tous identiques. En tout, il a 182 gâteaux. Combien y a-t-il de gâteaux dans un paquet ?	Claire a préparé des paquets de bonbons avec ses 168 bonbons. Elle a mis 7 bonbons dans chaque paquet. Combien Claire a-t-elle préparé de paquets ?	En mettant bout à bout des morceaux de papier de 8 cm de long, on a obtenu une ligne de 192 cm. Combien de morceaux de papier a-t-on utilisés ?
Pré-test 161 (au lieu de 182)	Pré-test 63 (au lieu de 168)	Pré-test 72 (au lieu de 192)

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

20 dans le pré-test

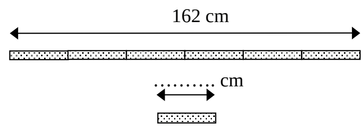


PTLg (ex 20)

En mettant bout à bout 6 morceaux de papier identiques, on a obtenu une ligne de 162 cm.

Quelle est la longueur d'un morceau de papier ?

PSLg (ex 20)



Registres des énoncés

Nous voulons aussi repérer l'effet du type de formulation. Pour le pré-test, nous proposons l'exercice de partition de longueur sous la forme d'un schéma coté. Nous voudrions savoir dans quelle mesure les élèves savent ou non interpréter un schéma coté « de division ». Dans ce type de schéma, l'égalité des longueurs est un implicite et pour réussir à ce type d'exercice, il faut inférer la proportionnalité, propriété dont nous avons vu que les élèves l'infèrent à tort dans les exercices « cercle et rectangle », par exemple, où seul l'ordre compte.

Formulation

Les exercices Pdis, QLg et PLg (texte) ont la même structure syntaxique : nombre de parts ou taille d'une part, puis total, puis question. L'exercice Qdis a une structure différente : total, puis taille d'une part, puis question.

Modifications entre le pré-test et le test.

L'analyse des résultats au pré-test montre que les résultats de l'exercice de partition de longueur (sous la forme uniquement d'un schéma coté) sont très différents (en un sens que nous n'avons pas caractérisé) de ceux des autres exercices de division. Nous décidons de proposer l'exercice de partition de longueur sous deux formes pour le test : un schéma coté, un texte. Une moitié des élèves travaillent avec le premier type, l'autre moitié avec le deuxième.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Les autres aménagements pour le test consistent à homogénéiser les champs numériques pour les quatre exercices de division. Comme nous l'avons indiqué, pour le pré-test, les deux exercices de quotition sont donnés dans la table, les deux exercices de partition sont donnés hors la table. Pour les quatre exercices du test, nous choisissons de faire utiliser les grandes tables (diviseur 6, 7 ou 8) et d'avoir un quotient entre 20 et 29. Nous voudrions contraindre à l'utilisation d'un calcul posé ou de procédures d'estimation écrite. Néanmoins un calcul mental (non mémorisé) est possible.

Techniques de résolution attendues :

- pour les exercices « dans la table » : pas de trace écrite,
- pour les exercices hors de la table : pose de la division ou traces de procédures d'estimation du quotient par multiplication ou addition itérée.

Durée et ordre de passation

	Partition discret	Partition longueur	Quotition discret	Quotition longueur
Pré-test	3 min	3 min	2 min	2 min
Test	2 min 30 s	2 min 30 s	2 min 30 s	2 min 30 s
Évaluation nationale	3 min pour un exercice avec deux questions ou 5 min pour deux exercices simples			

Pour l'ordre de passation, nous voulons alterner les types d'exercices. Par ailleurs, l'exercice partition longueur sous forme de schéma doit être proposé lorsque la règle graduée n'est pas disponible.

- La soustraction

Intention

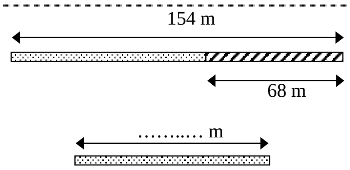
Nous voulons proposer une série de problèmes simples sur la soustraction. Nous voulons voir si la grandeur a une incidence sur les techniques mises en œuvre. Ce sont encore la longueur et le discret qui sont retenus. Nous choisissons des problèmes de complément.

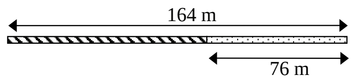
Nous voulons savoir si les élèves reconnaissent directement les soustractions dans les situations que nous leur proposons. Aussi pour privilégier la reconnaissance de l'opération et empêcher les techniques qui masqueraient cette connaissance éventuelle, par exemple calculer une différence en « ajoutant ce qui manque », nous avons décidé pour le pré-test de proposer plusieurs exercices du type QCM (nous nous sommes inspirée de ce que nous avons trouvé dans les évaluations nationales). Pour des raisons sur lesquelles nous reviendrons, pour le test nous avons abandonné ce type de présentation, sauf pour un exercice qui est proposé dans deux modalités : avec case à cocher, sans case à cocher.

En outre, à ces exercices simples de soustraction, nous ajoutons l’exercice « distance entre les pancartes » dont nous avons parlé à propos des évaluations d’entrée en 6ème. Le calcul est simple, mais le contexte est assez complexe et semble nécessiter un repérage dans l’espace. Par rapport à l’évaluation d’entrée en 6ème, nous modifions les directions de façon à ce qu’on s’éloigne de la ville dont on est le plus proche.

Énoncés des exercices simples de soustraction

Nous donnons directement les énoncés élaborés pour le test. Entre le test et le pré-test, la formulation de la situation n’est pas modifiée, les nombres le sont un peu pour harmoniser les difficultés calculatoires. En revanche, comme nous l’avons déjà indiqué, la forme de la question est modifiée. Nous indiquons les valeurs numériques originales en-dessous de l’énoncé retenu pour le test.

STLg (ex 6)	Sdis (ex 13)	SSLg
Pour fabriquer un tuyau d’incendie de 152m, les pompiers ont assemblé 2 tuyaux : un vert et un noir. Le tuyau noir mesure 68m. Combien mesure le tuyau vert ?	Les 142 élèves des 6 classes d’une école ont participé à une course d’endurance. Il y a 58 élèves qui n’ont pas terminé la course. Combien d’élèves ont terminé la course ?	
pré-test 154-68 (au lieu de 152-68)	pré-test 142-56 et 4 classes (au lieu de 142-58 et 6 classes)	Version ajoutée dans le test

SSCLg (ex 22)

Entoure le calcul qui permet de trouver la longueur à rayures :

164 : 76	164 : 2
76 × 2	164 - 76
76 - 164	164 + 76

pré-test 154-68 (au lieu de 164-76)

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Modifications entre le pré-test et le test pour les exercices simples de soustraction

Ci-après l’énoncé de l’exercice « pompiers » (6) du pré-test :

Pour fabriquer un tuyau d’incendie de 154m, les pompiers ont assemblé 2 tuyaux : un vert et un noir. Le tuyau noir mesure 68m. Combien mesure le tuyau vert ?

Entoure le calcul qui permet de trouver la longueur du tuyau vert.

68×154×2	68 × 2	Autre réponse :
154 : 68	154 : 2	
154 - 68	154 + 68	

L’analyse des résultats du pré-test semble montrer que des élèves ont des difficultés importantes à comprendre ce que l’on attend d’eux. Nombre d’entre eux effectuent les calculs présents dans les différentes cases, peut-être pour retrouver la valeur à laquelle ils pensent. Nous avions en outre, pour permettre aux élèves qui utiliseraient une opération à trou, proposé une case « autre réponse » qui n’a manifestement pas joué son rôle. Nous avons néanmoins gardé un exercice de ce type pour le test, en supprimant cette case supplémentaire.

Énoncé de l’exercice « distance entre les pancartes »

distance entre les pancartes : 9 dans le pré-test

Kim fait une randonnée à vélo. Peu après son départ, il voit un premier panneau :

BLOIS	**12 km**	→
TOURS	**34 km**	←

Dix minutes plus tard, sur la même route, il voit un deuxième panneau :

BLOIS	**15 km**	→
TOURS	**31 km**	←

Kim se rapproche d’une des deux villes. Laquelle ?
Quelle est la distance entre les deux panneaux ?

diPa (sans schéma) (ex 9)

Kim fait un voyage en vélo. Peu après son départ, il voit une première pancarte :

NEVERS	**69 km**	→
TOURS	**132 km**	←

Il pédale longtemps. Beaucoup plus tard, sur la même route, il voit une deuxième pancarte :

NEVERS	**153 km**	→
TOURS	**48 km**	←

Kim se rapproche d’une des deux villes. Laquelle ?
Quelle est la distance entre les deux pancartes ?

diPa (avec schéma) (ex 9)

Kim fait un voyage en vélo. Peu après son départ, il voit une première pancarte :

NEVERS	**69 km**	→
TOURS	**132 km**	←

Il pédale longtemps. Beaucoup plus tard, sur la même route, il voit une deuxième pancarte :

NEVERS	**153 km**	→
TOURS	**48 km**	←

TOURS NEVERS

Kim se rapproche d’une des deux villes. Laquelle ?
Quelle est la distance entre les deux pancartes ?

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Modifications entre le pré-test et le test pour l'exercice « distance entre les pancartes »

Entre le pré-test et le test, nous effectuons plusieurs modifications dans l'énoncé de cet exercice. Le récit de la situation est un peu modifié : nous essayons de mieux signifier le « temps qui passe » et de simplifier le vocabulaire. Le mot panneau est notamment remplacé par le mot pancarte (des élèves ayant posé des questions aux observateurs sur le mot panneau pendant le pré-test). Ensuite, les nombres sont modifiés, pour le pré-test nous avions repris les valeurs données dans les évaluations nationales. Dans le test, il s'agit d'utiliser le même domaine numérique que pour les autres problèmes simples de soustraction (pour permettre éventuellement des croisements). Ceci est en outre susceptible de réduire le recours au calcul mental pour faire apparaître l'opération que les élèves calculent. Par ailleurs, par inadvertance, ces modifications font que la ville dont on se rapproche est aussi celle dont on est le plus proche à la deuxième pancarte. Enfin, pour le test, cet exercice est proposé sous deux formes : l'une comporte en plus de l'autre une amorce de schéma pour représenter la situation.

Techniques de résolution attendues

Nous avons choisi des problèmes de complément. La technique standard de résolution est une soustraction. Cette opération peut se calculer en utilisant l'algorithme ou mentalement, par des techniques diverses. Toutefois, la structure « complément » est susceptible de favoriser la reconnaissance d'une addition à trou, opération qui peut se calculer « en complétant ce qui manque au petit nombre pour obtenir le grand » : mentalement ou à l'écrit par tâtonnement ou par addition à trou posée.

Durée

	STLg	Sdis	SSLg	schéma	pancarte
Pré-test	2 min (coche)	2 min (coche)	2 min (coche)	2 min (coche)	3 min
Test	1 min 45 s	1 min 45 s	1 min (coche)	1 min 30 s	2 min 45 s
Évaluation nationale	Cases à cocher : 2 min pour 3 items Problème simple de soustraction : 2 min				

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

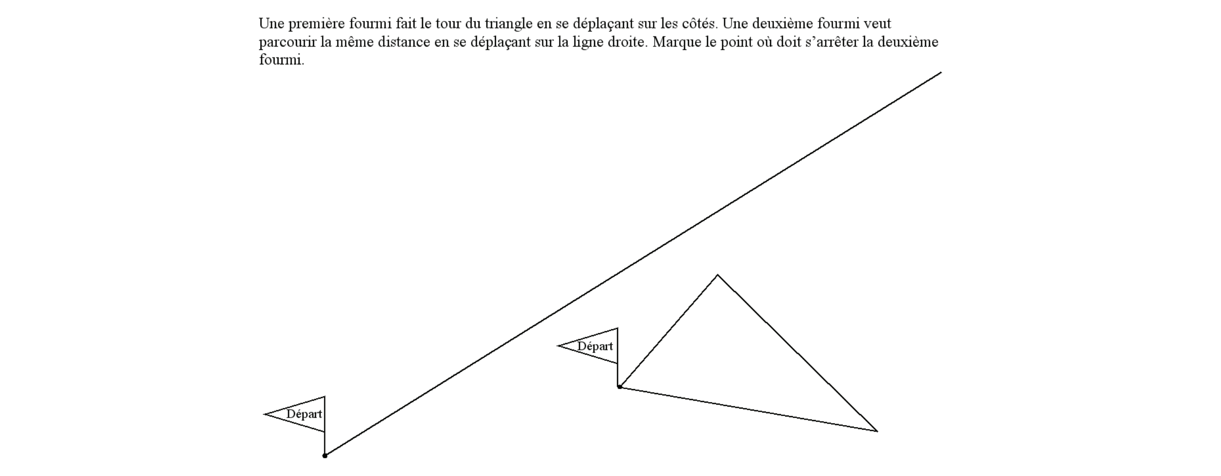
3.4. Les opérations sur objets

- Pré-test : addition

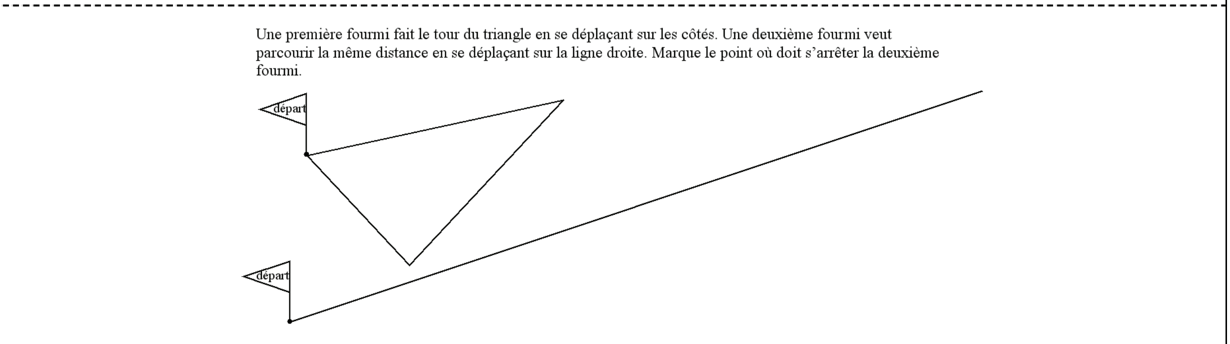
La fourmi

Nous décidons pour le pré-test de reprendre l’exercice de la « fourmi », tiré des évaluations nationales. Nous modifions légèrement la formulation de l’énoncé. C’est un problème « d’addition » de type « réunion ». Il sera proposé avec deux modalités : une règle graduée, une bande cartonnée dont la longueur (environ 7,5 cm) est inférieure au périmètre du triangle et supérieure à chacun de ses côtés (4 cm, 6 cm et 7 cm). Nous choisissons les dimensions de la figure pour que les côtés du triangle soient un nombre entier de centimètres (original à l’échelle 1 en annexe). Entre les deux formes (avec règle, sans règle), la figure est très légèrement modifiée – pour des raisons de mise en page – mais pas le texte.

2 dans le pré-test (échelle 0,5), avec règle



16 dans le pré-test (échelle 0,5), sans règle



Les observateurs relèvent un certain nombre de techniques de résolution sans instrument : report avec les doigts (pas d’utilisation de la bande), pas d’action visible mais l’élève place le point sur le trait. L'analyse des productions montrera que certains des élèves qui utilisent ces procédures réussissent avec la précision attendue (3 mm).

Mesure d'une grande longueur

Nous voudrions aussi savoir si l'additivité des longueurs en utilisant la règle gradué constitue une difficulté pour les élèves de CM2. Nous décidons de demander la longueur d'un grand trait (il s'agit d'un trait de 48 cm, tracé en oblique sur une feuille A3). Pour le mesurer, il faut additionner deux longueurs.

L'exercice de mesure d'une grande longueur est très bien réussi par presque tous les élèves. Il y a quelques erreurs liées à la lecture de la graduation de la règle mais tous les élèves ajoutent deux nombres qu'ils ont obtenus avec leur règle. Il est abandonné pour le test.

Modification entre le pré-test et le test

Avec la suppression de l'exercice de mesure d'une grande longueur, il ne reste plus qu'une paire d'exercices sur l'addition. Nous décidons en fait de supprimer l'étude de cette opération et remplaçons cette paire par une autre qui implique la soustraction sur objets.

- Test : la soustraction sur objets

Intention

Nous avons vu que la relation entre l'addition et l'ordre est une question importante de la théorie et nous avons déjà évoqué des tâches dont il semble qu'elles n'existent pas (ou très marginalement) dans l'enseignement actuel (chapitre 2). Nous les reprenons.

La forme de l'énoncé est commune aux deux exercices. Les instruments diffèrent (nous avons choisi la règle graduée et une bande cartonnée). Il y a deux objets dont l'un est plus court que l'autre, il faut rallonger le plus court pour qu'il soit long comme le plus long. La « rallonge » doit être tracée dans un cadre. C'est un problème de recherche de transformation additive.

La contrainte de matérialisation de tout ou partie des objets pose des problèmes de mise en œuvre qui se traduisent dans les choix des variables retenues pour les exercices.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

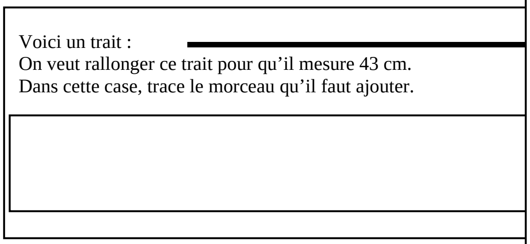
tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Variables

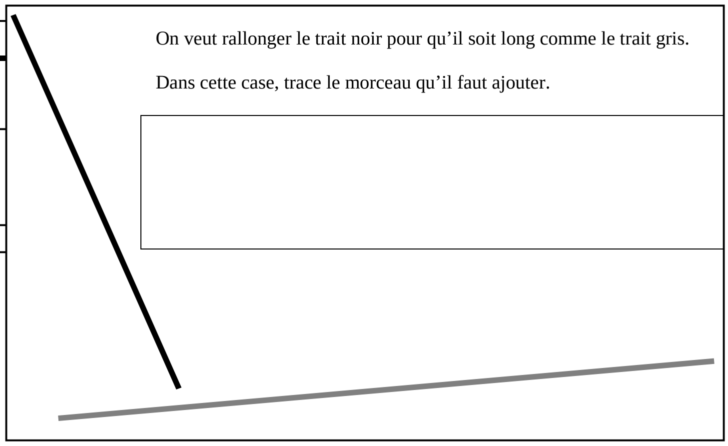
	Avec règle	Sans règle
Instrument	Règle de 30 cm	Bande cartonnée de longueur intermédiaire entre les deux traits
Trait court	Tracé (longueur 25 cm)	Tracé (noir)
Trait long	Évoqué par sa longueur (43 cm)	Tracé (gris)
Transformation	À tracer	À tracer

Énoncés des exercices

allonger avec la règle : allR



allonger avec la bande : allB



Techniques de résolution attendue

Pour l'exercice avec la règle

Nous attendons que les élèves mesurent le trait court puis qu'ils calculent la différence 43-18 (en posant l'opération ou en calculant mentalement) et qu'ils tracent ensuite un trait de 25 cm. D'autres procédures sont néanmoins possibles, nous avons essayé de les décourager mais elles sont tout à fait susceptibles d'apparaître. Les élèves peuvent mesurer le trait court et tracer la « rallonge » en comptant les centimètres un par un de 18 à 43. Les contraintes matérielles nous empêchent de choisir des nombres qui ont le même ordre de grandeur que ceux des autres exercices de soustraction : 150 et 70. Pour le faire, il faudrait prendre le millimètre comme unité pour pouvoir manipuler des « grands nombres » sous forme d'objets ce qui implique alors une conversion des centimètres en millimètres pour le mesurage ou un calcul avec les décimaux, ce que nous voulons éviter.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Pour l'exercice avec la bande

Nous attendons que les élèves reportent sur le trait gris la longueur du trait noir en utilisant leur bande cartonnée. La longueur de cette bande est choisie pour cela. Elle trop courte pour qu'on puisse « transporter » la longueur du trait long, elle est suffisamment longue pour qu'on puisse le faire pour le trait court et pour que l'écart soit transportable.

Durée pour addition et soustraction et ordre de passation

	règle	bande
Pré-test	fourmi : 4 min	fourmi : 4 min
Test	soustraction : 2 min 30 s	soustraction : 2 min 30 s
Évaluation nationale	Addition (la fourmi) : 4 min	

Les instruments déterminent dans quelle partie chaque exercice doit se trouver.

Remarque sur la formulation

Comme l'exercice de mesurage, ces deux exercices n'ont pas bénéficié de « rodage » dans le pré-test. Les passations du test dans les deux premières classes ont révélé des anomalies que nous avons prises en compte à partir de la troisième classe.

Ces deux exercices sont des problèmes de recherche de transformation positive. Il est connu qu'il y a un risque d'interprétation du mot « rallonger » comme inducteur d'une addition. Pour l'exercice avec la règle, le trait total (18 cm + 43 cm=61 cm) ne rentre alors plus « matériellement » dans la feuille (il faut tracer une ligne brisée). Dans un premier temps, nous avions prévu une case à cocher.

Voici un trait :

On veut rallonger ce trait pour qu'il mesure 43 cm.

Trace le morceau qu'il faut ajouter.

Si tu penses que le morceau ne rentre pas dans la feuille, fais une croix : ☐

Cette case à cocher n'a pas rempli sa fonction, elle a dérouté les élèves. Cette version n'a été utilisée que dans les deux premières classe du test. Par ailleurs, il n'y a pas de cadre pour tracer le trait dans cet énoncé « avec règle » alors qu'il y en a une pour la version « sans règle ».

Nous avons donc élaboré une deuxième version de l’énoncé : en supprimant la case à cocher, en ajoutant un cadre et en adaptant la formulation de l’énoncé. Ceci permet d’homogénéiser les formulations des deux exercices avec et sans règle.

- La multiplication

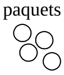
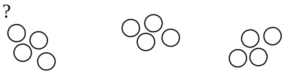
Intention et variables

Nous voulons faire intervenir les grandeurs objets et prendre comme variable pour la grandeur : discret et continu. Nous nous limitons à la longueur pour des questions de mise en oeuvre. Cet exercice est inspiré par l’exercice de (Marijon CE2 1947, leçon 33) évoqué à propos des opérations sur objets dans l’enseignement ancien (chapitre 3).

Pour le discret, la grandeur est nécessairement mesurée. Il en sera donc de même pour le continu. Se pose alors la question du choix de l’instrument de mesure. Nous aurions pu fabriquer des règles graduées dans des unités arbitraires et les proposer aux élèves ou encore fabriquer une unité à reporter. Nous avons choisi d’utiliser la règle ordinaire graduée (triple décimètre) en centimètres et millimètres. Pour le discret : il faudra compter des objets. La forme des deux énoncés se veut identique. Les deux énoncés comportent des données « inutiles » au même endroit. Outre des différences non maîtrisées, on ne peut éviter la différence entre les deux tâches préliminaires de mesurage : utilisation de la règle ou dénombrement de jetons.

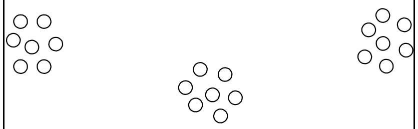
Énoncés des exercices

L’énoncé des deux exercices évolue entre le pré-test et le test.

multiplication sur objet longueur : 11 dans le pré-test	discret : 23 dans le pré-test
On trace des traits longs comme celui ci : Quelle est la longueur du trait obtenu avec 4 traits bout à bout ?  Réponse : …………………………………………………..……… Si on en traçait 88 bout à bout, quelle serait la longueur du trait obtenu ? Réponse : …………………………………………………………	On fait des paquets de jetons, tous identiques à celui-ci :  Combien utilise-t-on de jetons pour faire 3 paquets ?  Réponse : …………………………………… Combien utiliserait-on de jetons pour faire 86 paquets ? Réponse : ……………………………………

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

MLg (ex 11)	Mdis (ex 23)
On trace, bout à bout, des petits traits qui ont tous la même longueur. On en a tracé trois et on a obtenu ce grand trait :  Si on traçait 78 petits traits bout à bout, quelle serait la longueur du grand trait ?	On fait des paquets de jetons, tous identiques. On en a fait trois :  Si on faisait 84 paquets, combien utiliserait-on de jetons ?

Modifications entre le pré-test et le test

Dans le pré-test, il y a deux questions : la première est destinée à vérifier l'aptitude des élèves à utiliser la règle graduée, la deuxième vise à repérer la reconnaissance de la multiplication. Les nombres sont choisis de façon à ce que les difficultés numériques soient du même ordre. L'examen des réponses au pré-test montre une certaine confusion dans la version discrète avec les nombres 3 et 4 qui n'existe pas dans la version longueur. Nous pensons que cette confusion provient du fait que les nombres 3 et 4 sont vus directement sur le dessin sans être effectivement dénombrés (reconnaissance immédiate) contrairement à la version longueur où les élèves mesurent nécessairement le trait de 3 cm. Pour pallier cette difficulté, nous choisissons de forcer le dénombrement en augmentant le cardinal de la collection à évaluer. Par ailleurs, la différence de procédure pour évaluer la longueur du trait et le nombre de jetons, ainsi que le peu de discrimination apportée par la règle graduée dans la réussite des élèves nous incitent à supprimer cette première question dans le test final.

Techniques de résolution attendues

Les nombres sont choisis pour que les difficultés numériques soient du même ordre dans le discret et dans le continu et pour que les élèves posent la multiplication : 6 cm×78 et 7jetons×84 dans le test.

Durée

Pour la durée nous n'avons pas de référence dans les évaluations nationales. Nous choisissons une durée par rapport aux autres exercices qui impliquent un calcul posé. En fonction des observations au cours du pré-test, nous réduisons la durée pour le test.

	Longueur	discret
Pré-test	3 min 30 s	3 min
Test	2 min 30 s	2 min 30 s

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

On doit disposer de la règle graduée pour la version longueur. Nous ne souhaitons pas que les deux exercices soient posés dans la même partie.

3.5. Autres problèmes sur les opérations

- Le problème des étiquettes

Intention et variables

Nous avons choisi de retenir le problème des étiquettes car il nous semble significatif de l’articulation entre les grandeurs et les nombres. La forme que nous proposons est largement inspirée des deux versions données dans les évaluations d’entrée en 6ème de ce problème.

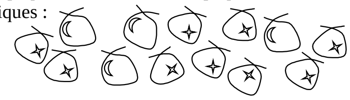
Nous voulons proposer un problème de même structure sous forme discrète. Nous ne sommes pas parvenue à en inventer une version discrète, à cause de la forme rectangulaire de l’étiquette qui relie les deux variables probablement. Aussi, avons-nous inventé deux autres versions pour ce problème : une version « longueur » (que nous appellerons *baguettes*) qui rend « indépendantes » les deux variables et une version « discrète » (que nous appellerons *paquets*) de la version « baguettes ». Nous proposons trois versions du problème aux élèves.

Énoncés des exercices

Nous donnons ci-après les versions retenues pour le test. Nous indiquons les modifications entre test et pré-test par la suite.

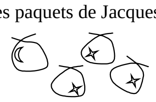
4 opérations discret : 4opD (ex 5)

Mariam a préparé deux sortes de paquets de bonbons : des paquets « lune » tous identiques, des paquets « étoile » tous identiques :



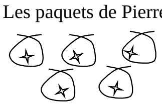
Elle en a donné à Pierre et à Jacques. Jacques et Pierre ont compté leurs bonbons.

Les paquets de Jacques



Jacques ouvre ses paquets et dit : « j’ai 16 bonbons »

Les paquets de Pierre

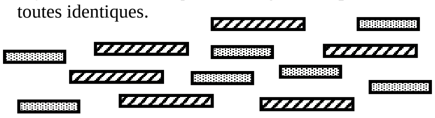
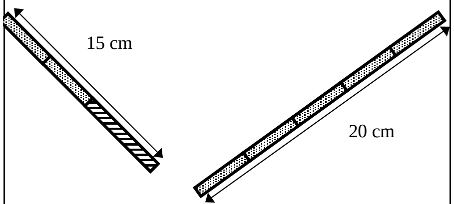


Pierre ouvre ses paquets et dit : « j’ai 15 bonbons ».

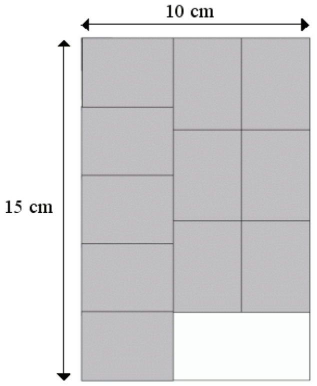
Combien y a-t-il de bonbons dans un paquet « lune » ? Combien y a-t-il de bonbons dans un paquet « étoile » ?

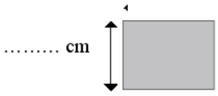
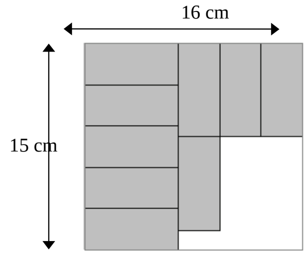
Dans un paquet ………………, il y a ……….. bonbons.
Dans un paquet ……..……..…, il y a ……….. bonbons

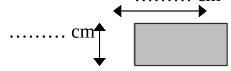
tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

<table>
<tr><th>longueur, baguettes : 4opL (ex 17)</th><th>rectangle, étiquettes : 24 au pré-test</th><th>4opR (ex 24)</th></tr>
<tr>
<td>Jeanne a deux sortes de baguettes : des baguettes à rayures toutes identiques, des baguettes à points toutes identiques.

Elle a fabriqué 2 tiges en mettant bout à bout quelques baguettes comme sur le dessin. Puis, elle a mesuré la longueur des tiges qu'elle a fabriquées.


Quelle est la longueur d'une baguette à rayures ?
Quelle est la longueur d'une baguette à points ?

Une baguette …...……………… mesure ……..... cm.
Une baguette ………………..… mesure ……..... cm.</td>
<td>Sophie veut découper des étiquettes rectangulaires toutes identiques dans une plaque de carton rectangulaire de dimensions 10 cm et 15 cm. Elle en a déjà tracé onze comme tu peux le voir sur le dessin.


Calcule les dimensions d'une étiquette et indique-les sur le dessin ci-dessous.

</td>
<td>Sophie veut découper des étiquettes rectangulaires toutes identiques dans une plaque de carton rectangulaire de dimensions 16 cm et 15 cm. Elle en a tracé neuf comme tu peux le voir sur le dessin.


Calcule les dimensions d'une étiquette et indique-les sur le dessin ci-dessous.

</td>
</tr>
</table>

Mise au point des valeurs des variables

Les deux problèmes de longueur (baguettes et étiquettes) sont en centimètres avec des ordres de grandeur proches aussi bien pour les dessins que pour les valeurs numériques.

La forme des énoncés baguettes et discret est proche mais diffère par quelques points :

- l'indication des grandeurs mesurées est standard pour la longueur (cotation avec une flèche) alors qu'on utilise un artifice pour les paquets,
- on relie les paquets sous forme graphique et langagière dans les cadres alors que les deux tiges ne sont pas spécialement discriminées.

La version étiquette tente de reprendre les mêmes choix :

- cotation par des flèches,
- mise en relation texte et graphique par le mot « onze » (puis « neuf »).

Il se trouve que le dessin de la version étiquettes est à l'échelle ce qui n'est pas tout à fait le cas de celui des baguettes. La version étiquettes présente une autre différence par rapport aux deux autres : la réponse doit être indiquée sur un schéma qui reprend une étiquette isolée alors que dans les deux autres problèmes ce sont des phrases à compléter. Nous avons voulu conserver le texte de l'évaluation nationale. Mais nous avons supprimé le qualificatif « réel » (supprimé dans l'exercice cercle / rectangle dans les évaluations, mot dont nous nous demandons dans quelle mesure il lève une ambiguïté pour les élèves : où est le réel ? dans le dessin qu'ils ont sous les yeux ou dans la réalité qu'ils doivent imaginer ?)

Modifications entre le pré-test et le test

Valeurs numériques et modalité rectangle

Entre le pré-test et le test, les valeurs numériques sont modifiées pour harmoniser les difficultés entre les trois problèmes et ne pas donner les mêmes nombres dans la même partie. Ceci implique de modifier le schéma de la version rectangle.

Nous avons tenté de choisir les mêmes difficultés numériques pour les trois problèmes :

nombre de bonbons par paquet	longueur d'une baguette	dimensions d'une étiquette
étoile: 15 bonbons : 5=3 bonbons	points : 20 cm : 5=4 cm	largeur : 15 cm : 5=3 cm
lune : 16 bonbons – (3 bonbons × 3)=7 bonbons	rayure : 15 cm– (4 cm×2)=7 cm	long. : 16 cm – (3 cm × 3)=7 cm

Modalités discret et baguettes

Pour les deux modalités discret et baguettes, ce sont uniquement les questions qui sont modifiées entre le test et le pré-test. Au pré-test, pour ne pas donner d'indication concernant l'ordre dans lequel les calculs doivent se faire, nous avons utilisé les formulations suivantes « Combien y a-t-il de bonbons dans chaque sorte de paquet ? », « Quelle est la longueur de chaque sorte de baguette ? ». L'examen des réponses au pré-test (les phrases à compléter ne sont pas modifiées entre le pré-test et le test) montre que nombre d'élèves ne complètent pas correctement les pointillés avec les qualificatifs : « lune », « étoile », « à rayures », « à points ». C'est pour cette raison que nous modifions la formulation des questions dans le test.

La nouvelle formulation aurait pu être utilisée pour la version étiquettes. Nous aurions pu élaborer une version du problème étiquettes plus proche de la présentation des deux autres problèmes : utiliser les questions *Quelle est la longueur d'une étiquette ? Quelle est la largeur d'une étiquette ?*, supprimer le mot dimensions qui peut être problématique, etc.

Signalons que pour le test, l'ordre des questions est inverse de l'ordre de résolution pour les versions paquets et baguettes alors qu'il dépend de la lecture du dessin pour la version étiquette. Nous avons vu, dans l'analyse des évaluations d'entrée en $6^{ème}$, que l'exercice est beaucoup mieux réussi lorsque les questions sont posées l'une après l'autre. Dans le pré-test, nous cherchons une formulation qui n'induit pas d'ordre pour la résolution. Malheureusement pour nous, notre dispositif ne fonctionne pas car trop élèves ne comprennent pas ce qu'on

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

attend d'eux. Pour la suite, comme nous ne voulons pas « piéger » les élèves et que nous ne voulons pas non plus leur « mâcher » le travail, en posant les questions dans l'ordre inverse de la résolution mais en laissant ouvert l'ordre de résolution (phrases à compléter), nous espérons proposer un compromis acceptable.

Techniques de résolution

La résolution de ces problèmes ne nécessite pas de calcul écrit. Ils peuvent néanmoins apparaître. Par ailleurs, les relations entre les nombres permettent de voir « une multiplication » plutôt qu'une division pour le calcul de la première variable.

Durée

	paquets	baguettes	étiquettes
Pré-test	4 min	4 min	4 min
Test	4 min	3 min45	4 min
Évaluation nationale			3 min 30 s

Les versions paquets et étiquettes doivent être proposées lorsque la règle n'est pas disponible.

- Les problèmes de déplacement (ou de distances sur une route)

Intention

L'origine de cette série de problèmes se trouve à deux endroits :

- c'est d'abord la consultation des manuels anciens : avec les problèmes de déplacement, notamment ceux de Marijon 1947 CE1 (leçon 22) proposés dans une progression qui inclut un apprentissage de la production de schémas cotés ; la fréquence assez importante des problèmes de pancartes et la fréquence assez grande de schémas cotés qui représente des longueurs. On peut penser que ces problèmes obligent à « structurer quantitativement l'espace », on retrouve sans doute implicitement ces connaissances dans le repérage sur une droite. Elles y sont alors souvent de façon peut-être plus formelle.
- ce sont ensuite les évaluations d'entrée en 6ème : un problème de pancarte, mal réussi ; la faiblesse récurrente des résultats aux problèmes qui mêlent longueur et durée, faiblesse qu'il ne semble pas raisonnable d'attribuer seulement au calcul sur les nombres sexagésimaux ; les résultats difficiles à interpréter à propos de la lecture des opérations sur un schéma coté.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Un schéma coté ne constitue pas véritablement une modalité de formulation des problèmes de déplacement. Néanmoins, nous incluons dans cette série un problème de longueur posé sur un schéma coté car il nous semble qu'interpréter en termes d'opérations une représentation linéaire de l'espace est un moyen précieux pour résoudre les problèmes de déplacement à condition de savoir produire ces schémas, même si ce n'est pas indispensable pour résoudre des problèmes.

En proposant ces exercices nous voudrions voir comment ils réagissent face à ces situations dont nous faisons l'hypothèse qu'elles sont relativement peu travaillées en classe sans pour autant en être véritablement absentes.

Premières variables

Le registre des énoncés

Nous décidons donc de proposer trois problèmes isomorphes : l'un formulé uniquement avec un texte (appelé exercice « texte » ou « Sam et Linda »), un deuxième formulé avec des panneaux indicateurs accompagnés d'un court texte (appelé exercice « pancartes »), un troisième formulé avec schéma accompagné d'un court texte (appelé exercice « schéma »).

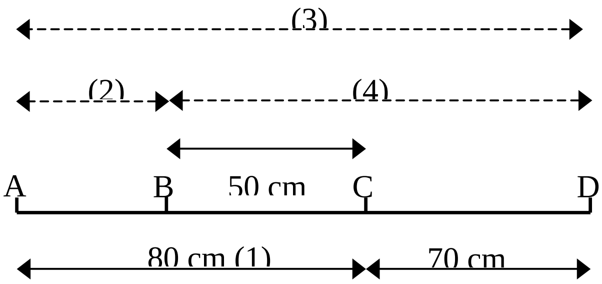
La structure des problèmes

Les trois énoncés décrivent une situation avec des positions relatives ou des longueurs. Il faut faire des inférences pour déterminer quatre autres longueurs. Dans les trois exercices, les trois dernières longueurs appellent un calcul, mais pas la première. Ce choix qui doit nous permettre de repérer si les élèves interprètent convenablement l'énoncé est susceptible d'en perturber certains. À chacun des exercices, on peut associer un des quatre schémas de la page suivante (les numéros correspondent à l'ordre des questions pour les longueurs à déterminer).

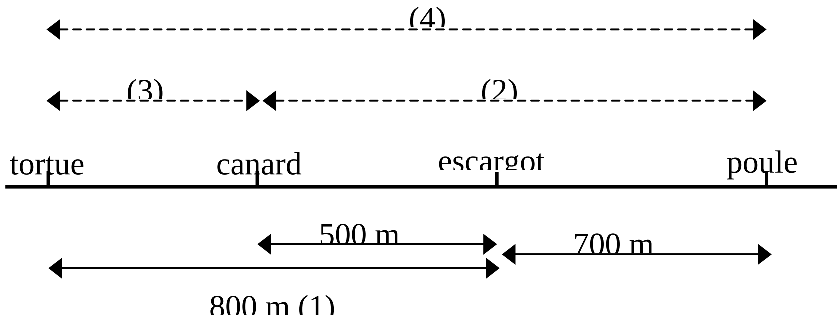
tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

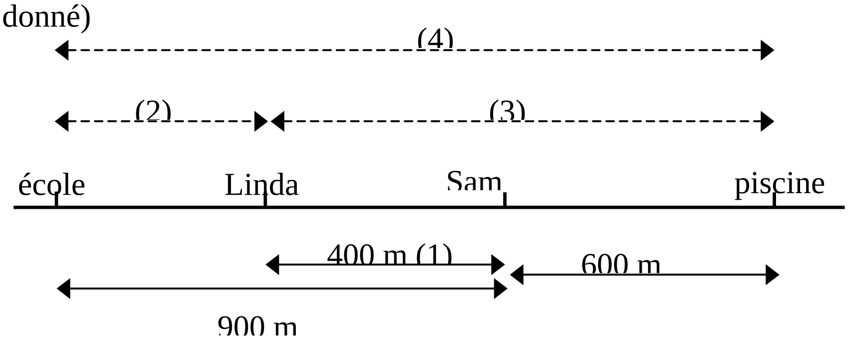
Pré-test, schéma (donné)



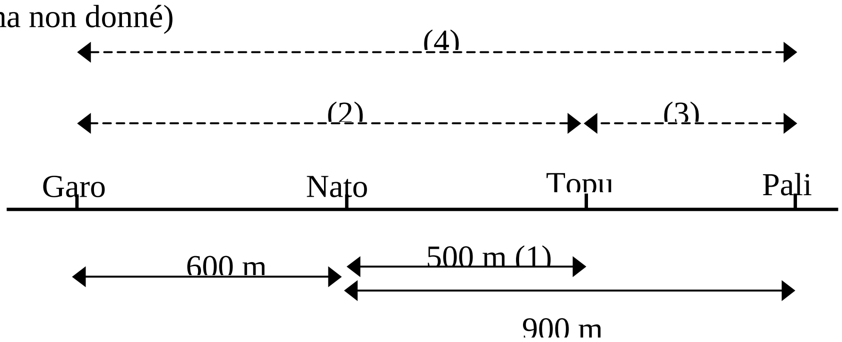
Test, schéma (donné)



Test, texte (schéma non donné)



Test, pancartes (schéma non donné)



tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Les nombres et les relations entre eux

En nous inspirant de ce que nous avons observé pour l'enseignement ancien nous avons choisi de mettre des nombres assez grands qui permettent des calculs faciles. Nous choisissons les nombres de « 1 chiffre suivi de zéros ». Nous pensons qu'ils pourraient favoriser l'utilisation plus ou moins explicite des opérations (même si elles ne sont pas écrites) au détriment du comptage de 1 en 1 par exemple s'il s'agissait des « mêmes » nombres sans leurs zéros.

Ce sont sensiblement les mêmes relations arithmétiques qui sont engagées dans les quatre exercices du pré-test et du test comme on peut le voir sur les schémas. Il y a une retenue lorsqu'il faut calculer chacune des deux sommes, il n'y a pas de retenue pour les soustractions.

Énoncés des exercices

Deux des trois exercices sont modifiés entre le pré-test et le test. Seul un des prénoms du problème est modifié pour l'exercice déplacement. Nous donnons donc la seule version finale du texte. Par ailleurs, au test, cet exercice est décliné sous deux formes : l'une comporte en plus de l'autre une amorce de schéma coté de l'énoncé.

texte sans schéma : De (ex 3)	texte avec schéma : De
Linda et Sam partent de l'école en même temps et vont à la piscine en prenant la même route. Linda marche lentement. Sam court. Au bout de dix minutes : Sam a parcouru 900m, il est à 600m de la piscine et Linda est à 400m de Sam. Quelle est la distance entre Sam et Linda au bout de dix minutes ? A quelle distance de l'école, Linda est-elle au bout de dix minutes ? A quelle distance de la piscine, Linda est-elle au bout de dix minutes ? Quelle est la distance entre l'école et la piscine ? échelle : 0,45	Linda et Sam partent de l'école en même temps et vont à la piscine en prenant la même route. Linda marche lentement. Sam court. Au bout de dix minutes : Sam a parcouru 900m, il est à 600m de la piscine et Linda est à 400m de Sam. Ecole Piscine Quelle est la distance entre Sam et Linda au bout de dix minutes ? A quelle distance de l'école, Linda est-elle au bout de dix minutes ? A quelle distance de la piscine, Linda est-elle au bout de dix minutes ? Quelle est la distance entre l'école et la piscine ?

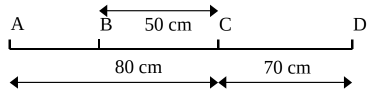
pancarte : Pa (ex 14)

Sur une route, à Nato, on voit une pancarte :

Nato		
Pali	**900 km**	→
Garo	**600 km**	←
Topu	**500 km**	→

Quelle est la distance entre Nato et Topu ?
Quelle est la distance entre Garo et Topu ?
Quelle est la distance entre Pali et Topu ?
Quelle est la distance entre Pali et Garo ?

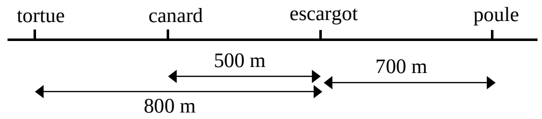
Schéma : 15 au pré-test



Quelle est la distance entre A et C ?
Quelle est la distance entre A et B ?
Quelle est la distance entre A et D ?
Quelle est la distance entre B et D ?

Schéma : Sc (ex 15)

Sur un chemin, il y a quatre animaux : un escargot, une tortue, une poule et un canard.



Sur le chemin, quelle est la distance entre la tortue et l'escargot ?
Sur le chemin, quelle est la distance entre le canard et la poule ?
Sur le chemin, quelle est la distance entre la tortue et le canard ?
Sur le chemin, quelle est la distance entre la tortue et la poule ?

La formulation des questions diffère un peu pour l'exercice texte. Pour le schéma et les pancartes, on a « Quelle est la distance entre *deux lieux* ? ». On retrouve cette formulation pour les questions 1 et 4 du problème texte. En revanche, pour les questions 2 et 3 nous avons : « A quelle de distance d'*un lieu* est *une personne* ? ».

Modifications entre le pré-test et le test

Modalité schéma

Dans la forme, les cotes et les flèches ne sont pas placées au même endroit au pré-test et au test pour cause de confusion probable dans la lecture au pré-test. Au test, tout apparaît sous le trait.

L'unité a été modifiée : au pré-test, plusieurs élèves indiquent 1 m pour la distance entre A et C. Est-ce l'unité qui favorise cette réponse ou bien les proportions du dessin ? Pour le test nous supprimons les centimètres et prenons des nombres de 3 chiffres comme pour les deux autres exercices du groupe. Par ailleurs, nous modifions un peu les proportions relatives pour voir si la réponse 1000 m comme distance entre la tortue et l'escargot est anecdotique ou récurrente quand les proportions du dessin indiquent que le canard est à égale distance de la tortue et de l'escargot.

En outre, nous modifions l'histoire : d'un contexte géométrique, nous passons à un contexte « concret ». Ceci permet d'harmoniser les contextes entre les trois exercices : une route.

Modalité texte

La seule modification se trouve dans le remplacement du prénom Sacha par Sam. Sacha devient Sam pour que le pronom « il » lui soit plus facilement attribué.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Durée et ordre de passation

	déplacement	schéma	pancarte
Pré-test	4 min 30 s	3 min 30 s	4 min
Test	4 min 30 s	3 min	3 min

Pour le test, la version schéma doit être réalisée sans règle graduée.

3.6. La passation des épreuves

- Le protocole

Nous décidons de donner des top départ et fin pour chaque exercice avec des temps de repos. Nous avons d'abord envisagé de séquencer la passation par page (par groupes de deux ou trois exercices) en donnant pour chaque page le cumul du temps prévu pour les exercices de la page (ce qui allège la conduite de la passation pour le meneur et pourrait être moins stressant pour les élèves), nous l'avons fait dans une classe et avons abandonné cette modalité. En effet, dans cette classe, il nous est apparu que nombre d'élèves passaient une grande partie du temps disponible sur le premier exercice de la page, voire n'abordaient même pas les exercices suivants.

Selon les classes, en fonction de la volonté de l'enseignant de la classe (qui semble être déterminée principalement par ce qu'il pense de la durée de concentration dont sont capables ses élèves), les deux séries ne sont pas succédé de la même façon :

- les deux séries sont enchaînées avec une pause de 5 minutes entre les deux (modalité **enchaîné**),
- les deux séries ont lieu dans la même demi-journée avec la récréation éventuellement suivie d'une activité entre les deux (modalité **pause**),
- les deux séries ont lieu au cours de deux demi-journées différentes espacées d'au plus une semaine. Nous demandons, dans ce cas, aux enseignants de ne pas revenir sur les exercices entre les deux séries. Entre les deux séances, les élèves n'ont pas de traces écrites de ce qu'ils ont fait, en revanche l'enseignant dispose d'un énoncé vierge. (modalité **séparé**)

Par ailleurs, les classes 1 et 2 ont eu des énoncés différents pour deux exercices (type de test : 1).

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

- Les classes

Les classes sont prises dans deux circonscriptions de l'Essonne avec des modalités différentes. Sur recommandation nominative de l'inspecteur, dans l'une (COR). Nous avons demandé des classes : de type « bon niveau », « mélangé », « faible ». Dans l'autre (SAI), après accord de l'inspecteur de travailler sur la circonscription, nous prenons contact directement avec les écoles. Pour cette circonscription, nous disposons des résultats des évaluations d'entrée en 6ème pour l'année qui avait précédé le test.

Les circonscriptions sont : très urbanisée pour COR, urbanisée pour SAI (une partie très urbanisée, une autre faite de villages qui ont beaucoup grossi, écoles MAL et BOU).

circo	classe	école	instit	milieu	type test	passation	élèves : de à	
COR		FER	SEV	Centre Ville	Pré-test	Enchaîné		
COR	1	NAC	PER	ZEP	Test 1	Séparé	101	123
COR	2	PIC	OZA	ZEP	Test 1	Séparé	201	224
SAI	3	BOU	BEL (DIN1)	Centre Ville	Test 2	Séparé	301	329
SAI	4	BOU	DIN2 DIN1	Centre Ville	Test 2	Séparé	401	412
SAI	5	JAU	SON	REP	Test 2	Séparé	501	526
SAI	6	JAU	BUR	REP	Test 2	Séparé	601	611
SAI	7	BOU	LOR (DIN2)[57]	Centre Ville	Test 2	Séparé	701	728
COR	8	PAU	BER	Mélangée	Test 2	Enchaîné	801	828
SAI	9	MAL	GIR	Centre Ville	Test 2	Pause	901	931
SAI	10	PER	BAY	ZEP	Test 2	Séparé	1001	1020
COR	11	FER	GER	Centre Ville	Test 2	Pause	1101	1125
SAI	12	MAC	GAU	ZEP	Test 2	Séparé	1201	1220

Tous les élèves de CM2 des écoles FER, JAU, BOU et PER ont participé à l'une des deux épreuves : test ou pré-test. Au total ce sont 277 élèves qui ont passé le test.

- Les versions du questionnaire

Compte-tenu du changement de modalité de passation pour la première série d'exercices, dans la classe 1, nous verrons au cours de l'analyse si nous retenons ou non les exercices pour cette classe. Ce sera le nombre d'élèves qui n'a pas traité un exercice donné qui déterminera si nous le retenons ou pas.

[57] Pour la passation la classe DIN qui est le niveau CM2 d'un cours double CE2/CM2 est répartie dans les deux autres CM2 de l'école.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Nous avons vu que dans les classes 1 et 2, les exercices mmTr et allR n'ont pas le même énoncé que dans les autres (présence d'une case à cocher). Nous excluerons ces classes pour l'analyse de ces deux exercices.

- Ordre des exercices pour le test

Compte-tenu des contraintes liées à la présence ou à l'absence de la règle, de notre volonté d'alterner le discret et le continu, de ne pas toujours commencer par l'un ou l'autre dans nos séries, d'alterner les opérations, de répartir les exercices en deux parties de durées sensiblement égales (voire lorsqu'il n'y a que deux exercices d'un type, de les mettre dans des parties différentes), nous sommes arrivée à la répartition suivante. Le rang est codé comme suit : les exercices dont les codes sont du type 1XX sont posés dans la première série : avec règle, ceux étiquetés 2XX sont posés dans la deuxième série, sans règle, XX correspond au rang au sein de la première ou deuxième partie.

rang	Titre complet	Abréviation
101	Soustraction Texte LonGueur	STLg
102	Partition DIScret	Pdis
103	Multiplication sur objet, Longueur	MLg
104	Nombre de Centaines en COntexte	ncCo
105	DEplacement, texte	De
106	Soustraction Schéma Case à cocher LonGueur	SSCLg
107	4 OPérations Discret (paquets)	4opD
108 a	Chiffre des Dizaines FOrmel	cdFo
108 b	Nombre de Centaines FOrmel	ncFo
109	DIstance entre les pancartes	diPa
110	Quotition LOngueur	QLg
111	kilogrammes en HectoGrammes en COntexte	hgCo
112	rALLonger avec la Règle	allR
113	MilliMètres en centimètres TRacé	mmTr
201	déplacement SChéma	Sc
202	rALLonger avec la Bande	allB
203	4 OPérations LonGueur (baguettes)	4opL
204	Quotition DIScret	Qdis
205 a	KiloGrammes en Grammes FOrmel	kgFo
205 b	MilliMètres en centimètres FOrmel	mmFo
205 c	kilogrammes en HectoGrammes FOrmel	hgFo

rang	Titre complet	Abréviation
206	déplacement PAncartes	Pa
207	Partition LonGueur : Texte ou Schéma	PLg (PTLg, PSLg)
208	Soustraction DIScret	Sdis
209	4 OPérations Rectangle (étiquettes)	4opR
210	Soustraction Schéma LonGueur	SSLg
211	MilliMètres en centimètres en COntexte	mmCo
212	Multiplication sur objet, DIScret	Mdis

Par série : récapitulation de la correspondance entre le rang et l'abréviation

centaine à millier	ncCo	cdFo	ncFo	hgCo	kgFo	HgFo
	104	108 a	108 b	111	205 a	205 c
millimètre à centimètre	MmTr	mmFo	mmCo			
	113	205 b	211			
division	Pdis	QLg	Qdis	PLg		
	102	110	204	207		
soustraction	STLg	SSCLg	diPa	Sdis	SSLg	
	101	106	109	208	210	
soustraction sur objet	allR	allB				
	112	202				
multiplication sur objets	MLg	Mdis				
	103	212				
quatre opérations	4opD	4opL	4opR			
	107	203	209			
déplacement	De	Sc	Pa			
	105	201	206			

4. Conclusion

Nous avons voulu élaborer un questionnaire qui imbrique les grandeurs et les nombres, destiné à des élèves d'aujourd'hui. Ceci semble possible en intégrant des pratiques sociales d'aujourd'hui, celles d'hier étant en partie caduques.

L'étude des théories nous a permis de concevoir des tâches qui impliquent des opérations sur les objets et qui n'existent probablement pas dans l'enseignement actuel. L'étude de l'enseignement ancien nous a permis de comprendre notamment comment les pratiques sociales pouvaient intervenir dans la conception des problèmes. Pour l'étude du système

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

métrique nous avons utilisé les unités usuelles pour évoquer les pratiques sociales et des unités usuelles et théoriques pour les tâches formelles.

Dans les exercices retenus pour le test, nous n'avons utilisé que très marginalement le levier fourni par les pratiques langagières spécifiques aux différentes grandeurs même si nous l'avons évoqué dans l'étude préalable à l'élaboration du questionnaire. Même si nos problèmes sont formulés avec des mots et que ces mots dépendent quand même des contextes choisis qui dépendent eux-mêmes des grandeurs, nous avons essayé d'utiliser un vocabulaire le plus accessible possible en éliminant justement tout ce qui nous semblait le plus technique. C'est là qu'on trouve pourtant les grandeurs. Le seul terme technique que nous avons utilisé (en conscience) est l'expression « bout à bout » caractéristique de la longueur. Cette question du vocabulaire est assurément un moyen complémentaire, à l'utilisation des instruments par exemple, pour créer des situations qui impliquent les grandeurs.

En supprimant la règle graduée, nous avons neutralisé le mesurage pour les exercices avec schéma. Le mesurage semble en effet être une réponse courante dès lors qu'il s'agit de calculer une longueur et qu'on a une représentation schématique ou dessinée de ce qu'on cherche. Même sans classe test, peut-on voir un effet sur les réponses des élèves ? Le mesurage n'est néanmoins pas la seule réponse inadaptée couramment observée : une sorte de proportionnalité en acte semble être utilisée massivement à tort dans certains cas. Que se passe-t-il quand on supprime la règle graduée aux élèves ?

Nous avons élaboré plusieurs groupes d'exercices :

- sur les relations entre système métrique et numération du point de vue d'un ordre d'unités ; au sein de l'étude du système métrique, sur les relations entre tâches formelles et pratiques sociales évoquées ou effectives. Nous voulons voir si les élèves procèdent de la même façon pour résoudre les problèmes de numération et de système métrique. Nous voulons aussi voir si les élèves sont capables de mobiliser leurs connaissances formelles pour résoudre des « problèmes concrets »,
- sur des problèmes simples de division, sur des problèmes de soustractions, opérations inverses, introduites bien après les opérations directes. Nous avons varié les grandeurs dans chaque série. Observe-t-on un effet de la grandeur sur la réussite des élèves ? Observe-t-on un effet quand on pose le « même » problème sous la forme d'un texte et d'un schéma ? Peut-on repérer des phénomènes qui pourraient s'interpréter par l'introduction « tardive » de ces opérations ?

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

- sur des problèmes qui comportent des opérations sur objets. Nous avons abandonné notre hypothèse que l'addition des objets était totalement étrangère aux élèves, en revanche nous voulons savoir si on peut repérer des différences, dans la réussite des élèves, entre le discret et la longueur et entre grandeurs mesurées et non mesurées,
- sur des problèmes de déplacement. Les élèves sont-ils capables d'appréhender l'espace à partir d'un texte, à partir de « pancartes » pour résoudre les problèmes quantitatifs de déplacement ? Le schéma coté est-il disponible quand il s'agit de résoudre de tels problèmes ?
- sur des problèmes avec plusieurs opérations. La grandeur retenue pour le problème (discret, longueur dans différents contextes) a-t-elle une incidence sur la réussite des élèves ?

Même si nous avons quelques idées quant aux réussites globales qu'on peut attendre pour certains exercices, pour d'autres nous n'en n'avons pas la moindre. Par ailleurs, nos études préalables ne nous permettent d'entrevoir que de façon très floue les relations qui peuvent exister entre les réussites et les échecs à des exercices que nous avons considérés comme « proches ». La plupart du temps nous avons formulé des hypothèses sur les techniques que les élèves sont susceptibles d'utiliser. D'autres techniques apparaissent-elles ? Dans quelles proportions les différentes techniques sont-elles utilisées ? Ces questions seront étudiées dans le prochain chapitre, au vu des résultats.

Chapitre 5. Analyse des résultats au questionnaire

Dans ce chapitre, nous étudions les résultats du questionnaire. Nous faisons une étude statistique des réponses aux différentes questions. Nous croisons les réponses à différents exercices qui évaluent la « même » connaissance dans des contextes différents. De façon générale, nous étudions les réponses en termes absolus mais surtout en termes relatifs. Tel exercice est bien ou mal réussi ? Par rapport à tel exercice qui évalue la même connaissance dans un contexte différent, tel exercice est-il mieux réussi que les autres ? Observe-t-on les mêmes techniques de résolution dans les différents contextes ? Quelles sont les différences qu'on observe ?

Du fait que nous avons exploré un territoire assez vaste, nous obtenons des résultats dans des directions assez diverses et beaucoup de questions : à propos de l'interprétation des schémas cotés, sur les rapports entre système métrique et numération, sur la permanence des procédures non définitives dans l'étude des opérations inverses (soustraction, addition) et sur l'opportunité d'introduire plus ou moins précocement un symbolisme pour la division, sur l'apprentissage des opérations sur les objets, sur l'impact des grandeurs dans la résolution d'un problème. Certaines de ces questions renvoient à l'écologie, d'autres relèvent peut-être davantage d'un point de vue cognitif.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

1. Introduction, questions, méthodologie

Dans le chapitre précédent, nous avons élaboré un questionnaire. Nous cherchons à repérer si les élèves en fin de scolarité primaire sont capables d'utiliser conjointement leurs connaissances relatives aux grandeurs et aux nombres. Nous avons fait passer ce questionnaire à 277 élèves. Dans ce chapitre, nous en analysons les réponses.

- ## Questions

Nous cherchons à étudier les questions suivantes.

À propos de la numération et du système métrique, les élèves procèdent-ils de la même façon lorsqu'il s'agit de résoudre un problème de numération ou de système métrique ? Sont-ils capables de mobiliser leur connaissances formelles de numération ou de système métrique pour résoudre des « problèmes concrets » ?

À propos du sens des opérations. Observe-t-on un effet de la grandeur sur la réussite des élèves ? Observe-t-on une différence dans la réussite des élèves quand le « même » problème est proposé sous la forme d'un schéma et sous la forme d'un texte ? Peut-on repérer des phénomènes qui pourraient s'interpréter par l'introduction « tardive » de certaines opérations, des opérations inverses (soustraction et division) notamment ? À propos des problèmes qui comportent des opérations sur objets, peut-on repérer des différences, dans la réussite des élèves, entre le discret et la longueur et entre grandeurs mesurées et non mesurées ? À propos des problèmes de déplacement, les élèves sont-ils capables d'appréhender l'espace à partir d'un texte, à partir de « pancartes » pour résoudre des problèmes de calculs de longueur ? Les schémas cotés sont-ils disponibles quand il s'agit de résoudre de tels problèmes ?

- ## Méthode

Traitement des données

Pour procéder aux analyses nous avons procédé en plusieurs temps.

Nous avons dépouillé les productions des élèves en repérant la réponse, ainsi que la technique utilisée (à défaut nous avons noté qu'elle n'était pas visible). Ce premier travail nous a permis de repérer des catégories de réponses ainsi que des catégories de procédures utilisées.

Pour les problèmes de numération et de système métrique en particulier, nous avons aussi défini une réussite globale à partir des réponses ou des procédures, nous indiquons comment nous procédons pour chaque exercice. Nous utilisons cette variable pour réaliser une analyse factorielle.

Nous avons aussi noté si les élèves barraient des réponses. Ceci nous permet parfois de reconstruire des démarches.

En cas de réponse et de procédures contradictoires dont l'une est correcte, nous avons retenu la réponse ou la procédure correcte. Nous faisons en fait l'hypothèse que l'élève est revenu sur ce qu'il a fait en premier et qu'il n'a pas eu le temps de (ou pas pensé à) barrer ce qui est faux.

Nous avons également noté si les élèves produisaient des schémas cotés. En fait, ces schémas sont très rares (moins de 3% même pour les exercices de déplacement), nous ne les avons pas exploités, néanmoins ceci constitue un résultat.

Pour le traitement des données, nous avons utilisé deux logiciels de statistiques : le logiciel SPAD pour les analyses factorielles et une partie des statistiques descriptives, le logiciel SPSS pour les différents tests et une autre partie des statistiques descriptives.

Les élèves et les classes ayant répondu partiellement au questionnaire.

Quelques élèves ont été absents à une des deux parties du test. Nous avons inclus, dans les analyses, les résultats que nous avions pour eux. Nous avons signalé à la fin du chapitre précédent que les classes 1 et 2 ont eu une version du questionnaire qui a conduit à la modification de deux exercices pour les classes suivantes, nous avons exclu de l'analyse les résultats de ces deux classes aux deux exercices concernés. Par ailleurs, nous avons signalé la modalité de passation différente dans la classe 1 pour la première partie du questionnaire. Nous avons partiellement retenu les exercices concernés.

▪ Rappel de la correspondance entre le nom d'un exercice, son abréviation, son rang et son groupe

Pour chaque exercice, nous redonnerons au fur et à mesure ces informations.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Groupe	Titre complet	Rang	Abréviation
centaine à millier	Nombre de Centaines en COntexte	104	ncCo
	Chiffre des Dizaines FOrmel	108 a	cdFo
	Nombre de Centaines FOrmel	108 b	ncFo
	kilogrammes en HectoGrammes en COntexte	111	hgCo
	KiloGrammes en Grammes FOrmel	205 a	kgFo
	kilogrammes en HectoGrammes FOmel	205 c	hgFo
millimètre à centimètre	MilliMètres en centimètres TRacé	113	mmTr
	MilliMètres en centimètres FOrmel	205 b	mmFo
	MilliMètres en centimètres en COntexte	211	mmCo
division	Partition DIScret	102	Pdis
	Quotition LOngueur	110	QLg
	Quotition DIScret	204	Qdis
	Partition LonGueur : Texte ou Schéma	207	PLg (PTLg, PSLg)
soustraction	Soustraction Texte LonGueur	101	STLg
	Soustraction Schéma Case à cocher LonGueur	106	SSCLg
	Soustraction DIScret	208	Sdis
	Soustraction Schéma LonGueur	210	SSLg
	DIstance entre les pancartes	109	diPa
soustraction sur objet	rALLonger avec la Règle	112	allR
	rALLonger avec la Bande	202	allB
multiplication sur objet	Multiplication sur objet, Longueur	103	MLg
	Multiplication sur objet, DIScret	212	Mdis
déplacement	DEplacement, texte	105	De
	déplacement SChéma	201	Sc
	déplacement PAncartes	206	Pa
quatre opérations	4 OPérations Discret (paquets)	107	4opD
	4 OPérations LonGueur (baguettes)	203	4opL
	4 OPérations Rectangle (étiquettes)	209	4opR

À quelques modifications près, nous reprenons pour la présentation des résultats l'ordre que nous avons retenu pour la présentation de l'élaboration du test.

2. Les résultats en numération et système métrique

Nous avons deux groupes d'exercices pour l'étude de la numération et du système métrique : le premier concerne la relation de centaine à millier, le deuxième la relation entre millimètres et centimètres.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

2.1. Le groupe des exercices sur le nombre de centaines et les milliers

ncCo	Nombre de Centaines en COntexte	104
cdFo	Chiffre des Dizaines FOrmel	108 a
ncFo	Nombre de Centaines FOrmel	108 b
hgCo	kilogrammes en HectoGrammes en COntexte	111
kgFo	KiloGrammes en Grammes FOrmel	205 a
hgFo	kilogrammes en HectoGrammes FOmel	205 c

- Nombre de Centaines en COntexte (ncCo)

Énoncé et variables

> Pour faire les photocopies de l'école, il faut 8564 feuilles de papier. Les feuilles sont vendues par paquets de 100. Combien de paquets faut-il acheter ?

A cet exercice sont associées quatre variables : la première code les réponses détaillées des élèves (RepncCo), la deuxième la procédure visible – à défaut elle indique si la réponse est juste (RRPncCo), la troisième (RncCo) indique une réussite cumulée.

Codages et effectifs pour les réponses détaillées à ncCo (RepncCo)

Nombreux sont les élèves qui donnent une réponse « à un près ». La variable « RepncCo » permet de les repérer et quantifier la présence de ces réponses. À ces réponses « à un près », nous adjoignons les réponses « à dix près », il s'agit d'élèves qui utilisent probablement la relation entre centaines et milliers mais ne semblent pas prendre complètement en considération le chiffre des centaines : il répondent 80 ou 90.

RepncCo	réponses détaillées à ncCo	Effectif	%/Expr.	RncCo
R	86, réponse attendue	51	18,68	41,76% (eff=114)
Rmax	86 paquets et il restera 36 feuilles	4	1,47	
RPd	85,64 ; quotient décimal	7	2,56	
Rpi	85, quotient de la division euclidienne ou nombre de centaines dans 8564	32	11,72	
RPm	85 paquets et 64 feuilles, quotient et reste de la division euclidienne	13	4,76	
Rpu	85 reste 64, quotient de la division euclidienne et reste mal interprété (comme des feuilles qui *restent*)	7	2,56	
80	80 ou 90, réponse à la dizaine de centaine près (troncature ou ajustement)	7	2,56	
9999	Autre réponse fausse	54	19,78	
99999	Absence de réponse	98	35,90	
	total	273	100,00	

On note qu'environ 20% des élèves donnent une bonne réponse (R ou Rmax). En revanche, si on leur ajoute les réponses à 1 près et les réponses décimales, on obtient autour de 40% (RncCo). On note un nombre important d'absence de réponse : plus du tiers des élèves.

Codage et effectifs pour les procédures à ncCo (RRPncCo)

La variable RRPncCo repère les procédures ainsi que les réponses justes (au sens de RncCo) sans procédure. Tous les codes d'opérations s'entendent : avec ou sans indication de résultat, indépendamment de la justesse de ce résultat éventuel. Dans le tableau des effectifs qui suit le tableau des procédures, nous indiquons la part (par rapport à l'effectif total) de ceux qui réussissent en utilisant telle ou telle procédure.

RRPncCo	Procédures pour ncCo ou réponse juste sans procédure
R sans	Réussite à 1 près ou quotient décimal (85,64) sans procédure visible
d ligne	Division en ligne
d posee	Division posée
m	Multiplication : 85×100 (ou 86×100), en ligne ou posée. Nous n'avons pas distingué les deux multiplications en ligne et posée. La présence de l'une d'entre elle, indique en effet probablement que l'élève a utilisé l'écriture chiffrée de 8564 pour trouver 85 ou 86 (le nombre de centaines).
p80	Procédure utilisant le nombre de centaines dans 8 milliers, qu'elle soit menée à terme ou non (inclut les réponses 80 sans procédure, cf. supra)
perso fois 100	Procédure manifestant une certaine compréhension du problème et un premier traitement quantitatif : dessins de plusieurs paquets de 100, multiplication à trou (…×100=8564), addition itérée de 100, essais de multiplications par 100 de nombres plus ou moins grands
num	Présence d'une décomposition selon les ordres de la numération : 8000+500+60+4, par exemple
aom	Présence de la multiplication : 8564×100
ao	Présence d'une autre opération fausse
9999	Réponse fausse sans procédure visible
99999	Absence de réponse et de procédure

RRPncCo	Effectif	%/Expr.	Effectif réussite	%réussite /expr	RncCo
R sans	29	10,62	29	10,62	
d ligne	9	3,30	6	2,20	
d posee	90	32,97	47	17,22	41,76%
m	30	10,99	23	8,42	(eff=114)
p80	12	4,40	4	1,47	
perso fois 100	24	8,79	5	1,83	

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

RRPncCo	Effectif	%/Expr.	Effectif réussite	%réussite /expr	RncCo
num	2	0,73			
aom	25	9,16			
ao	21	7,69			
9999	19	6,96			
99999	12	4,40			
Total	273	100,00			

On note donc qu'environ 10% des élèves donnent une réponse juste sans procédure, 10 autres pour cent écrivent une multiplication. Ces derniers doivent en fait lire « 85 » dans l'écriture chiffrée avant d'écrire leur calcul ce qui n'est peut-être pas le cas de ceux qui écrivent une division en ligne. Parmi ceux qui n'écrivent rien et qui réussissent, certains calculent sans doute mentalement une division par 100 quand d'autres lisent directement 85. Par ailleurs, on peut dire que près des trois quarts des élèves qui réussissent écrivent soit une multiplication, soit une division. Près de 10% des élèves utilisent une même procédure erronée : la multiplication 8564×100. Par ailleurs, le fort taux de non réponse signalé pour RepncCo ne se retrouve pas dans cette variable RPncCO. Ceci signifie que nombre d'élèves écrivent quelque chose et ne concluent pas.

Près du tiers des élèves posent une division par 100. Nous retrouvons là un phénomène repéré dans (Parouty, 2005).

Le faible taux de division en ligne peut peut-être s'expliquer par le fait que le quotient est décimal et demande une interprétation pour conduire à une réponse au problème. En fin de CM2, les élèves ont appris les divisions décimales par les puissances de dix en ligne. Ils ont sans doute appris, en même temps ou avant, celles dont le reste est 0, qu'en est-il des divisions par les puissances de 10 dont le reste n'est pas nul ? Ces procédures de calcul sont-elles utilisées pour résoudre de « petits problèmes » ?

La programmation actuelle de l'étude de la division ne permet probablement pas qu'on enseigne au CE1 ou CE2 les divisions par les puissances de 10. Dans l'enseignement ancien, ces divisions sont distinguées de l'étude de la numération, elle viennent après. Parfois on distingue les cas quotition et partition, sinon le plus souvent les exemples sont uniquement des cas de partition – peut-être cela signifie-t-il que le cas quotition est traité implicitement avec la numération.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Croisement des différents types de réponse « réussite » et des procédures.

Nous donnons maintenant un tableau des effectifs croisés entre les types de réussite et les procédures par lesquelles elles sont obtenues. Il s'agit donc uniquement des élèves qui ont donné une réponse correcte à 1 près.

	R sans	d ligne	d posee	m	p80	perso fois100	
R	14	3	12	15	4	3	51
Rmax	2			2			4
Rpd	3	1	3				7
Rpi	4	2	23	1		2	32
Rpm	3		8	2			13
Rpu	3		1	3			7
total	29	6	47	23	4	5	114

À partir de ce tableau nous réunissons les procédures « justes » : R et R max.

	R sans	d ligne	d posee	m	p80	perso fois100	
R+Rmax	16	3	12	17	4	3	55
total	29	6	47	23	4	5	114
ratio	0,55	0,50	0,26	0,74	1,00	0,60	0,48

Ce croisement semble montrer que parmi les élèves que nous avons comptés en « réussite », ceux qui posent la division ont plus tendance que les autres à fournir une réponse erronée (décimale, pas d'ajustement du quotient ou mauvaise interprétation du reste). Ceci peut peut-être s'expliquer par le fait que ce calcul, difficile en fin de CM2, ne les laisse plus suffisamment disponibles pour ajuster le résultat de la division au contexte, contrairement aux procédures (sauf perso fois 100) qui sont plus économiques.

Il est possible que ces résultats plaident en faveur d'une introduction plus précoce de la division, c'est-à-dire du mot division et d'un symbolisme, sans nécessairement disposer de l'algorithme, de façon à acquérir les différentes facettes de son sens sur des calculs simples.

- nombre d'HectoGrammes en COntexte (hgCo)

Enoncé et variables

Combien de sachets de 100 g de farine peut-on remplir avec un sac de 4 kg de farine ?

De même que pour l'exercice précédent, à cet exercice sont associées trois variables : la première code les réponses détaillées des élèves (RephgCo), la deuxième la procédure

(RRPhgCo), la troisième la réussite brute (RhgCo) à l'exercice. Dans la deuxième variable, on adjoint à la description des procédures quelques couples « réponse –procédure » remarquables.

Codage et effectif des réponses détaillées à hgCo (RephgCo)

RephgCo	réponses détaillées à hgCo	Effectif	%/Expr.
R	40, réponse attendue	88	32,12
10	10, réponse susceptible de constituer un résultat intermédiaire, le nombre de paquets de 100 g dans 1 kg.	4	1,46
4	4, réponse éventuellement obtenue en considérant que 1 kg = 100 g	21	7,66
400	400, résultat probable du calcul de 4×100	12	4,38
4000	4000 ou 1000 (1 élève) : est susceptible de constituer un résultat intermédiaire, conversion de 4 kg ou 1 kg en grammes	27	9,85
9999	Autre réponse	67	24,45
99999	Absence de réponse	55	20,07
	total	274	100,00

Dans cet exercice, contrairement au précédent (ncCo), il n'y a pas à ajuster le quotient ou le nombre de centaines pour donner la bonne réponse. En revanche, il faut penser que les deux grandeurs ne sont pas exprimées dans la même unité et déterminer soit le rapport de ces deux grandeurs, soit convertir les deux dans la même unité – en grammes probablement –, puis faire une division ou lire le nombre de centaines en se repérant dans l'écriture chiffrée. Seulement le tiers des élèves réussit, ce qui est moins bien que pour ncCo. Près de 10% des élèves donnent le nombre de grammes dans 4 kg. Parmi les erreurs prégnantes, la réponse 4 correspondant soit à la reprise d'une donnée de l'énoncé, soit à une réponse réfléchie considérant de façon erronée que 1 kg=100 g.

Comment les élèves s'y prennent-ils pour répondre ? Nous présentons les procédures. Nous donnons les effectifs pour chaque procédure et en donnant la réussite pour chaque procédure.

Codage des procédures pour hgCo (RRPhgCo)

Tous les codes d'opérations s'entendent : avec ou sans indication de résultat, indépendamment de la justesse éventuelle de ce résultat.

RRPhgCo	procédures et couples « réponses – procédures – remarquables » pour hgCo
R sans	Réussite sans procédure visible.
R 1000	Réussite avec indication de la relation entre kg et g.
d ligne	Division en ligne

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

RRPhgCo	procédures et couples « réponses – procédures – remarquables » pour hgCo
d posee	Division posée
m	Multiplication : 40×100, en ligne ou posée. Nous n'avons pas distingué les deux multiplications en ligne et posée. La présence de l'une d'entre elles indique en effet probablement que l'élève s'est « repéré » dans les chiffres du nombre pour trouver « 40 ».
p10	Indication de la relation entre kg et centaine de grammes. Procédure qui aboutit ou non (inclut les réponses 10 sans procédure cf. supra).
4000	Réponse 4000 ou 1000 (1 élève), réponse susceptible de constituer un résultat intermédiaire, conversion de 4 kg ou 1 kg en grammes (cf. supra)
1 kg = 1000 g	Relation entre kg et g exprimée, sans autre élément de procédure, sans réponse.
tc	Présence d'un tableau de conversion, complété ou non, juste ou faux.
d4	Division de 100 par 4 ou bien la réponse 25.
1 kg = 100 g	Réponse 4 et relation fausse 1 kg = 100 g indiquée. Si cette relation fausse est exprimée avec d'autres éléments de procédure, elle n'apparaît pas dans le codage.
4	Réponse 4 sans élément de procédure, réponse éventuellement obtenue en considérant que 1 kg = 100 g
aom	Présence de la multiplication 4 × 100 ou réponse 400 sans procédure (cf. supra)
ao	Présence d'une autre opération fausse.
9999	Autre réponse ou procédure fausse
99999	Absence de réponse et de procédure visible

Lorsque *réponse* et *procédure* sont contradictoires et fausses toutes les deux, nous avons retenu la procédure. Lorsque l'un des deux éléments est juste, c'est ce qui est juste qui est retenu.

RPhgCo	Effectif	% / Expr.	Effectif réussite	%réussite /Expr.	RhgCo
R sans	46	16,79	46	16,79	
R 1000	4	1,46	4	1,46	
d ligne	9	3,28	6	2,19	32,12% (eff=88)
d posee	14	5,11	11	4,01	
m	25	9,12	18	6,57	
p10	7	2,55	3	1,09	
4000	27	9,85			
1 kg = 1000 g	9	3,28			
tc	2	0,73			
d4	31	11,31			
1 kg = 100 g	4	1,46			

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

RPhgCo	Effectif	% / Expr.	Effectif réussite	%réussite /Expr.	RhgCo
4	13	4,74			
aom	32	11,68			
ao	14	5,11			
9999	13	4,74			
99999	24	8,76			
Total	274	100,00			

On observe que la moitié des élèves qui réussissent n'écrivent pas de procédure. Parmi ceux qui réussissent, un élève sur 5 écrit la division 4000 : 100 (en ligne ou posée), de même pour la multiplication 40×100.

Parmi les réponses erronées remarquables, nous notons que plus de 10% des élèves divisent 100 par 4, ceci correspond probablement à la reconnaissance d'une situation de division mais les élèves la font « à l'envers ». Cette erreur peut s'expliquer de la façon suivante : ils ne voient pas la nécessité de convertir les deux masses dans la même unité et comme leur outillage mathématique ne semble pas leur permettre pas de diviser 4 par 100 (pourtant, au cycle 3 en calcul mental, on doit « multiplier ou diviser un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1000 » d'après les programmes de 2002), ils divisent 100 par 4 (ou bien ils pensent qu'on divise toujours le grand nombre par le petit nombre). Avec la même fréquence, on repère la réponse erronée qui consiste à multiplier les deux nombres : 100 et 4. Une procédure de même type était présente (avec une fréquence un peu plus faible) pour l'exercice ncCo. Deux élèves font un tableau de conversion. Ils ne parviennent pas à conclure.

Entre ncCo et hgCo, sur le plan quantitatif, le nombre de réussites sans procédure visible augmente (il passe grossièrement de 11% à 17%). Les procédures visibles (justes ou fausses) semblent assez stables, à l'exception des divisions posées qui chutent nettement (même si on leur ajoute les divisions de 100 par 4). Nous n'avons pas croisé les procédures aux deux exercices.

- Chiffre des Dizaines FOrmel (cdFo)et Nombre de Centaines FOrmel (ncFo)

Enoncé et variables

Complète chacune des lignes :
Le **chiffre des dizaines** de 6529 est ……..…
Le **nombre de centaines** de 8734 est ………

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

A chaque ligne de cet exercice sont associées deux variables : PcdFo et RcdFo pour la première, PncFo et RncFo pour la deuxième.

Pour cet exercice nous excluons la classe 1 dans laquelle 9 élèves n'ont répondu à aucune des deux questions.

Codage des réponses détaillées pour le chiffre des dizaines de 6529 (PcdFo) et effectifs

PcdFo	réponses détaillées pour cdFo	Effectif	%
R	2, réponse attendue	191	76,10
2X	réponse 20 ou 29	21	8,37
coumouu	Autre chiffre : celui des centaines, milliers ou unités	22	8,76
9999	Autre réponse fausse	14	5,58
99999	Absence de réponse	3	1,20
	total	251	100,00

RcdFo correspond aux réponses « R » de PcdFo.

On pouvait s'attendre à une réussite massive à cet exercice. Environ les trois quarts des élèves réussissent. Les autres ignorent-ils la position des dizaines ? On peut penser que non pour les 8% qui répondent 20 ou 29. Ces élèves semblent identifier correctement la position de « dizaines » mais ils donnent « un nombre » comme réponse.

Codage des réponses détaillées pour le nombre de centaines de 8734 (PncFo) et effectifs

PncFo	Réponses détaillées pour ncFo	Effectif	%
R	87, réponse attendue	53	21,12
7	7, cette réponse correspond au chiffre des centaines	116	46,22
7XX	réponse 700 ou 734	57	22,71
9999	Autre réponse fausse	22	8,76
99999	Absence de réponse	3	1,20
	total	251	100,00

RncFo correspond aux réponses « R » de PncFo.

Un peu plus d'un élève sur cinq répond correctement. Il faut noter que près d'un sur deux donne le chiffre des centaines et qu'environ un sur cinq donne une réponse du type de celle déjà repérée pour le chiffre des dizaines : 700 ou 734.

Le taux de réussite à cet exercice correspond à peu près au taux de réussite au problème en contexte, « sans procédure » auquel on aurait adjoint les élèves qui ont écrit la multiplication du nombre de centaines par 100. Une question importante est bien sûr de savoir si ce sont les mêmes élèves qui font cela. Nous n'avons pas croisé ces informations.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

- KiloGrammes en gramme (kgFo) et kilogrammes en HectoGramme (hgFo), FOrmel

Enoncé et variables

Complète chacune des lignes : 5 kg = ……………….g 8 kg = ……………….hg

Nous leur associons respectivement les variables : PkgFo (réponses détaillées) et RkgFo (réussite brute) d'une part et PhgFo et RhgFo d'autre part. Nous avons recensé les réponses et retenu les plus fréquentes.

Codage et effectifs des réponses détaillées pour la conversion de 5 kg en g, réussite.

PkgFo	réponses détaillées pour la conversion de 5 kg en g	Effectif	%	RkgFo
R	Réponse attendue, 5000 sans tableau de conversion	167	61,40	66,18% (eff=180)
Rtc	Réponse attendue, 5000 avec présence d'un tableau de conversion (complété ou non)	13	4,78	
1000 g	Réponse 1000 g, correspondant probablement à une sorte de résultat intermédiaire, le nombre de grammes dans 1 kilogramme.	4	1,47	
dec	Nombre décimal de la forme 5×10^{n} ($n\leq0$)	3	1,10	
500	Réponse fausse, 500	38	13,97	
5XXX	Autre réponse fausse pouvant s'écrire 5×10^{n} ($n\geq0$)	30	11,03	
9999	Autre réponse fausse	5	1,84	
99999	Absence de réponse	12	4,41	
		272	100,00	

A peine les deux tiers des élèves sont capables de donner dans un cadre formel la conversion de 5 kilogrammes en grammes. Peu d'entre eux semblent utiliser un tableau de conversion pour le faire. En revanche, un nombre important d'élèves, environ le quart, ne retient pas la bonne puissance de 10, le millier, pour convertir les kilogrammes en grammes.

Codage et effectifs des réponses détaillées pour la conversion de 8 hg en g et réussite.

PhgFo	réponses détaillées pour la conversion de 8 hg en g	Effectif	%	RhgFo
R	Réponse attendue, 80 sans tableau de conversion	182	66,91	70,96% (eff=193)
Rtc	Réponse attendue, 80 avec présence d'un tableau de conversion (complété ou non)	11	4,04	
dec	Nombre décimal de la forme 8×10^{n} ($n\leq0$)	11	4,04	
tc	Présence d'un tableau de conversion (éventuellement faux), avec réponse fausse ou sans réponse.	5	1,84	

PhgFo	réponses détaillées pour la conversion de 8 hg en g	Effectif	%	RhgFo
800	Réponse fausse, 800. Cette réponse peut correspondre à la conversion plus habituelle peut-être de 8 hg en g.	13	4,78	
9999	Autre réponse fausse	14	5,15	
99999	Absence de réponse (autres que tc)	36	13,24	
		272	100,00	

Le taux de réussite (plus de 70%) à cet exercice nous semble assez remarquable compte de tenu de la rareté de l'hectogramme dans les pratiques sociales et du résultat, dans ce questionnaire, à la conversion des kilogrammes en grammes. Peut-être que, pour cette question, les élèves ne peuvent pas se référer à une connaissance immédiate, sociale, et qu'ils doivent mobiliser, consciemment, un savoir scolaire. Le taux de non réponse est d'ailleurs plus important pour cette question que pour les conversions usuelles des kilogrammes en grammes et, nous le verrons plus loin, des millimètres en centimètres.

Une conversion de kilogrammes en hectogrammes (précédée d'une conversion de grammes en hectogrammes) constitue une procédure pour déterminer le nombre de paquets de 100 g dans 4 kg (exercice 111 ou hgCo). Observe-t-on une certaine corrélation entre les réponses des élèves à ces deux exercices ?

2.2. Le groupe des exercices sur la conversion des millimètres en centimètres

Nous considérons maintenant le deuxième groupe d'exercices impliquant le système métrique. Ce sont les trois exercices qui peuvent s'interpréter comme des conversions de millimètres en centimètres.

mmTr	MilliMètres en centimètres TRacé	113
mmFo	MilliMètres en centimètres FOrmel	205 b
mmCo	MilliMètres en centimètres en COntexte	211

- MilliMètres en centimètres en COntexte (mmCo).

Enoncé et variables

Combien de morceaux de 1 cm peut-on découper dans un fil de 420 mm de long ?

A cet exercice sont associées deux variables : RPmmCo qui recense les réponses et procédures les plus fréquentes, RmmCo qui donne la réussite brute.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Codage et effectifs des procédures à mmCo (RPmmCo), réussite à mmCo (RmmCo)

RPmmCo	Procédures pour convertir 420 mm en cm en contexte	Effectif	%/Expr.	RmmCo
R	Réponse attendue, 42 sans procédure visible.	176	64,71	68,01% (eff=185)
Rtc	Réponse attendue, 42 avec présence d'un tableau de conversion	6	2,21	
Ra	Réponse attendue, 42 avec décomposition additive : 10+10+10+10+2	1	0,37	
Rd	Réponse attendue, 42 avec division posée : 420 : 10	2	0,74	
0	Réponse 0 : réponse inexpliquée.	6	2,21	
4 ou 4,2	Réponse 4,2 ou 4 cm 2 mm. Ces réponses peuvent correspondre, formellement, au nombre de mètres, entiers, dans 420 cm ou à une conversion de centimètres en mètres. 4 cm 2 mm peut aussi être interprété comme 420 mm dont on aurait « négligé » le 0, il reste alors 42 mm, soit 4 cm 2 mm	20	7,35	
420 ou 420d1	Réponse 420 ou présence de la division 420 : 1. Donnée de l'énoncé ou résultat d'un calcul sans effet, notamment 420 : 1	8	2,94	
4200	Réponse 4200. Peut-être le nombre de millimètres dans 420 cm.	1	0,37	
op	Autre opération visible ou résultat probablement obtenu par une autre opération	16	5,88	
9999	Autre réponse ou procédure	12	4,41	
99999	Absence de réponse et de procédure	24	8,82	
		272	100,00	

RmmCo correspond au cumul des réponses : « R », « Rtc », « Ra » et « Rd » de RPmmCo.

La réussite à mmCo est nettement supérieure à la réussite à hgCo (nombre de paquets de 100 g dans 4 kg). Massivement les élèves qui réussissent n'écrivent pas leur procédure. Il n'y a que très peu de divisions par 10 qui sont écrites dans la résolution de mmCo. On peut penser que la conversion est l'outil principal de résolution pour cet exercice.

Les deux exercices mmCo (cm dans 420 mm) et hgCo (paquets de 100 g dans 4 kg) n'ont pas le même niveau de complexité, même si on peut les résoudre tous les deux en utilisant des conversions métriques. Une façon d'évaluer la différence de complexité entre eux est peut-être de considérer le nombre d'unités en jeu : dans mmCo, il y a le mm et le cm qui correspond à la dizaine de millimètres) ; dans hgCo, il y a trois unités. En effet, on peut considérer qu'il y a le kilogramme, le gramme et la centaine de grammes qui est aussi l'hectogramme.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

On peut aussi considérer qu'il y a une relation directe connue, mémorisée et familière entre le mm et le cm et pas entre le kg et le paquet de 100 g. Peut-être qu'avec des paquets de 1 hg, la réussite aurait été meilleure qu'avec des paquets de 100 g au vu de PhgFo.

- TRacé de 260 MilliMètres (mmTr)

Enoncé et variables

Trace un trait de 260 mm de long.

Pour cet exercice, nous avons deux variables : les réponses détaillées (PmmTr) et la réussite brute (RmmTr)

Codage et effectifs des réponses détaillées à mmTr (PmmTr), réussite (RmmTr)

La longueur des traits pour le codage des réponses s'entend à 2 mm près.

PmmTr	réponses détaillées pour le tracé de 260 mm (mmTr)	Effectif	%/Expr.
R	Réponse attendue, tracé d'un trait de 260 mm, à 2 mm près	160	70,48
T a 10 ou 20	Tracé d'un trait de 240, 250, 270 ou 280 mm. Erreur possible de dénombrement dans un comptage de 10 en 10.	8	3,52
T130	Tracé d'un trait de longueur 130 mm ou présence de la division 260 : 2	3	1,32
T206	Tracé d'un trait de 206 mm. Erreur possible de numération (200 mm+6 mm).	7	3,08
T80	Tracé d'un trait de 80 mm. Erreur possible de numération (20 mm+60 mm).	3	1,32
T26	Tracé d'un trait de 26 mm. Interprétation possible : seuls les chiffres « significatifs » et l'unité sont retenus.	12	5,29
T296	Tracé d'un trait horizontal occupant toute la place disponible. Interprétation possible : l'élève a voulu tracer un trait de longueur 260 cm.	2	0,88
T255	Tracé d'un trait de 255 mm. Interprétation possible : erreur dans la manipulation de la règle graduée, mauvaise position du zéro.	3	1,32
9999	Autre réponse fausse	17	7,49
99999	Absence de réponse et de procédure.	12	5,29
	total	227	100,00

RmmTr correspond à la réponse « R » de PmmTr.

Concernant les procédures de résolution de cet exercice, elles ne sont que rarement visibles dans les travaux des élèves. Nous ne les avons pas retenues dans les résultats. Signalons qu'on trouve des élèves qui comptent, pour chaque centimètre sur leur règle graduée, de 10 en 10 à partir de 0 jusqu'à 260. Sous certaines conditions, pour ces élèves, cet exercice a pu constituer une situation d'apprentissage des conversions de mm en cm. (Nous avons compté 12 élèves

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

qui marquent nettement chaque centimètre sur le trait. Ce peut être un indicateur pour ce dénombrement de 10 en 10.) Six élèves ont écrit la relation 260 mm=26 cm et trois autres, l'égalité 26×10=260.

- MilliMètres en centimètres, FOrmel (mmFo)

Enoncé et variables

Complète chacune des lignes : 630 mm = ………………cm

Pour cet exercice nous avons deux variables : les réponses détaillées (PmmFo) et la réussite brute (RmmFo).

Codage et effectif des réponses détaillées à mmFo (PmmFo), réussite (RmmFo)

PmmFo	Réponses détaillées pour 630 mm =… cm (formel)	Effectif	%/Expr.	RmmFo
R	Réponse attendue, 63 sans procédure visible	194	71,32	75,74% (eff=206)
Rtc	Réponse attendue, 63 avec présence d'un tableau de conversion	12	4,41	
tc	Présence d'un tableau de conversion (éventuellement faux), avec réponse fausse ou sans réponse.	7	2,57	
0,63	Réponse 0,63 ou 0,630. Cette réponse peut correspondre, formellement, à la conversion de 630 m en km qui est courante, ou de 630 mm en m qui est sans doute plus rare.	9	3,31	
6300	Réponse 6300, pouvant correspondre à une conversion de 630 cm en mm.	12	4,41	
6 ou 6,3	Réponse 6 ou 6,3 ou 6,30. Ces réponses peuvent correspondre, formellement, au nombre de mètres, entiers, dans 630 cm ou à une conversion de centimètres en mètres.	16	5,88	
9999	Autre réponse fausse	15	5,51	
99999	Absence de réponse et de tableau de conversion	7	2,57	
		272	100,00	

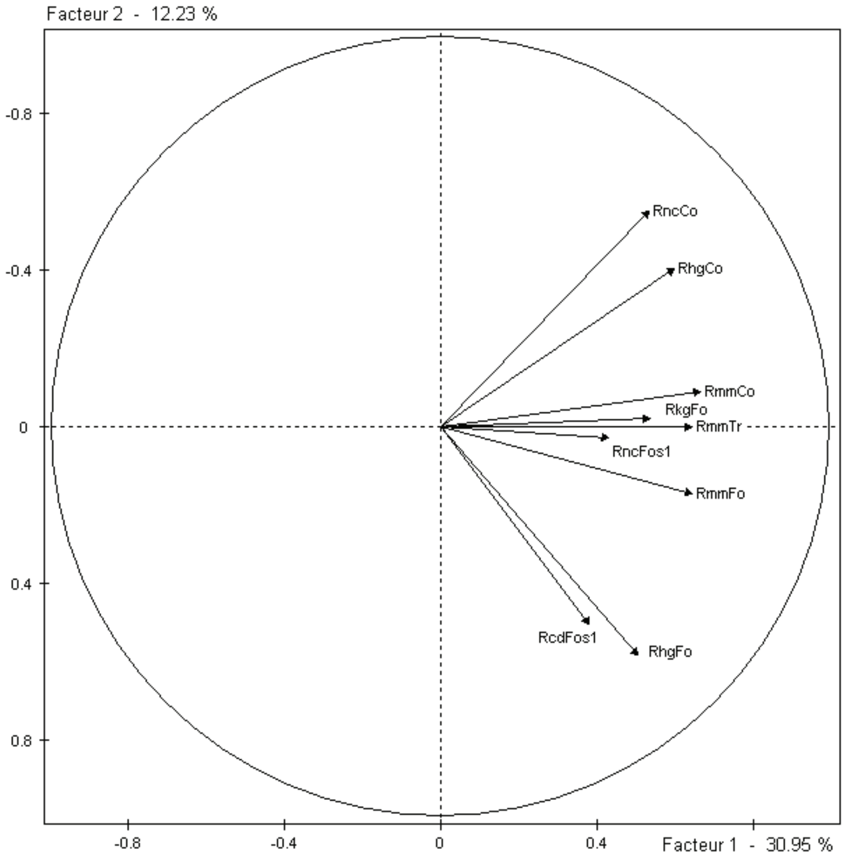
RmmFo correspond au cumul des réponses « R » et « Rtc ».

Cette conversion est réussie par les trois quarts des élèves. (C'est la mieux réussie des trois conversions et le taux de non réponse est le plus faible) Comme pour les autres conversions, on note peu d'utilisation de tableaux de conversion.

2.3. Une analyse factorielle

Pour ces exercices sur la numération et le système métrique, afin d'approfondir l'analyse, nous proposons une analyse factorielle en composantes principales sans rotation. Pour chaque question, la variable que nous avons retenue est la variable « réussite brute » : RXXXX.

Effectif = 274 élèves, sans classe 1 pour ncFo et cdFo



Il semble que les deux variables RcdFo et RhgFo soient fortement corrélées et dans une moindre mesure, les deux variables RncCo et RhgCo. En outre, ces deux groupes de variables apparaissent presque indépendants l'un de l'autre.

Pour ce qui concerne le premier groupe d'exercices, il nous semble possible qu'une conversion de kilogrammes en hectogrammes, sans évocation de contexte autre que par les unités, apparaisse à des élèves actuels de CM2 comme une tâche purement automatisée, qui ne renvoie à aucun autre contexte que les colonnes du tableau de conversion. Il nous semble qu'il peut en aller de même pour la recherche du chiffre des dizaines dans un nombre de quatre chiffres et le tableau de numération cette fois.

Les exercices du deuxième groupe sont porteurs d'un contexte par l'évocation d'une situation de la vie courante et les élèves se tournent vers des procédures de calcul qui leur évoquent

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

sans doute davantage de choses que les techniques, sans calcul, de la numération ou du système métrique.

Ainsi, interprétons-nous de la façon suivante notre graphique d'analyse factorielle. Nous identifions un premier facteur, le facteur 1, nettement marqué. Il correspond à l'« effet taille », à savoir qu'il y a des bons élèves et de mauvais élèves. Quant aux deuxième facteur, on peut penser qu'il indique que les exercices sont identifiés par les élèves, d'après ce qu'ils leur évoquent, soit de façon formelle (dans un sens fort : auquel ne correspondrait aucun contexte de la vie courante mais des techniques automatisées de résolution de numération ou de système métrique), soit au contraire de façon très contextualisée (dans un sens fort : auquel ne correspondrait aucune technique automatisée de numération ou de système métrique, mais du calcul et un contexte).

L'indépendance des variables RhgFo et RhgCo nous semble intéressante à relever : alors que la « conversion de kilogrammes en hectogrammes » (hgFo) pourrait être une partie de la procédure de résolution du « nombre de paquets de 100 g dans 4 kg » (hgCo), les deux variables qui correspondent à la réussite à ces tâches apparaissent comme indépendantes.

Dans une moindre mesure, on retrouve le même résultat dans le champ de la numération, la réussite à la détermination du chiffre des dizaines d'un nombre de 4 chiffres (cdFo) est indépendante de la réussite à la détermination du nombre de centaines en contexte (ncCo). Cet élément permet peut-être de reconsidérer les élèves (10%) qui donnent une réponse du type 2X à cdFo. Ils constituent peut-être une catégorie qui cherche à contextualiser ses connaissances, n'attribuant pas de caractère « concret » aux « chiffres » d'un nombre, elle échoue à cdFo en donnant « un nombre d'unités ».[58]

Au centre, on repère un groupe de cinq variables. Il peut marquer un espace de transition entre les deux caractéristiques « contradictoires » : formelle – contextualisée. On y trouve les trois variables relatives aux conversions de cm en mm, la conversion formelle des kg en g et la recherche du nombre de centaines dans un nombre de 4 chiffres (mal représentée), il s'agit donc de trois tâches « sans contexte » et de deux « en contexte ». Peut-être parce qu'elles sont travaillées en classe dans plusieurs contextes (le tracé de longueurs données en mm est probablement un exercice courant de géométrie) ou qu'elles correspondent à des pratiques sociales (la relation des kilogrammes en grammes peut relever d'une connaissance sociale),

[58] Ceci ne signifie évidemment pas que les « chiffres » d'un nombre n'ont pas de caractère « concret ».

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

ces tâches n'apparaîtraient ni comme purement formelles, ni comme complètement détachées de connaissances formelles.

D'une certaine façon, les trois tâches « sans contexte » pourraient être traitées en en mobilisant un (induit par les unités) et les deux tâches « en contexte » pourraient être décontextualisées pour être traitées. Il nous semble d'ailleurs qu'on retrouve dans le premier point ce que nous avons indiqué à propos de la meilleure réussite pour les conversions de km en m que pour les kg en g, repérée dans les évaluations nationales (cf. chapitre 4). Ceci reste à explorer.

2.4. Conclusions sur la numération et le système métrique

Les réussites aux exercices de numération et système métrique en contexte pour le nombre de centaines dans les unités de milliers sont médiocres et les réussites à ces exercices sont bien corrélées. De même les réussites à deux exercices formels, l'un de conversion d'hg en kg, l'autre de recherche du chiffre des dizaines, sont bien corrélées. Pour la relation entre millier et centaine, la réussite à l'exercice formel de système métrique semble être indépendante de celle à l'exercice en contexte, alors que les exercices de conversion de mm en cm, tous réussis par plus de 60% des élèves, semblent moins sensibles au contexte (formel, pratiques sociales).

Pour la relation de millier à centaine, on observe une indépendance, aujourd'hui, entre les procédures de résolution indépendamment du domaine (numération ou système métrique) : pour les questions formelles on observe des procédures qui pourraient relever d'un automatisme et pour les questions en contexte des procédures qui semblent plutôt relever du calcul d'une division ou d'une multiplication. Ceci n'est pas vrai pour la recherche du nombre de centaines dans un nombre de 4 chiffres (qui est peu réussie toutefois) qui pourrait être considérée, comme les questions relatives aux conversions de mm en cm, comme une question pouvant être traitée de l'une ou l'autre façon.

Les réussites aux différentes conversions sont assez mal corrélées, ceci pourrait être rattaché à la capacité des élèves à leur attribuer un « contexte ». En fait, certaines conversions sans contexte semblent davantage relever d'un automatisme total que d'autres.

La réussite à la conversion de kg en grammes est médiocre et le quart des élèves ne choisit pas la bonne puissance de 10. Pourtant, convertir 5 kg en grammes pourrait revenir à écrire 5 mille en chiffres mais ce ne semble pas être le cas pour les élèves que nous avons interrogés (nous faisons l'hypothèse qu'ils réussiraient mieux s'il s'agissait d'écrire 5 mille en chiffres).

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

L'exercice en contexte pour la relation de millier à centaine dans le discret est mieux réussi que celui sur la masse néanmoins les difficultés ne sont pas du même ordre puisqu'il faut, en plus de cette relation, faire appel aux relations entre unités métriques dans le deuxième et pas dans le premier.

Nous nous sommes inspirée de l'enseignement ancien du système métrique pour concevoir nos exercices de conversion en contexte, quand enseignement du système métrique et de la numération semblaient être fortement articulés. De façon simpliste, on a l'impression qu'aujourd'hui, les diverses connaissances en numération et en système métrique vivent isolément, qu'elles ne se nourrissent pas les unes les autres. Ceci pourrait être lié à deux phénomènes : d'une part à l'affaiblissement de certaines tâches de numération ou de système métrique par le fait qu'elles ne sont prescrites que dans un seul des deux domaines, d'autre part à l'affaiblissement de chaque technique par le fait qu'elle n'est mobilisée que dans un domaine.

Peut-être aussi ces connaissances sont-elle peu maîtrisées parce que les utilise moins souvent à l'école, parce qu'on fait moins de problèmes tirés de la vie quotidienne ou encore que la vie quotidienne fait moins intervenir de grandeurs, ce qui n'est pas une évidence pour nous.

Dans quels contextes, tâches et techniques sur le système métrique et la numération vivent-ils dans l'enseignement d'aujourd'hui ? Observe-t-on dans les manuels d'aujourd'hui une mise en relation entre les connaissances formelles et en contexte tant pour la numération que pour le système métrique ? Observe-t-on une articulation entre les tâches et techniques du système métrique et de la numération ?

3. Les résultats pour l'étude du sens des opérations

Pour cette série, nous avons 19 exercices. Ces exercices sont répartis en plusieurs blocs de problèmes : division (problèmes simples), soustraction (problèmes simples), soustraction avec opérations sur objets, multiplication avec opérations sur objets, déplacement, quatre opérations.

3.1. Généralités sur les variables : réussite au problème, sens de l'opération, sens du problème

Pour les problèmes à « une opération », c'est le choix de la procédure mise en œuvre par l'élève qui nous intéresse puisque nous étudions la reconnaissance du sens de l'opération et nous souhaitons donc ne pas prendre en compte les éventuelles erreurs de calcul.

Par ailleurs, nous voulons distinguer la reconnaissance du sens de l'opération et celle du sens du problème : dans un problème qui peut se résoudre directement par une division, si l'élève a utilisé une division nous dirons qu'il a reconnu le sens de l'opération, s'il a écrit une multiplication à trou nous dirons qu'il a reconnu le sens du problème mais pas celui de l'opération. Dans un premier temps nous relevons donc les procédures mises en œuvre par les élèves.

La situation est simple lorsque l'opération est écrite. Toutefois, certains élèves calculent mentalement sans faire apparaître de procédure ou bien donnent quelques étapes du calcul. Quand l'élève écrit un résultat sans procédure, nous essayons d'abord de voir s'il peut être celui d'un calcul et duquel. Dans l'autre cas, on arrive le plus souvent à déterminer la procédure de calcul sans qu'on sache l'opération qu'il a choisi de calculer et, donc, sans qu'on puisse dire s'il a calculé, par exemple, une soustraction par complément ou bien une « addition à trou » ou encore pour le calcul d'un quotient, on ne peut dire si l'élève a choisi de calculer une division ou d'approcher au mieux le facteur dans une multiplication à trou. Dans ces deux cas, lorsqu'un résultat peut être interprété de deux façons, nous choisissons de comptabiliser l'élève avec ceux qui ont la procédure la plus « perfectionnée ». Cette difficulté se présente essentiellement dans les situations de soustraction et de division. On pourrait avoir des additions itérées pour la multiplication comme procédures alternatives, mais elles sont rares dans nos productions.

La principale variable est donc celle qui repère les procédures mises en œuvre par les élèves. De cette variable, nous en déduisons plusieurs autres : celle qui indique si l'élève utilise « la bonne opération » pour résoudre le problème, celle qui indique si l'élève semble avoir reconnu le sens du problème.

Dans les problèmes de déplacement et à deux variables, les nombres sont tout petits. Par suite, la plupart des calculs sont faits de tête et les procédures de calcul ne sont pas visibles. La variable que nous retenons est alors la réussite. Toutefois, on arrive parfois à déterminer, dans les résultats faux des élèves, non pas l'opération qu'ils ont choisie mais une procédure erronée mise en œuvre pour résoudre le problème.

3.2. Les problèmes de division

Pour cette partie nous avons 4 problèmes dont l'un a deux modalités : texte et schéma.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Pdis	Partition DIScret	102
QLg	Quotition LOngueur	110
Qdis	Quotition DIScret	204
PLg (PTLg, PSLg)	Partition LonGueur : Texte ou Schéma	207

- Rappel des énoncés

Pdis

Ali a 7 paquets de gâteaux, tous identiques. En tout, il a 182 gâteaux.

Combien y a-t-il de gâteaux dans un paquet ?

QLg

En mettant bout à bout des morceaux de papier de 8 cm de long, on a obtenu une ligne de 192 cm.

Combien de morceaux de papier a-t-on utilisés ?

Qdis

Claire a préparé des paquets de bonbons avec ses 168 bonbons. Elle a mis 7 bonbons dans chaque paquet.

Combien Claire a-t-elle préparé de paquets ?

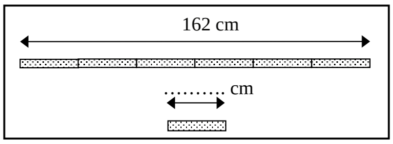
PLg

PTLg

En mettant bout à bout 6 morceaux de papier identiques, on a obtenu une ligne de 162 cm.

Quelle est la longueur d'un morceau de papier ?

PSLg



- Procédures de résolution, erreurs

Pour ces cinq exercices, nous présentons une nomenclature commune des procédures et erreurs. Des erreurs spécifiques apparaissent avec l'exercice PSLg. Nous les étudions séparément.

Nous rappelons que c'est la procédure qui nous intéresse et non les éventuelles erreurs de calcul. Quelques élèves (au maximum 4 par exercice), après avoir effectué une division (et fait des erreurs de calcul), ne savent plus interpréter leur opération. Si a=bq+r, on a quelquefois une réponse du type : q,r ou r ou encore un quotient décimal pour une réponse qui ne peut être qu'entière. Ces réponses sont d'autant plus marginales qu'elles ne se présentent qu'en cas d'erreurs de calcul. En effet, dans nos cinq problèmes, sans erreur, le reste de la division est 0. Dans ce qui suit, si un élève a fait une erreur de ce type, nous ne le signalons pas, nous considérons qu'il a bien trouvé l'opération.

Nous incluons les réponses de la classe 1 pour les problèmes Pdis et QLg. En effet, il semble que nombre d'élèves n'ont pas terminé leur calcul, en revanche, le choix d'une opération est visible sur la plupart des productions (2 absences de réponse pour Pdis et 4 absences de réponse pour QLg).

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

	Pdis	QLg	Qdis	PTLg
div	Division (182 : 7) écrite : posée ou en ligne (calculée ou non, avec ou sans erreur de calcul, éventuellement calculée par tâtonnement).	Idem avec la division (192 : 8)	Idem avec la division (168 : 7)	Idem avec la division (162 : 6)
Qm_ Qr	Pas de trace de division, trace de calcul réfléchi pour le calcul du quotient ou bien réponse juste (26) sans procédure visible (éventuellement obtenue après changement de procédure, triche ?).	Idem avec la réponse (24)	Idem avec la réponse (24)	Idem avec la réponse (27)
mtat	Pas de trace de division, un ou plusieurs essais de produits du type Y×7 (dont un au moins avec Y supérieur à 10)	Idem avec Y×8	Idem avec Y×7	Idem avec Y×6
mutr	Pas de trace de division, multiplication à trou (182=…×7) ou égalité (26×7=182). En général, ils n'ont pas trouvé le résultat.	Idem avec 192=…×8 ou 24×8=192	Idem avec 168=…×7 ou 24×7=168	Idem avec 162=…×6 ou 27×6=162
cmp	Hypothèse que le problème est compris. Pas de trace de division. Procédures archaïques parmi : un ou plusieurs essais de produits du type Y×7 (avec Y inférieur à 10, moins élaboré que mtat), dessin de 7 paquets, addition de 7 nombres égaux.	Idem avec procédures parmi : produits du type Y×8 (Y petit), tracés de plusieurs traits de longueurs 8 cm, addition itérée de 8.	Idem avec procédures parmi : produits du type Y×7 (Y petit), tracés de paquets de 7, addition itérée de 7.	Idem avec procédures parmi : produits du type Y×6 (Y petit), addition de 6 nombres égaux.
ad	Présence de l' « autre » division (7 : 182)	Idem avec (8 : 192)	Idem avec (7 : 168)	Idem avec (6 : 162)
aom	Présence de la multiplication (7 × 182)	Idem avec (8 × 192)	Idem avec (7 × 168)	Idem avec (6 × 162)
ao	Présence d'une autre opération	Idem	Idem	Idem
9999	Réponse fausse sans procédure	Idem	Idem	Idem
99999	Absence de réponse et de procédure	Idem	Idem	Idem

Pour PSLg, on retrouve les procédures de PTLg auxquelles il faut ajouter des réponses spécifiques à la forme de l'énoncé.

	Procédures spécifiques pour PSLg
estim absol	Bien que sans règle graduée, des élèves estiment à vue la longueur du petit trait. Compréhension de la consigne ou difficulté avec la situation ?

	Procédures spécifiques pour PSLg
gradb	Des élèves graduent leur bande dans une unité plus ou moins arbitraire et l'utilisent pour mesurer le petit trait.

Outre les valeurs pour les différentes modalités, nous ajoutons quelques données obtenues par cumul. On verra que le nombre de réponses obtenues mentalement semble augmenter au fil des exercices. Aussi, ne semble-t-il pas déraisonnable de compter ensemble les élèves qui écrivent une division et ceux qui calculent mentalement. La « réussite division » cumule ces deux types de réponses (div et Qm_Qr). Nous cumulons aussi les élèves qui écrivent une multiplication à trou (mutr) et ceux qui cherchent le facteur manquant du produit en écrivant des multiplications par tâtonnement (mtat), nous parlerons de réussite « produit ». Nous cumulons aussi les procédures « produit » et « division » sous l'intitulé procédures « multiplicatives ». Enfin, le code « compréhension » cumule tous les élèves précédents ainsi que ceux qui ont produit une procédure « archaïque ». Apparemment, ils ont compris le sens du problème.

Nous donnons les réponses en pourcentage. En effet, les effectifs (rappelés au bas de chaque colonne) sont variables d'un exercice à l'autre : exercices PTLg et PSLg effectués par une moitié des élèves. Dans un deuxième tableau, nous indiquons la part des procédures division (divisions et calcul mental) parmi les procédures multiplicatives.

Pdis	%	%
div	65,33	
Qm_Qr	1,09	
R division		66,42
mtat	8,39	
mutr	0,36	
R produit		8,76
R multiplicative		75,18
cmp	2,19	
R compréhension		77,37
ad	1,09	
aom		
ao	12,77	
9999	4,01	
99999	4,74	
estim absol	0,00	
gradb	0,00	

QLg	%	%
div	51,09	
Qm_Qr	2,55	
R division		53,65
mtat	15,69	
mutr	3,65	
R produit		19,34
R multiplicative		72,99
cmp	2,19	
R compréhension		75,18
ad	0,36	
aom		
ao	13,87	
9999	3,65	
99999	6,93	
estim absol	0,00	
gradb	0,00	

Qdis	%	%
div	64,34	
Qm_Qr	5,51	
R division		69,85
mtat	10,66	
mutr	1,10	
R produit		11,76
R multiplicative		81,62
cmp	1,47	
R compréhension		83,09
ad	0,00	
aom		
ao	11,76	
9999	2,57	
99999	2,57	
estim absol	0,00	
gradb	0,00	

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Pdis	%	%
effectif	274	

QLg	%	%
effectif	274	

Qdis	%	%
effectif	272	

PTLg	%	%
div	60,87	
Qm_Qr	4,35	
R division		65,22
mtat	12,32	
mutr	0,72	
R produit		13,04
R multiplicative		78,26
cmp	0,72	
R compréhension		78,99
ad	0,00	
ao	9,42	
aom		
9999	4,35	
99999	7,25	
estim absol	0,00	
gradb	0,00	
effectif	138	

PSLg	%	%
div	50,00	
Qm_Qr	4,48	
R division		54,48
mtat	8,21	
mutr	1,49	
R produit		9,70
R multiplicative		64,18
cmp	0,75	
R compréhension		64,93
ad	0,00	
ao	6,72	
aom		
9999 dont estim prop	16,42	
99999	5,97	
estim absol	4,48	
gradb	1,49	
effectif	134	

PLg	%	%
div	55,51	
Qm_Qr	4,41	
R division		59,93
mtat	10,29	
mutr	1,10	
R produit		11,40
R multiplicative		71,32
cmp	0,74	
R compréhension		72,06
ad	0,00	
ao	8,09	
aom		
9999	10,29	
99999	6,62	
estim absol	2,21	
gradb	0,74	
effectif	272	

	Pdis		QLg		Qdis		PTLg		PSLg		PLg
réussite « division »	66,42		53,65		69,85		65,22		54,48		59,93
réussite multiplicative	75,18		72,99		81,61		78,26		64,18		71,33
ratio	0,88		0,74		0,86		0,83		0,85		0,84

- Analyse des résultats

Dans un premier temps, plusieurs faits nous semblent saillants :

- la situation particulière de l'exercice PSLg du point de vue de la compréhension : nettement moins bien compris que les exercices sous la forme texte,
- la part variable mais relativement importante des procédures « produit » (de 9% à 19% des réponses, ce qui représente de 12% à 26% des procédures multiplicatives),

- la situation particulière de QLg parmi les exercices dont l'énoncé est un texte : réussite nettement inférieure pour le choix de l'opération et nettement plus de procédures « produit ».

Version schéma ou texte : quelles différences ? (retour sur l'exercice PLg)

En regardant le dernier tableau notamment, on observe une différence dans la réussite aux deux versions de PLg. Cette différence est-elle significative ? Si oui, comment peut-on l'expliquer ?

Différence entre PSLg et PTLg : Test d'échantillons indépendants

Pour évaluer si les différences de réussite entre les exercices de division sont significatives, nous utilisons trois tests de Student. Un premier pour voir si les différences entre les procédures sont significatives (PLgDM), deux autres pour voir si les différences de réussites sont significatives en termes « multiplicatif » (PLgM) et de « division » (PLgD). Pour PLgDM, nous attribuons la valeur 0 pour l'échec, 1 pour une multiplication, 2 pour une division.

		Test de Levene sur l'égalité des variances		Test-t pour égalité des moyennes		
		F	Sig.	t	ddl	Sig. (bilatérale)
PLgDM	Hypothèse de variances égales	13,597	,000	-2,319	270	,021
	Hypothèse de variances inégales			-2,315	264,015	,021
PLgM	Hypothèse de variances égales	26,282	,000	-2,589	270	,010
	Hypothèse de variances inégales			-2,584	261,646	,010
PLgD	Hypothèse de variances égales	10,376	,001	-1,811	270	,071
	Hypothèse de variances inégales			-1,810	268,524	,071

La différence de moyenne est significative entre les deux groupes PTLg et PSLg pour les critères : procédures, réussite multiplicative et dans une moindre mesure pour la reconnaissance de la division. PSLg est plus difficile que PTLg.

Première explication : PSLg, un exercice à questions enchaînées

A posteriori, nous proposons une nouvelle analyse de la tâche de PSLg. Dans la forme texte, le nombre de parts est donné. Dans la forme schéma, il est à la charge de l'élève : il doit compter les morceaux. D'une certaine façon, cet exercice comporte une question intermédiaire qui n'est pas explicitée. De plus, l'énoncé de PSLg est minimal : il n'y a pas de question en langue naturelle. En outre, il comporte un implicite : le fait que toutes les petits morceaux sont égaux. Tout ces éléments peuvent le rendre plus difficile que PTLg.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Des erreurs spécifiques à l'interprétation des schémas

Dans PSLg, on voit apparaître des erreurs spécifiques ainsi que beaucoup de réponses que nous ne sommes pas parvenue à expliquer (15% contre 5% au plus dans les autres exercices de division). Les élèves (6%) qui répondent « estim absol » et « gradb » sont en grand décalage avec ce qui est attendu : ils ne prennent pas en compte l'information chiffrée.

La situation est différente pour une partie des 15% d'élèves dont la réponse est codée 9999. En revenant sur les réponses qu'ils ont proposées, on observe en effet qu'une partie de ces élèves proposent une réponse autour de la valeur 30. Ils semblent déterminer une estimation grossière de la longueur cherchée en s'appuyant sur les proportions du dessin et la donnée chiffrée. Ces réponses particulières nous sont apparues dans un deuxième temps, nous ne les avons pas quantifiées. Nous y reviendrons avec l'analyse de la série 4op.

Procédures produit : atout ou handicap ?

Le dépouillement des réponses nous laisse penser que les procédures produit sont susceptibles d'être concentrées dans certaines classes. Qu'en est-il ? L'utilisation de ces procédures est-elle un atout ou un handicap pour la réussite aux problèmes de division ?

classe	Effectif classe	Réussite division	Réussite multiplicative	part élève, avec produit	part élève, avec produit et division	part élève avec p et d dans ceux qui réussissent : (p et d) / Rmult
global	270	0,63	0,75	0,26	0,18	0,24
1	22	0,76	0,78	0,05	0,05	0,06
2	21	0,64	0,70	0,14	0,10	0,14
3	29	0,52	0,83	0,55	0,41	0,50
4	12	0,42	0,83	0,67	0,33	0,40
5	26	0,88	0,92	0,15	0,15	0,17
6	11	0,45	0,61	0,36	0,27	0,44
7	28	0,60	0,77	0,32	0,21	0,28
8	26	0,53	0,55	0,08	0,08	0,14
9	31	0,64	0,74	0,19	0,13	0,17
10	19	0,49	0,66	0,42	0,32	0,48
11	25	0,75	0,80	0,08	0,00	0,00
12	20	0,61	0,78	0,30	0,20	0,26

Remarquons d'abord que dans notre échantillon un élève sur quatre utilise au moins une fois une procédure produit et près d'un sur cinq les deux types de procédures. Par classe, la part des élèves utilisant au moins une fois une procédure produit est très variable : de 1 sur 20 à 2 sur 3. On a trois classes avec moins de 10% des élèves qui en utilisent et deux avec plus de 50%. Néanmoins, il semble que l'utilisation de procédures produit n'est pas un indicateur d'une bonne ou mauvaise réussite de la classe : aux extrêmes, les classes 3 et 5 réussissent à 83% et 92% avec respectivement 55% et 15% d'élèves qui utilisent au moins un produit et les classes 8 et 10 qui réussissent à 55% et 66% avec 8% et 42% qui utilisent au moins un produit.

Nous nous intéressons maintenant aux élèves qui utilisent les deux types de procédures : produit et division. *A priori*, nous pensons qu'un élève qui utilise une procédure produit ne mobilise pas le sens de la division pour résoudre le problème. Nous avons repéré deux types de procédures produit. L'une est la multiplication à trou, l'autre est la « multiplication tâtonnée ». Il faut signaler la classe 1 dans laquelle des élèves écrivent la division en ligne et calculent ensuite le quotient par des « multiplications tâtonnées » (Nous avons considéré qu'il s'agissait d'une procédure « division ». Dans cette classe, les procédures produit sont peu présentes.). De façon générale, on peut penser que les multiplications tâtonnées constituent la trace de l'apprentissage de l'algorithme de la division. Toutefois il ne semble pas, pour un certain nombre d'élèves, pour ceux qui utilisent les deux procédures produit et division, qu'elles soient équivalentes, que la division ait remplacé, « dans tous les cas », la multiplication tâtonnée. La présence des multiplications à trou se présente dans deux cas. D'une part, ce peut être pour écrire qu'on cherche un facteur dans un produit, le facteur est ensuite calculé par des « multiplications tâtonnées ». D'autre part, dans quelques classes et pour certains élèves, la multiplication à trou semble constituer une technique opératoire : les élèves posent une multiplication « en colonne » et cherchent à déterminer, en commençant par les unités, les chiffres du facteur inconnu. Cette « technique » est probablement imitée de l'addition à trou, posée, qui dans certaines progressions, est une étape pour la technique opératoire de la soustraction et qui fonctionne pour tous les nombres entiers et décimaux. Pour la division, elle ne permet, au mieux, que de déterminer le quotient des divisions euclidiennes où le reste est nul. Néanmoins, il est possible que dans certaines classes la multiplication à trou soit une étape de l'apprentissage du *sens* de la division (facteur manquant dans un produit). Nous savons que dans la classe 10, où elle est très présente, la « division » n'a pas été étudiée avant le CM2.

La présence de ces procédures « produits » n'est pas surprenante au regard des textes officiels puisque le document d'application, pour le cycle 3, en 2002 indique :

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

> À la fin du cycle 3, les élèves doivent être capables de reconnaître quelle opération permet de résoudre la plupart des problèmes qui peuvent être traités à l'aide d'une seule opération. Certains problèmes à une opération ne sont cependant pas reconnus comme tels par tous les élèves et nécessitent le recours à des procédures personnelles : c'est par exemple le cas de certains problèmes de division euclidienne que les élèves vont résoudre par soustractions successives ou par essais de produits. Ces solutions ne doivent pas être rejetées, mais au contraire encouragées chaque fois que le calcul expert n'est pas reconnu par les élèves.

Toutefois, il nous semble finalement que l'apparition de ces procédures « produits » s'explique par plusieurs raisons complémentaires. Nous avons repéré :

- Elles peuvent être la manifestation de la résolution de problèmes de division (ceci est possible depuis la petite section de maternelle) alors qu'on ne dispose pas de technique de calcul établie. À un moment donné, la multiplication a pu apparaître comme une technique pertinente et s'est fixée ;
- Elles peuvent être la trace de l'élaboration de l'algorithme de la technique opératoire de la division, pour laquelle on a fait résoudre aux élèves des problèmes de division en perfectionnant des techniques multiplicatives jusqu'à aboutir à l'algorithme (par soustractions successives probablement) ;
- Elles manifestent la reconnaissance d'un sens de la division : la division comme facteur manquant dans un produit. Et ce « sens » n'est pas transformé jusqu'à faire apparaître l'opération « division ».

Ces éléments nous amènent à poser plusieurs questions qui ne sont pas nécessairement indépendantes mais qui éventuellement peuvent l'être :

- Du point de vue de l'apprentissage du sens de l'opération : jusqu'où, pendant combien de temps, est-il souhaitable que les élèves résolvent des problèmes d'arithmétique simples sans disposer du symbolisme pour représenter l'opération ? Signalons que parmi les 13 classes que nous avons rencontrées deux classes (pré-test et 10) n'ont étudié la « division » qu'au CM2. L'enseignant de la classe 0 nous a dit que cela ne l'avait pas empêché de donner aux élèves à résoudre, par des procédures personnelles, des problèmes de division au cours de l'année.
- Du point de vue de l'apprentissage des algorithmes : la « construction du sens » des algorithmes demande manifestement une certaine énergie aux élèves et aux enseignants, à tel point que des élèves continuent à employer les techniques transitoires même quand la progression est arrivée à son terme. Pour certains élèves, on peut se demander si les différentes étapes de la progression n'ont pas constitué des apprentissages pour eux-mêmes, plus que pour l'algorithme. Même s'il s'agit quand

même d'apprentissage à la résolution de problèmes, jusqu'où cela est-il souhaitable en terme d'économie et d'écologie ?

- L'utilisation de plusieurs procédures multiplicatives pour résoudre des problèmes simples de division est-elle un indicateur de la « souplesse » nécessaire pour faire des mathématiques ? Dans quelle mesure, constitue-t-elle le signe que les élèves relient multiplication et division comme opérations inverses ?

Implicitement, certaines de ces questions renvoient notamment à une décision institutionnelle, celle du symbole, ou des symboles, pour la notation de la division. Il y a bien sûr les deux notations, « : » et « / », mais la question des notations des divisions euclidienne et exacte nous semble plus vive à l'école primaire. La division euclidienne apparaît dans les programmes de l'école primaire en 1970, à côté de la division « exacte ». En 1945, les auteurs des programmes ne semblent pas ignorer qu'elle existe ni les problèmes que pose le symbolisme mais ils proposent une notation commune :

> « Le signe : est plus gênant. Suivant les cas, il représente soit une division exacte, soit une division approchée. Il semble possible de l'utiliser au cours élémentaire et au cours moyen pour indiquer la division approchée en écrivant à la suite la valeur du reste :
>
> 17 : 3 = 5 ; reste 2. »

La division euclidienne est appelée « division approchée » dans le texte officiel mais ceci ne permet pas d'affirmer qu'il s'agit d'une marque d'ignorance des rédacteurs des programmes. Ce peut être un moyen pour s'adresser aux maîtres sans créer le besoin de développements supplémentaires. Aujourd'hui, et depuis 1970, dans les programmes, la division euclidienne est notée avec le signe « × », dans une égalité : $a = b \times q + r$ ($r<b$), le signe « : » étant réservé à la division exacte. Il y a évidemment des justifications théoriques au rejet de la notation « : » pour la division euclidienne, la principale (la seule ?) est que la division euclidienne n'est pas une opération : à 2 nombres on associe 2 nombres et non un seul. Néanmoins, ce choix est susceptible d'avoir une incidence sur l'enseignement de la division, tant dans les pratiques des enseignants que pour l'apprentissage des élèves. Compte tenu de son emploi réservé à un nombre restreint de situations, dans certaines pratiques de classes le signe « : » n'est-il pas susceptible de n'apparaître que très tardivement ? Par suite, si on admet que disposer d'un symbole pour noter une opération est une aide à la conceptualisation de l'opération, que penser de la conceptualisation du sens de la division pour laquelle on ne dispose éventuellement pas de signe spécifique ou bien de deux signes différents (× et :) dont l'un sert déjà à symboliser une autre opération ? Par exemple, le signe × commun aux deux opérations est-il susceptible d'expliquer tout ou partie de l'erreur consistant à écrire une

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

multiplication à la place d'une division (les nombres qui auraient dû constituer le dividende et le diviseur sont multipliés entre eux). Dans nos quatre problèmes ainsi que dans ncCo, elle est présente dans 2% à 9,5% des productions. Elle est plus importante dans les trois problèmes de quotition (18, 21 et 25 contre 6 et 14). En outre, lors de l'apprentissage de l'algorithme, la « potence » vient constituer un nouveau symbole pour désigner la division, symbole d'ailleurs commun aux deux divisions. A cette remarque, peut-être faut-il aussi ajouter que la pratique courante veut que dans la « division posée » on écrit une « potence » et, contrairement aux trois autres opérations « posées », il n'y a alors pas de trace du signe opératoire de l'« opération en ligne » (de quel signe pourrait-on laisser la trace ?). Comment les élèves relient-ils les différentes désignations symboliques des divisions ? Le choix des signes opératoires n'est évidemment pas simple, néanmoins une étude de manuels scolaires tant anciens que nouveaux pourrait donner un certain éclairage sur des possibles quant au symbolisme de la division. Peut-être faut-il d'ailleurs considérer que le choix de 1945 constitue un compromis écologique et économique en réponse à une question peut-être aussi ancienne que l'enseignement de la division.

Enfin, du point de vue de l'opération simple sur les grandeurs, les opérandes ne sont pas de même nature selon qu'on est dans un cas de quotition ou de partition : dans les deux cas, le dividende et le reste sont deux grandeurs de même nature mais le diviseur est une grandeur ou un nombre, inversement au quotient. Actuellement, ce fait n'a probablement qu'une incidence négligeable sur le symbolisme relatif à la division dans les pratiques des enseignants puisqu'on écrit des nombres mais d'une part ceci n'a peut-être pas toujours été le cas dans l'histoire (c'est d'ailleurs visible avec les grandeurs quotient en 1945), d'autre part même si on n'apprend pas aux élèves à écrire des opérations sur les grandeurs on ne peut exclure que certains en écrivent spontanément. Qu'écrivent-ils alors ?

Peut-on dire que les exercices sur le discret sont mieux réussis que ceux sur le continu ? (retour sur l'exercice QLg et sur les différences entre les exercices)

Compte tenu de ce que nous avons dit sur les différences entre PSLg et PTLg, nous essayons maintenant de voir si certains exercices sont mieux réussis que d'autres (de façon significative) et le cas échéant de rechercher des explications. Nous retenons uniquement la version texte de PLg.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Des différences significatives dans la réussite aux exercices (version texte) ?

Pour évaluer si les différences de réussite entre les exercices de division sont significatives, nous utilisons trois tests de Student : un premier pour voir si les différences entre les procédures sont significatives (DM), deux autres pour voir si les différences de réussites sont significatives en termes multiplicatif (M) et de division (D). Pour les procédures (DM), nous attribuons la valeur 0 pour l'échec, 1 pour une multiplication, 2 pour une division.

Différences pour les procédures : Test échantillons appariés

Intervalle de confiance de 95%	t	ddl	Sig. (bilatérale)
QLgDM - PTLgDM	-2,259	135	,025
PdisDM - QLgDM	2,994	273	,003
QLgDM - QdisDM	-5,243	269	,000
QdisDM - PTLgDM	1,449	137	,150
PdisDM - QdisDM	-1,618	269	,107
PdisDM - PTLgDM	,242	135	,809

Entre Pdis et PTLg, la différence de réussite n'est pas significative (p=81%). Elle est significative (p<5%) entre les trois exercices et QLg. Elle n'est que peu significative (p=11% et p=15%) pour les différences entre Qdis avec Pdis et PTLg.

Différences pour la réussite multiplicative : Test échantillons appariés

Intervalle de confiance 95%	t	ddl	Sig. (bilatérale)
QLgM - QdisM	-3,584	269	,000
PdisM - QdisM	-2,204	269	,028
QdisM - PTLgM	1,613	137	,109
QLgM - PTLgM	-1,178	135	,241
PdisM - QLgM	,801	273	,424
PdisM - PTLgM	-,217	135	,828

En termes de réussite « multiplicative » les seules différences significatives sont entre Qdis et les autres exercices : Qdis est mieux réussi que QLg, Pdis et moins sûrement que PTLg.

Différence pour la reconnaissance de la division : Test échantillons appariés

Intervalle de confiance 95%	t	ddl	Sig. (bilatérale)
PTLgD - QLgD	2,969	135	,004
PdisD - QLgD	4,731	273	,000
QLgD - QdisD	-5,833	269	,000
PTLgD - QdisD	-1,000	137	,319
PdisD - QdisD	-,911	269	,363
PTLgD - PdisD	-,653	135	,515

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

En termes de réussite à la reconnaissance de la division, les seules différences significatives sont entre QLg et les trois autres problèmes.

Il nous semble qu'on peut dire que selon la façon dont on regarde la réussite aux exercices, certains se distinguent ou non. Les différences entre PTLg et Pdis ne sont jamais significatives. Nous avons conçu ces deux exercices pour qu'ils opposent discret et continu. L'exercice QLg est moins bien réussi que les autres quand on regarde la reconnaissance de la division mais pas quand on regarde l'utilisation d'une procédure multiplicative. L'exercice Qdis semble être plus facile que les autres du point de vue de la l'utilisation d'une procédure multiplicative mais pas du point de vue de la reconnaissance de la division.

Des différences entre les énoncés ?

Si la compréhension pour QLg n'apparaît pas significativement différente de celle des autres exercices, les procédures « produit » et leur part dans les procédures multiplicatives est en revanche assez différente : 20% des réponses contre 9% à 13%, 28% des procédures multiplicatives contre 13% à 17% pour les autres problèmes. Les rapports entre les procédures « division » et multiplicatives sont différents : 0,74 pour QLg contre 0,83 à 0,87 pour les quatre autres problèmes. Dans sa formulation, cet exercice ne présente que peu de différence de « style » avec PTLg :

En mettant bout à bout des morceaux de papier de 8 cm de long, on a obtenu une ligne de 192 cm. Combien de morceaux de papier a-t-on utilisés ?	En mettant bout à bout 6 morceaux de papier identiques, on a obtenu une ligne de 162 cm. Quelle est la longueur d'un morceau de papier ?

Ces deux exercices nous semblent différer essentiellement par la structure sous-jacente. La « compréhension » à PTLg est un peu meilleure que la compréhension à QLg mais cet écart est très inférieur à celui qu'on repère dans la différence de traitement par les élèves. D'une certaine façon, pour ce problème, ce n'est pas la représentation que les élèves s'en font qui semble problématique mais l'utilisation de l'opération *ad hoc* pour le résoudre. (Julo 1995 pXXX)

Revenons aux deux exercices sur le discret, l'exercice de quotition est plutôt mieux réussi que l'exercice de partition. Contrairement à PTLg et QLg, les deux formulations y sont plus éloignées :

Ali a 7 paquets de gâteaux, tous identiques. En tout, il a 182 gâteaux. Combien y a-t-il de gâteaux dans un paquet ?	Claire a préparé des paquets de bonbons avec ses 168 bonbons. Elle a mis 7 bonbons dans chaque paquet. Combien Claire a-t-elle préparé de paquets ?

Le premier est plutôt « statique » (comme PTLg et QLg) alors que le deuxième est plutôt dynamique, il indique qu'on a fait une action de répartition. En outre, l'ordre des informations est commun à Pdis, PTLg et QLg alors que dans Qdis on donne d'abord « le tout », puis ce qui concerne les parts. Ces éléments sont-ils susceptibles d'expliquer la réussite un peu meilleure à Qdis ?

Des apprentissages au fil du questionnaire ?

Il est connu qu'il peut y avoir des apprentissages au fil de questionnaires, en particulier lorsque des questions qui se ressemblent y sont posées. Il existe des méthodologies particulières qui permettent de contourner ce qui peut, dans certains cas, constituer des biais. Nous n'avons pas utilisé de telles méthodologies.

La réussite moins bonne à QLg qu'aux autres exercices ne peut s'expliquer uniquement par la place qu'il occupait : il est « coincé » entre deux exercices mieux réussis que lui. Nous présentons en vis à vis l'ordre de passation et l'ordre des réussites (la différence entre les différents ordres n'est pas toujours significative). Pour l'ordre des réussites : le premier est le moins bien réussi.

	Passation	R division	R multiplicative	R compréhension
Pdis	1	3	2	2
QLg	2	1	1	1
Qdis	3	4	4	4
PTLg	4	2	3	3

Une ressemblance statistique entre les exercices ?

Nous cherchons à repérer dans les procédures des élèves une ressemblance entre les exercices. Un indicateur d'une telle ressemblance peut être donné par le « Kappa ».

> Le Kappa de Cohen mesure la concordance entre deux indicateurs lorsque les deux servent à évaluer le même objet. La valeur 1 indique une concordance parfaite. La valeur 0 indique que la concordance ne dépasse pas celle due au hasard. » (d'après l'aide du logiciel SPSS)

Pour calculer le kappa, il faut construire des tableaux croisés. Nous choisissons de croiser d'une part l'utilisation des différentes procédures (une division, une procédure produit, ni l'un ni l'autre), d'autre part la réussite multiplicative. Les tableaux étant construits, on calcule le résidu pour les différentes cases du tableau (écart entre le tableau théorique qui correspondrait à l'indépendance des variables – kappa = 0 – et le tableau de données). Le « kappa » est calculé à partir des effectifs et des résidus. Nous donnons ces tableaux en fin de paragraphe.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Croisement de procédures réussite	Kappa
Qdis*QLg	,538
PLg*Pdis	,516
QLg*Pdis	,504
PLg*QLg	,489
Qdis*Pdis	,489
PLg*Qdis	,479

R multiplicative	Kappa
Qdis*QLg (multiplicative)	,552
PLg*Pdis (multiplicative)	,535
PLg*Qdis (multiplicative)	,497
PLg *QLg (multiplicative)	,495
Qdis*Pdis (multiplicative)	,483
QLg*Pdis (multiplicative)	,468

Les différences entre les valeurs de Kappa sont faibles pour toutes les paires (au maximum 6% pour les procédures, 8% pour la réussite multiplicative). Néanmoins, les valeurs de Kappa semblent nous indiquer qu'en premier lieu, quand on considère les 6 paires possibles d'exercices (qu'on regarde les procédures de réussite ou la réussite multiplicative), les exercices qui sont les plus concordants sont d'abord les deux situations de quotition, puis les deux situations de partition. Pour les deux séries, s'intercalent ensuite : soit la paire QLg*Pdis, soit la paire PLg*Qdis. Les deux paires d'exercices sur la longueur puis (ou en même temps) dans le discret viennent après, suivies par la paire restante.

Pour la division, ces éléments ne nous semblent pas probants pour conclure que les exercices qui sont dans les mêmes grandeurs, se ressemblent.

L'exercice QLg est plus difficile que les autres, sous forme texte, mais des études complémentaires nous semblent nécessaires pour préciser cela. En particulier, la bibliographie sur les « word problem » est abondante et nous ne l'avons qu'à peine étudiée, par ailleurs notre méthodologie de passation du test et de choix de nos énoncés de problèmes ne sont peut-être pas assez élaborés pour repérer des variations éventuellement fines dans les réussites. Les différences de réussite selon les exercices ne nous semblent pas être caractérisées par la distinction « discret » « continu ».

Tableaux croisés pour le calcul de kappa

Qdis*QLg			Qdis						Total
			échec		multiplication		division		
QLg	échec	Effectif (Résidu)	40	(26,5)	3	(-5,7)	30	(-20,8)	73
	multiplication	Effectif (Résidu)	5	(-4,6)	25	(18,8)	22	(-14,2)	52
	division	Effectif (Résidu)	5	(-21,9)	4	(-13,2)	136	(35,0)	145
Total		Effectif	50		32		188		270

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

PLg*Pdis			PLg						Total
			échec		multiplication		division		
Pdis	échec	Effectif (Résidu)	47	(528,2)	6	(-1,5)	12	(-26,8)	65
	multiplication	Effectif (Résidu)	8	(,1)	11	(8,2)	5	(-9,3)	24
	division	Effectif (Résidu)	23	(-29,3)	14	(-6,8)	144	(36,1)	181
Total		Effectif	78		31		161		270

PLg*QLg			PLg						Total
			échec		multiplication		division		
QLg	échec	Effectif (Résidu)	48	(26,9)	3	(-5,4)	22	(-21,5)	73
	multiplication	Effectif (Résidu)	17	(2,0)	19	(13,0)	16	(-15,0)	52
	division	Effectif (Résidu)	13	(-28,9)	9	(-7,6)	123	(36,5)	145
Total		Effectif	78		31		161		270

Qdis*Pdis			Qdis						Total
			échec		multiplication		division		
Pdis	échec	Effectif (Résidu)	34	(22,0)	6	(-1,7)	25	(-20,3)	65
	multiplication	Effectif (Résidu)	1	(-3,4)	15	(12,2)	8	(-8,7)	24
	division	Effectif (Résidu)	15	(-18,5)	11	(-10,5)	155	(29,0)	181
Total		Effectif	50		32		188		270

PLg*Qdis			PLg						Total
			échec		multiplication		division		
Qdis	échec	Effectif (Résidu)	39	(24,7)	3	(-2,7)	8	(-22,0)	50
	multiplication	Effectif (Résidu)	7	(-2,2)	15	(11,4)	10	(-9,2)	32
	division	Effectif (Résidu)	32	(-22,5)	13	(-8,7)	145	(31,1)	190
Total		Effectif	78		31		163		272

QLg*Pdis			QLg						Total
			échec		multiplication		division		
Pdis	échec	Effectif (Résidu)	43	(24,6	14	(,8)	11	(-25,5)	68
	multiplication	Effectif (Résidu)	3	(-3,5	20	(15,4)	1	(-11,9)	24
	division	Effectif (Résidu)	28	(-21,2	19	(-16,2)	135	(37,4)	182
Total		Effectif	74		53		147		274

Profils d'élèves, profils de classes ?

Ces considérations qui nous semblent peu discriminantes entre les exercices, nous incitent à étudier d'autres éléments pour comparer la réussite entre les exercices. Nous avons cherché à établir des profils d'élèves selon « continu – discret », sans parvenir à un résultat convaincant.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Nous avons cherché à construire un autre estimateur, en regardant la façon dont un élève donné réussit les différents problèmes qu'il résout. Puisque nos problèmes ont « une même structure », nous nous posons la question suivante : dans quelle mesure la réussite à un problème garantit-elle la réussite aux autres ?

Nous avons calculé la réussite à n exercices sur 4, en considérant les trois formes de réussite : une procédure de division, une procédure multiplicative, la « compréhension ». Pour les 270 élèves ayant participé aux quatre problèmes (PTLg et PSLg confondus), nous avons les résultats suivants.

		Nombre (et pourcentage) d'élèves qui réussissent n problèmes					
		avec une division		avec une procédure multiplicative		en termes de compréhension	
Nombre de problèmes réussis	0	49	18%	28	10%	25	9%
	1	36	13%	20	7%	18	7%
	2	28	10%	22	8%	23	9%
	3	45	17%	50	19%	50	19%
	4	112	41%	150	56%	154	57%
		270	100%	270	100%	270	100%

On voit que la « compréhension » est peu différente de la proposition d'une procédure multiplicative (on pouvait s'y attendre d'après les données précédentes et notre définition de la « compréhension »). Il y a 18% des élèves qui n'utilisent jamais de division et 9% qui semblent ne comprendre aucun des quatre problèmes.

Si le nombre d'élèves réussissant (forme « division ») aux quatre problèmes est la modalité la plus représentée, elle ne représente en fait que 41% des élèves, alors que les élèves qui réussissent au moins un des problèmes représente 82%, la moitié des élèves qui réussissent à un des problèmes réussissent aux quatre. Le rapport est un peu plus élevé lorsqu'on s'intéresse à la réussite sous forme multiplicative : 56% contre 90% soit 0,62. Ceci signifie qu'apparemment, les élèves sont assez sensibles aux contextes, même pour les problèmes simples. Ce résultat nous incite à interroger les « contextes » dans les exercices qui sont proposés aux élèves, en situation d'apprentissage. Différents contextes sont-ils proposés aux élèves ?

Pour commencer à étudier cette question : à partir de nos données, nous regardons s'il y a des différences entre classes pour nos indicateurs. Une différence dans ces indicateurs pourrait signifier des différences dans les pratiques des enseignants.

Nous retenons les variables suivantes :

- R div est la moyenne des réussites « division » entre les quatre problèmes, c'est le nombre total de problèmes résolus avec une division sur le nombre total de problèmes posés,
- R mult est la moyenne des réussites « multiplicatives », R mult correspond à R div en remplaçant « division » par « division ou procédure produit »,
- avec div correspond aux élèves qui ont résolu au moins un des quatre problèmes avec une division,
- 4 div correspond aux élèves qui ont résolu les quatre problèmes en utilisant à chaque fois une division,
- avec mult et 4 mult correspondent à avec dev et 4 div en remplaçant « division » par « procédure multiplicative » (ou « division ou procédure produit »),
- avec mult correspond aux élèves qui ont utilisé au moins une procédures multiplicative pour résoudre un des quatre problèmes.

classe	Effectif classe	R div	R mult	avec div	4 div	4div / avec	avec mult	4 mult	4mult / avec
global	270	0,63	0,75	0,82	0,41	0,51	0,90	0,56	0,62
1	22	0,76	0,78	1,00	0,55	0,55	1,00	0,59	0,59
2	21	0,64	0,70	0,90	0,38	0,42	0,95	0,48	0,50
3	29	0,52	0,83	0,79	0,21	**0,26**	0,93	0,62	**0,67**
4	12	**0,42**	0,83	0,67	0,25	0,38	1,00	0,58	0,58
5	26	**0,88**	**0,92**	1,00	0,65	0,65	1,00	0,77	0,77
6	11	0,45	0,61	0,73	0,18	0,25	0,82	0,36	0,44
7	28	0,60	0,77	0,86	0,36	0,42	0,96	0,46	0,48
8	26	0,53	**0,55**	0,62	0,46	0,75	0,62	0,50	0,81
9	31	0,64	0,74	0,77	0,45	0,58	0,84	0,55	0,65
10	19	0,49	0,66	0,79	0,26	0,33	0,89	0,32	0,35
11	25	0,75	0,80	0,80	0,68	**0,85**	0,88	0,72	**0,82**
12	20	0,61	0,78	0,80	0,30	0,38	0,90	0,55	0,61

Commençons par la réussite globale. On observe une relative disparité des résultats selon les classes : la réussite moyenne par classe varie de 55% à 92% (multiplicative) et 42% à 88% (division). Il faut sans doute être prudent avec ces pourcentages dans la mesure où, dans certaines classes, les effectifs sont très faibles.

Les ratio 4mult/ avec mult et 4div/ avec div peuvent être très différents selon les classes, par exemple dans la classe 3, 0,26 contre 0,67 et dans la classe 11, 0,85 contre 0,82. Les deux classes ont pourtant sensiblement la même réussite (mult) moyenne aux problèmes. Dans la classe 3, seulement le quart des élèves qui fait une division réussit avec quatre divisions alors que 67% de ceux qui réussissent avec une procédure multiplicative réussissent aux quatre.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Dans la classe 11, les deux scores sont proches, tout simplement parce qu'il y a très peu de procédures multiplicatives.

La classe 8 a plutôt un bon ratio 4div/avec div (0,75) ce qui signifie que les trois quarts des élèves qui réussissent à un problème réussissent en fait aux quatre. En revanche, globalement, la réussite de la classe est médiocre : 53% en moyenne. En fait, 38% échouent aux quatre problèmes (62% des élèves réussissent à au moins un problème). En revanche, dans la classe 10, où la réussite est également médiocre (49% division et 66% multiplicative), 89% des élèves réussissent au moins une fois (11% échouent toujours) mais seulement 35% de ceux qui réussissent une fois réussissent toujours.

Ces différences sont-elles aléatoires, sont-elles le reflet d'éventuels « profils cognitifs » ou bien le produit de pratiques d'enseignement, le cas échéant, de quels types de pratiques d'enseignement ? Notre étude ne nous permet pas d'étudier davantage cette question, toutefois elle semble légitimer le fait qu'on s'y intéresse davantage.

3.3. Les problèmes de soustraction

STLg	Soustraction Texte LonGueur	101
SSCLg	Soustraction Schéma Case à cocher LonGueur	106
Sdis	Soustraction DIScret	208
SSLg	Soustraction Schéma LonGueur	210
diPa	DIstance entre les pancartes	109

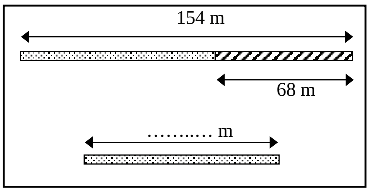
Pour les trois exercices STLg, Sdis et SSLg nous utilisons le même principe de codage mais certains codes sont spécifiques de SSLG, à cause du schéma. Pour diPa, les codes seront du même type mais l'exercice sera étudié séparément. Pour SSCLg, nous reprenons sensiblement les réponses cochées pour nos codes.

Rappelons les modalités de passation : pour l'exercice avec schéma et case à cocher, les élèves disposent de la règle graduée alors qu'ils ne l'ont pas pour le « même » exercice où ils doivent produire leur réponse, l'exercice SSLg.

- ### Les trois problèmes STLg, Sdis et SSLg

Nous rappelons les différents énoncés :

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

STLg	Sdis	SSLg
Pour fabriquer un tuyau d'incendie de 152m, les pompiers ont assemblé 2 tuyaux : un vert et un noir. Le tuyau noir mesure 68m. Combien mesure le tuyau vert ?	Les 142 élèves des 6 classes d'une école ont participé à une course d'endurance. Il y a 58 élèves qui n'ont pas terminé la course. Combien d'élèves ont terminé la course ?	

Comme pour les problèmes simples de division, nous définissons plusieurs types de réussite : la réussite en utilisant une soustraction (qui inclut le calcul mental), la réussite en utilisant une addition (à trou ou par tâtonnement), la réussite cumulée par ces deux moyens (réussite additive).

Codage des procédures et erreurs

L'indication des opérations s'entend, calculée ou non, avec ou sans erreur de calcul. Par ailleurs, on appelle respectivement grand nombre et petit nombre, les deux termes de la différence, c'est à dire les deux nombres de l'énoncé entrant en jeu dans une résolution correcte.

code	Description de la procédure
s	Présence de la soustraction attendue écrite : en ligne ou posée, calculée ou non, juste ou fausse.
Qm	Résultat juste sans procédure (ou avec une procédure fausse sans rapport avec la réponse) ou réponse fausse (sans procédure) qui semble être le résultat avec erreur de calcul du calcul mental de la soustraction (ou du complément).
Qr	Marques de calcul réfléchi pour calculer la différence (ou le complément).
la	Présence d'une addition en ligne : les termes sont la différence et le petit nombre, la somme est le grand nombre.
atr	Présence d'une addition à trou (en ligne ou posée) ou d'une addition posée : un des termes est le petit nombre, la somme est le grand nombre.
atat	Présence de plusieurs additions dont l'un des termes est le petit nombre.
strnt	Présence d'une soustraction à trou dont l'un des termes est le grand nombre et la différence le petit nombre.
aomu2	(STLg et SSLg) Présence de la multiplication par deux du petit nombre.
apb	(Sdis) Résolution juste du problème : « Les élèves de 6 classes de 142 élèves chacune ont participé à une course d'endurance. Il y a 58 élèves qui n'ont pas terminé la course. Combien d'élèves ont terminé la course ? »
aod2 ou aod6	Présence de la division par 2 du grand nombre (STLg et SSLg) ou par 6 du grand nombre (Sdis).
ao2 ou ao6	Autre opération avec 2 (pour STLg ou SSLg) ou avec 6 (pour Sdis)
aoXXXdXX	Présence de la division du grand nombre par le petit nombre

code	Description de la procédure
aoa	Présence de l'addition du grand et du petit nombre
ao	Présence d'une autre opération fausse
estim prop	(SSLg) Présence d'un nombre qui semble être une estimation de la longueur inconnue prenant en compte les valeurs numériques et les proportions du dessin.
estim absol	(SSLg) Présence d'un nombre qui semble être la mesure du petit trait en cm.
9999	Autre réponse fausse sans procédure
99999	Absence de réponse et de procédure
R soustraction	Réussite soustraction : présence d'une soustraction ou bien marque de calcul réfléchi ou réponse juste sans procédure (s, Qm ou Qr)
R addition	Réussite addition : présence d'une adition à trou, d'une addition tâtonnée, d'une addition en ligne ou posée (atr, atat, la)
R additive	Cumul des deux réussites précédentes, R soustraction et R addition.

Quelques remarques sur les procédures :

La procédure « la » (addition en ligne) peut correspondre à deux procédures différentes : une addition à trou calculée en ligne dont il ne reste plus que la trace finale, un complément calculé de tête dont on marque la trace. Quoi qu'il en soit, l'élève écrit une addition et non une soustraction, on peut donc penser que c'est ce qu'il a voulu calculer, ce qui est moins clair dans les traces d'un calcul « en avançant » (dans Qr).

Les additions à trou sont difficiles à repérer car le plus souvent, sur le papier, les trous sont comblés. Parfois, il n'y a pas de doute. Parfois, on voit juste la trace d'une addition posée. Deux interprétations sont en fait possibles pour les additions posées mais nous avons retenu celle qui nous semble la plus probable : l'élève a effectivement calculé une addition à trou. Une autre interprétation consiste à dire que l'élève a calculé mentalement la différence (par addition ou soustraction) et a vérifié en posant l'addition. Signalons qu'un certain nombre de productions présentaient deux calculs : une soustraction et l'addition correspondante. Nous avons interprété l'addition comme une vérification de la soustraction. Nous avons donc comptabilisé ces procédures avec les « soustractions ».

Des élèves échouent à Sdis en résolvant un autre problème, un problème à deux opérations qui utilisent la « donnée inutile ». Ils résolvent le problème (improbable) suivant :

> Les élèves de 6 classes de 142 élèves chacune ont participé à une course d'endurance. Il y a 58 élèves qui n'ont pas terminé la course. Combien d'élèves ont terminé la course ?

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Ils calculent le nombre total d’élèves : 6×142, puis utilisent une soustraction pour la deuxième partie de leur exercice. Pour cette raison, nous avons choisi d’inclure ces élèves parmi les réussites. Ils sont repérés par le code « apb ».

Deux procédures sont spécifiques à SSLg, estim absol et estim prop, on les retrouve, plus ou moins bien mises en évidence dans tous les énoncés où des informations sont à prendre sur le schéma. Nous les discuterons avec les problèmes 4op.

Quantification des procédures

RPSTLg	Eff.	%	%
s	142	51,82	
Qm	14	5,11	
Qr	7	2,55	
R soustraction			59,49
la	4	1,46	
atr	31	11,31	
atat	12	4,38	
R addition			17,15
R additive			76,64
strnt	0	0,00	
aomu2	7	2,55	
aod2	1	0,36	
ao2	11	4,01	
ao152d68	6	2,19	
ao	5	1,82	
aoa	5	1,82	
9999	12	4,38	
99999	17	6,20	
Total	274	100,00	

RPSdis	Eff.	%	%
s	204	75,00	
Qm	15	5,51	
Qr	4	1,47	
apb	9	3,31	
R soustraction			85,29
la	1	0,37	
atr	3	1,10	
atat	2	0,74	
R addition			2,21
R additive			87,50
strnt	1	0,37	
aod6	5	1,84	
ao6	6	2,21	
ao142d58	2	0,74	
ao	10	3,68	
aoa	0	0,00	
9999	6	2,21	
99999	4	1,47	
Total	272	100,00	

RPSSLg	Eff.	%	%
s	176	64,94	
Qm	17	6,27	
Qr	5	1,85	
R soustraction			73,06
la	1	0,37	
atr	22	8,12	
atat	4	1,48	
R addition			9,96
R additive			83,03
strnt	0	0,00	
aomu2	2	0,74	
ao154d68	5	1,85	
ao	6	2,21	
aoa	1	0,37	
estim prop	5	1,85	
estim absol	7	2,58	
9999	11	4,06	
99999	9	3,32	
Total	271	100,00	

problème	STLg	Sdis	SSLg
R addition	17,15	2,21	9,96
R additive	76,64	87,50	83,03
ratio	0,22	0,03	0,12

Analyse des résultats :

L'exercice STLg est le moins bien réussi tant du point de vue de la réussite « soustraction » qu'« additive ». Il faut rappeler que cet exercice est le premier du questionnaire et qu'on ne peut exclure que des élèves aient été perturbés par le dispositif. Néanmoins, ce n'est peut-être pas la seule explication de la difficulté des élèves. Entre les deux autres exercices Sdis et SSLg, la différence de réussite « additive » n'est pas significative mais la différence de réussite par procédure « soustraction » l'est. L'utilisation des additions est plus importante pour résoudre le problème SSLg que pour Sdis (elle correspond respectivement à 12% et 3% des réussites). Ce phénomène est plus remarquable dans STLg où il y a 22% de réussites « addition » parmi les réussites. STLg et SSLg sont deux problèmes de longueur dans laquelle la mise bout à bout est évoquée par un texte ou un dessin selon le problème. Ce fait n'est peut-être pas indépendant de l'utilisation d'une procédure « addition ». En fait, nous pensions *a priori* que la mise bout à bout en schéma était susceptible d'être emblématique de la soustraction, une figure de référence, en quelque sorte. Il ne semble pas que ce soit le cas, même si 73% des élèves l'y reconnaissent.

Un peu comme nous l'avons fait pour les problèmes de division, nous regardons les comportements d'un élève donné face aux différents problèmes.

nombre (n) de problèmes résolus	Nombre d'élèves qui réussissent n problèmes avec			Total
	des additions seulement	des soustractions seulement	addition et soustraction	
0				13
1	0	17		17
2	3	54	10	67
3	2	130	40	172
	5	201	50	

Parmi les élèves présents pour la résolution des trois problèmes (269), 13 élèves n'en résolvent aucun (5%). 64% résolvent les trois et 49% utilisent trois fois la même procédure pour ce faire (addition à trou ou soustraction). 17 élèves (6%) en résolvent un seul, tous par soustraction. Cinquante élèves utilisent les deux procédures (ce qui implique qu'ils résolvent au moins deux problèmes) : addition et soustraction. Ceci signifie aussi qu'environ 1 élève sur 5 utilise au moins une fois une procédure addition et une procédure soustraction.

Signalons que les trois élèves qui utilisent l'addition à trou pour résoudre Sdis l'utilisent aussi pour résoudre les autres problèmes (l'un d'entre eux est absent pour STLg). On peut penser que l'addition à trou est la technique opératoire de la soustraction pour ces trois élèves : elle

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

est performante dans les différents cas que nous avons évalués. Tous les autres élèves qui utilisent l'addition à trou utilisent une procédure « soustraction » ou échouent lorsqu'ils résolvent Sdis. Néanmoins certains d'entre eux utilisent aussi la soustraction pour résoudre l'autre problème de longueur. D'une certaine façon, ces élèves ont deux techniques opératoires. Pour certains d'entre eux, elles sont interchangeables selon les types de problèmes, pour d'autres non.

Les additions tâtonnées représentent à peine 5% des procédures des élèves dans STLg. Elles sont probablement davantage la trace de l'apprentissage de la technique opératoire de la division que de celle de la soustraction. Plus précisément, 16 élèves en utilisent (dont deux, deux fois, et résolvent le troisième – de longueur – par calcul mental ou réfléchi). Les 14 restant se répartissent comme suit : 11 d'entre eux utilisent aussi une soustraction à un autre moment (et éventuellement une addition à trou), l'un une procédure de calcul mental ou réfléchi, un autre une addition à trou et le dernier est absent pour les deux autres problèmes. Aussi, quand elle est utilisée, la plupart du temps, il ne semble pas que cette procédure constitue le seul moyen que l'élève connaisse pour résoudre les problèmes soustractifs. Faut-il voir là une hiérarchie des procédures que ces élèves ignorent ? Une automatisation insuffisante de l'emploi des quatre opérations qui est mise à mal, par exemple, dans les situations stressantes ?

Que peut-on penser de l'utilisation de procédures « addition » pour résoudre ces problèmes soustractifs ? La technique de l'addition à trou n'est pas plus coûteuse, en calcul, que celle de la soustraction. Apparemment, parmi nos problèmes, certains se prêtent davantage à ce type de traitement qu'à un traitement soustractif. Néanmoins, en termes économiques, la part importante des additions à trou laisse penser qu'elles sont la trace de l'apprentissage de la technique opératoire de la soustraction, ce qui pourrait revenir, pour certains élèves, à avoir appris deux techniques. Vaut-il mieux apprendre deux techniques qui ne soient pas reliées mais qui permettent de résoudre des problèmes différents plutôt que d'apprendre une technique et la diversité des conditions d'application de cette technique ?

Est-ce un problème que les élèves ne reconnaissent pas « la bonne opération », la soustraction en l'occurrence ? Est-ce un problème pour l'apprentissage de l'algèbre ? Une bonne maîtrise de l'arithmétique est-elle nécessaire pour une bonne entrée dans l'algèbre ?

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Croisement de variables

Nous donnons ci-après les tableaux croisés pour nos trois problèmes. Quels sont ceux qui se ressemblent en dépit des différences de réussite ? Pour étudier cette question, nous calculons la statistique « kappa »

Rappelons que le « kappa » vise à évaluer si les élèves se comportent de la « même » façon devant deux exercices différents : ici cette « façon » est caractérisée soit par le choix d'une opération ou l'échec. Plus le « kappa » est grand (au maximum égal à 1), plus les élèves se comportent de la même façon.

Le résidu est l'écart entre l'effectif observé et l'effectif théorique en cas d'indépendance.

SSLg*STLg			SSLg						Total
			échec		addition		soustraction		
STLg	échec	Effectif (Résidu)	26	(15,5)	3	(-3,1)	34	(-12,4)	63
	addition	Effectif (Résidu)	5	(-2,5)	16	(11,7)	24	(-9,1)	45
	soustraction	Effectif (Résidu)	14	(-12,9)	7	(-8,6)	140	(21,5)	161
Total		Effectif	45		26		198		269

SSLg*Sdis			SSLg						Total
			échec		addition		soustraction		
Sdis	échec	Effectif (Résidu)	15	(9,4)	4	(0,7)	14	(-10,1)	33
	addition	Effectif (Résidu)	0	(-1,0)	5	(4,4)	1	(-3,4)	6
	soustraction	Effectif (Résidu)	31	(-8,4)	18	(-5,1)	183	(13,5)	232
Total		Effectif	46		27		198		271

Sdis*STLg			Sdis						Total
			échec		addition		soustraction		
STLg	échec	Effectif (Résidu)	16	(8,3)	0	(-1,2)	47	(-7,1)	63
	addition	Effectif (Résidu)	5	(-0,6)	3	(2,1)	38	(-1,5)	46
	soustraction	Effectif (Résidu)	12	(-7,7)	2	(-1,0)	147	(8,7)	161
Total		Effectif	33		5		232		270

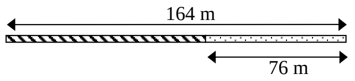
Procédures	Kappa
SSLg*STLg	0,358
SSLg*Sdis	0,286
Sdis*STLg	0,155

Les valeurs de kappa semblent indiquer que les exercices Sdis et STLg évaluent les objets les plus différents, viennent ensuite Sdis et SSLg et enfin STLG et SSLg qui sont plus concordants que les autres. Ceci pourrait signifier que le contenu, à savoir la mise bout à bout de longueurs, est un meilleur facteur pour la concordance que le registre de l'énoncé du problème : un texte. En outre, alors que Sdis et SSLg sont réussis avec des scores assez proches (plus proches que STLg et SSLg en particulier), du point de vue des connaissances des élèves, ces deux problèmes sont plus éloignés que les deux versions du même problème dans les versions textes et schémas.

- L'exercice soustraction, schéma de longueurs, cases à cocher (SSCLg)

Rappel de l'énoncé :

SSCLg



Entoure le calcul qui permet de trouver la longueur à rayures :

164 : 76	164 : 2
76 × 2	164 - 76
76 - 164	164 + 76

Le pré-test nous avait montré que les élèves avaient des difficultés à interpréter la consigne. Par suite nous avions modifié la forme de plusieurs exercices et avions gardé un seul exercice de ce type. Nous avons retrouvé les difficultés du pré-test. Il semble que des élèves interprètent la consigne comme la question de savoir si les calculs donnés sont susceptibles de fournir la même valeur numérique que celle qu'ils obtiendraient, par un moyen de leur choix, pour la longueur cherchée.

Beaucoup d'élèves ont écrit des calculs. Un seul a écrit une addition à trou sans cocher de case, il est comptabilisé avec les absences de réponse. Nous ne savons pas si les absences de réponse sont le fait d'une difficulté à comprendre ce qu'il faut faire ou bien la marque que les élèves ne trouvent pas la réponse qu'ils cherchent, l'addition à trou, par exemple.

Nous faisons ci-après quelques commentaires sur les réponses et quantifions les réponses des élèves. Plusieurs élèves ont coché les deux écritures soustractives, nous les avons comptabilisés avec ceux qui ont coché « 76-164 ».

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

SSCLg		Effectif	%	
s	Réponse correcte : seule la soustraction est cochée ou bien l'élève a posé une soustraction.	164	59,9	65,3
s2	Les deux soustractions sont entourées : 76-164 et 164-76, ou bien seule 76-164 est entourée.	15	5,5	
m2	76×2 est entouré ou bien l'élève a effectué ce calcul et lui seulement.	9	3,3	
d76	164 : 76 est entouré ou bien l'élève a effectué ce calcul et lui seulement.	19	6,9	
d2	164 : 2 est entouré ou bien l'élève a effectué ce calcul et lui seulement.	12	4,4	
a	164 + 76 est entouré ou bien l'élève a effectué ce calcul et lui seulement.	15	5,5	
99999	Absence de réponse	31	11,3	
9999	Autres réponses : la plupart du temps plusieurs cases sont cochées.	9	3,3	
Total		274	100,0	

Les réponses « fausses » telles que d76 ou d2 sont beaucoup plus nombreuses que dans les exercices libres. Nous ne savons pas interpréter cela ou plutôt nous proposons toujours la même interprétation double : difficulté à comprendre ou bien la réponse cherchée n'est pas dans les réponses proposées. Pour les tableaux suivants, nous considérons que l'élève a réussi même s'il a coché la « mauvaise » soustraction (76-164).

Croisement des réponses avec SSLg, STLg et Sdis

Nous nous intéressons en particulier aux procédures additives. Dans ce qui suit, nous croisons ce que nous avons appelé le « sens » et la reconnaissance de l'opération pour les différents problèmes de soustraction avec la réussite à SSCLg (définie comme procédure s ou s2).

	Kappa
opSSLg * SSCLg	,281
sensSSLg * SSCLg	,284
opSTLg * SSCLg	,318
sensSTLg * SSCLg	,311
opSdis * SSCLg	,109
sensSdis * SSCLg	,144

De ce tableau, il ressort que réussite et opération ne sont pas très discriminants pour la ressemblance des problèmes de soustraction. En revanche, l'exercice dans le discret est « plus » différent de SSCLg que les deux exercices sur la longueur.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Phénomène d'apprentissage ?

Nous avons vu que la réussite à SSLg est assez nettement supérieure à la réussite à STLg et à SSCLg. Temporellement, SSCLg est situé entre SSLg et STLg. Malgré les difficultés induites par SSCLg probablement peu habituel dans sa forme, peut-on considérer que SSCLg a été un moyen d'apprentissage ? Il nous semble que la forme de l'exercice est susceptible d'apporter une rétroaction à certains élèves, en particulier à ceux qui chercheraient une addition à trou. La forme encouragerait donc à utiliser la soustraction plutôt que l'addition à trou sans SSLg même quand les élèves l'ont utilisée pour STLg. Cela correspond à l'observation.

- Le problème « distance entre les pancartes » (diPa)

diPa

Sans schéma

Kim fait un voyage en vélo. Peu après son départ, il voit une première pancarte :

NEVERS	**69 km**	→
TOURS	**132 km**	←

Il pédale longtemps. Beaucoup plus tard, sur la même route, il voit une deuxième pancarte :

NEVERS	**153 km**	→
TOURS	**48 km**	←

Kim se rapproche d'une des deux villes. Laquelle ?
Quelle est la distance entre les deux pancartes ?

Avec schéma

Kim fait un voyage en vélo. Peu après son départ, il voit une première pancarte :

NEVERS	**69 km**	→
TOURS	**132 km**	←

Il pédale longtemps. Beaucoup plus tard, sur la même route, il voit une deuxième pancarte :

NEVERS	**153 km**	→
TOURS	**48 km**	←

TOURS NEVERS

Kim se rapproche d'une des deux villes. Laquelle ?
Quelle est la distance entre les deux pancartes ?

La première question ne nous semble pas très significative dans la mesure où nous voulions évaluer la « compréhension » de la situation qui passe par la distinction entre « être le plus près de » et « se rapprocher de », or les nombres que nous avons choisis ne nous permettent pas de distinguer les deux puisqu'on se rapproche de la ville qui est la plus proche à la fin.

Pour le calcul de la distance entre les pancartes, quelques élèves donnent un résultat direct. Nous inférons le calcul qu'ils font. Un nombre non négligeable d'élèves effectuent plusieurs calculs, qui correspondent éventuellement à un même objet (la distance entre Tours et Nevers, la distance entre les pancartes).

Nous incluons toutes les classes pour cet exercice.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

PdiPa		Effectif	%	
s	Présence d'au moins une des soustractions attendues (dont 20 élèves qui écrivent les 2 soustractions)	82	29,93	
Qm	Réponse attendue sans procédure visible (dont 2 élèves qui font probablement une erreur de calcul)	15	5,47	39,78
Q par add	Addition à trou ou addition en ligne ou addition tâtonnée (1 élève) *ad hoc* (dont 2 élèves qui écrivent les 2 additions à trou)	12	4,38	
str	Présence d'une soustraction à trou.	3	1,09	
dtn	Calcul de la distance entre Tours et Nevers (présence d'une des deux additions)	10	3,65	
p	Calcul de la différence entre les deux nombres d'une pancarte (153-48 ou 132-69).	37	13,50	
aoa	Calcul de la somme de deux distances à la même ville (69+153 ou 132+48).	20	7,30	
aos	Calcul de la différence entre les deux nombres « opposés » (69-48 ou 153-132).	8	2,92	
9999	autre réponse fausse (dont 6 calculs multiplicatifs)	54	19,71	
99999	Absence de réponse et de procédure	33	12,04	
	Total	274	100,00	

Globalement, la réussite à cet exercice comparé aux autres exercices de soustraction est plutôt médiocre. A peine 40% des élèves réussissent. C'est encore moins qu'aux évaluations 6ème (52% de réussite) néanmoins les nombres sont plus compliqués : ils imposent davantage de penser qu'il faut faire une opération contrairement aux évaluations 6ème où l'écart à trouver n'était de que 3 et compter pouvait suffire.

3.4. Les problèmes avec opérations sur objets

- Les problèmes de soustraction avec opération sur objet

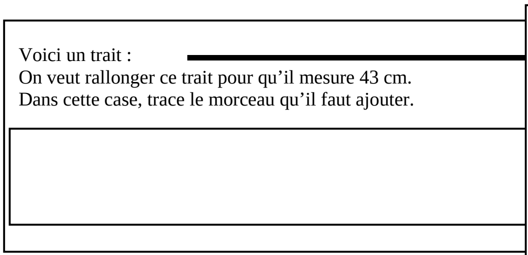
allR	rALLonger avec la Règle	112
allB	rALLonger avec la Bande	202

Enoncés

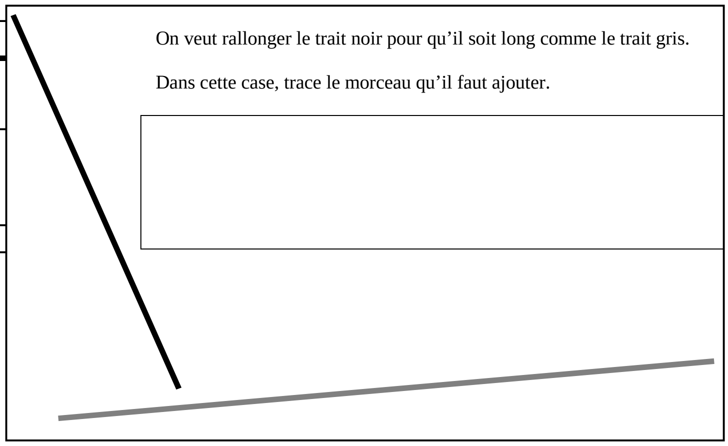
Nous rappelons d'abord les énoncés de ces deux problèmes.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

allonger avec la règle : allR



allonger avec la bande : allB



Pour allR, les élèves n'avaient pas de bande mais une règle disponible pour toute la première partie. Pour l'exercice allB, les élèves n'avaient pas de règle mais une bande de longueur intermédiaire entre les longueurs des deux traits (disponible pour toute la deuxième partie).

Nous donnons maintenant les résultats des élèves aux deux exercices en décrivant les procédures et codages. Comme on peut s'en douter compte tenu de la différence des instruments, les procédures sont très différentes d'un exercice à l'autre. Nous traitons séparément les deux exercices.

Procédures et réponses pour Allonger avec la règle, allR

Pour cet exercice, les élèves disposent d'une règle graduée de longueur 30 cm. Après la passation dans les classes 1 et 2, l'énoncé a été modifiée. Nous n'avons pas retenu les réponses de ces deux classes.

Beaucoup d'élèves n'indiquent rien d'autre que le trait. Il est alors difficile de reconstruire leur procédure. Toutefois, nous tentons d'interpréter certains éléments et nous pensons être capable d'en reconstruire certaines. Notre quantification nous semble néanmoins peu fiable compte tenu de la difficulté à interpréter certains éléments.

Nous donnons d'abord l'ensemble des procédures (et effectifs), puis nous détaillons les procédures qui ont permis aux élèves de réussir.

Les procédures de calcul s'entendent, que le résultat soit juste ou faux, dans le tableau ci-dessous.

RPallR		Eff.	%
R sans calcul	Réussite sans procédure de calcul visible (pour une reconstruction des procédures, voir tableau suivant)	62	27,07

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

soustraction	Présence d'une soustraction : 43-18	63	27,51
addition	Présence d'une addition ou d'addition à trou : 18+25=43 ou 18+…=43 (17élèves) ou d'addition « tâtonnée » (8 élèves)	25	10,92
calcul mental ou réfléchi	Présence d'indices de calcul réfléchi : 2, 10, 10, 3 ou calcul mental probable : réponse « 25 » écrite (sans calcul visible), réponse erronée « 35 » ou tracé d'un trait de 35 cm (réponses correspondant probablement à une erreur de retenue)	11	4,80
T22 ou cmp40	Tracé d'un trait de longueur 22 cm ou d'un calcul indiquant la substitution de 43 par 40 (18+…=40 ou 40-18).	7	3,06
T24 ou T26	Tracés de 24 ou 26 cm. Erreur à 1 cm près. Parfois, on voit des marques de chaque centimètre. On peut penser que ces tracés sont obtenus en traçant, 1 par 1, les centimètres manquants et en égrenant la comptine de 1 en 1 (19, 20…). Par ailleurs les erreurs à 1 près peuvent s'expliquer par une inattention dans le dénombrement mais aussi par une difficulté à s'organiser, du type « piquet ou intervalle ».	12	5,24
grand	Autres tracés de plus de 27 cm	7	3,06
9999	Autres réponses fausses	34	14,85
99999	Sans procédure ni réponse	8	3,49
	Total	229	100,00

Le tableau suivant propose les procédures pour des tracés corrects. Les trois premières lignes du tableau détaillent les réussites sans procédure du tableau précédent, celles qui suivent indiquent les réussites avec les procédures de calcul du tableau précédent :

allR	Procédures pour les réussites	Eff.	%
R sans	Bonne réponse à 2 mm près sans procédure visible (on ne peut exclure que des élèves dénombrent sans marquer chaque centimètre)	39	17,03
R lb	Tracé correct à 2 mm près. Ligne brisée ou trait apparemment tracé en plusieurs morceaux. Au moins trois sortes de constructions : comptage en avançant par 10 (par exemple 18 à 28, 38, 40, 43 pour des traits de longueur 10, 10, 2, 3) ; passage par un complément à 20 ou 30 (par exemple 18 à 20, 30, 40, 43 pour 2, 10, 10, 3) ; comptage en reculant (par exemple 43 à 40, 30, 20, 18 pour 3, 10, 10, 2).	12	5,24
R dnb	Bonne réponse à 2 mm près, trait apparemment tracé centimètre par centimètre (on ne peut exclure que des élèves tracent en marquant chaque centimètre sans pour autant qu'ils dénombrent)	11	4,80
soustraction	Présence d'une soustraction : 43-18	57	24,89
addition	Présence d'une addition (ou addition à trou) : 18+25=43 ou 18+…=43 (17élèves) ou d'addition « tâtonnée » (8 élèves)	20	8,73
Calcul mental ou réfléchi	Présence d'indices de calcul réfléchi : 2, 10, 10, 3 ou calcul mental probable : réponse « 25 » écrite (sans calcul visible)	8	3,49

allR	Procédures pour les réussites	Eff.	%
Échec		82	35,81
	Total	229	100,00

Bilan : réussite, échec à allB (RallB)	Effectif	% / Expr.
Réussite à 2 mm près (trait ou ligne brisée)	147	64,19
Échec ou réponse absente	82	35,81
Total	229	100,00

Près des deux tiers des élèves réussissent. C'est moins que pour les exercices de soustraction ordinaire. Cet exercice est sans doute un peu inhabituel car il demande de prendre une information sur le dessin avec la règle, néanmoins, les absences de réponses sont plus rares que dans l'exercice MLg (multiplication des longueurs avec objets) par exemple. Les procédures pour réussir sont diverses, certaines relèvent du calcul d'autres non. Le quart des élèves écrit une soustraction. Comme les nombres sont assez petits, il était assez facile pour les élèves de calculer mentalement. Cet exercice consiste à chercher une transformation contrairement aux autres sur la soustraction, nous ne savons pas dans quelle mesure ceci intervient dans la difficulté.

Procédures et réponses pour Allonger avec la bande, allB

Pour reconstituer les procédures dans l'exercice allB, nous « lisons » dans les bandes que les élèves avaient à leur disposition. Nous tentons d'interpréter les éventuelles marques qui s'y trouvent ainsi que celles qui apparaissent sur le livret de chaque élève. A notre grande surprise, la procédure qui consiste à reporter la longueur du trait noir sur le trait gris, puis à reporter et tracer la différence dans le cadre, grâce à la bande, est loin d'avoir été la seule procédure correcte utilisée par les élèves.

En outre, quelques procédures ou réponses fausses sont prégnantes. Au cours du pré-test, les observateurs avaient repéré des élèves qui n'utilisaient pas la bande pour reporter mais leurs doigts. Au cours du questionnaire, un certain nombre d'élèves semblent tracer des traits sans utiliser de marques sur la bande. Nous n'avions pas d'observateur, nous repérons les réponses pour lesquelles ne semble correspondre aucune ou qu'une partie des marques. Il se peut toutefois que certains élèves très méticuleux aient fait des marques très légères sur la bande ou le livret et que nous ne les ayons pas vues, il se peut aussi que certains élèves aient gommé ou effacé des marques (en dépit de notre demande contraire). Par ailleurs, certains élèves ont

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

utilisé leur bande pour de nombreux exercices, elles sont alors pleines de traces qu'il n'est pas toujours facile d'attribuer au bon exercice…

Nous appelons « transformation », la longueur du segment qu'il faut ajouter. On repère majoritairement trois types de traces constituées par des marques sur la bande et sur les traits. Ils correspondent, pensons-nous, à trois procédures :

1) 3 marques en tout : une marque sur le trait long, celle de la longueur du trait court et 2 marques sur la bande, celles des longueurs du trait court et de la transformation (différence des longueurs des traits long et court). Reconstruction de la procédure : report du trait court sur le trait long via la bande, puis report de la transformation sur la bande pour effectuer le tracé dans le cadre (procédure attendue),
2) 3 marques en tout : 2 marques sur la bande, celle de la longueur du trait court et celle de la différence entre le trait long et la bande ; une marque sur le trait long, marque de la longueur de la bande. Le tracé dans le cadre montre alors le plus souvent la mise bout à bout de deux petits traits : écart entre la bande et le trait court, écart entre le trait long et la bande. Reconstruction de la procédure : la longueur de la transformation est obtenue dans l'action, en mettant bout à bout deux écarts : du trait court à la bande, de la bande au trait long (procédure « en avançant », dynamique),
3) 4 marques en tout : 2 marques sur la bande, celles des longueurs du trait court et de la transformation ; 2 marques sur le trait long, celles des longueurs du trait court et de la bande. Ces traces sont plus difficiles à interpréter car nous ne connaissons pas l'ordre des reports, sur le trait long en particulier, ni même s'ils ont tous été utilisés. Reconstruction de la procédure (si toutes les marques ont été utilisées) : report du trait court sur le trait long via la bande, puis, à la suite, toujours sur le trait long report de l'écart entre la bande et le trait court. Le trait long est alors partagé en trois : la longueur du trait court, l'écart entre la bande et le trait court, « le reste ». La transformation est alors visible sur le trait long : c'est la somme de l'écart entre la bande et le trait court et « le reste ». Pour finir report de la transformation obtenue sur le trait long via la bande. Ce serait une autre procédure de calcul « en avançant », mais plus statique. (procédure « en avançant », statique)
4) D'autres procédures peuvent être utilisées :
    a. Commencer comme le type 2 mais après avoir reporté la longueur de la bande sur le trait long et la longueur du trait noir sur la bande, on « retourne » la bande sur le trait long en faisant coïncider les deux marques. On marque la fin

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

du trait long sur la bande. La transformation est alors obtenue directement sur la bande et reportée en une seule fois dans le cadre (possible pour un élève R2bis compté dans R2 : la somme des deux longueurs est peu visible dans le cadre).

b. Commencer comme le type 3, avec deux marques sur le trait long, mais reporter la transformation en deux temps. Tout se passe comme si l'élève n'avait pas vu la transformation se construire sur le trait long : il fait dans le cadre les reports bout à bout de chaque écart obtenu sur le trait long (un peu comme dans le type 2) (possible pour 9 élèves R3bis comptés dans R3, somme de deux longueurs bien visibles dans le cadre avec marques des longueurs du trait court et de la bande sur le trait gris).

allB	Procédures détaillées	Effectif	%	
R1	Procédure attendue	79	28,94	
R2	Procédure de type 2 (en avançant, dynamique) et type 2 bis (1 élève)	22	8,06	
R3	Procédure de type 3 (en avançant, statique) et type 3 bis (9 élèves)	32	11,72	51,65
R autre	Réussite mais manque tout ou partie des marques.	8	2,93	
perte	Bonnes marques sur les différents éléments, mais tracé faux. Confusion possible entre les différentes marques, l'orientation de la bande.	12	4,40	
long-bande	Le trait a pour longueur l'écart entre la bande et le trait long. Marque de la longueur de la bande sur le trait long, marque de l'écart entre les deux sur la bande. Éventuellement report de la longueur du trait court sur la bande et/ou sur le trait long.	43	15,75	
b, n ou g	Tracé d'une des trois longueurs : celle de la bande, du trait court (8 élèves) qui nécessite un report, du trait long (7 élèves) qui nécessite une addition	18	6,59	
9999	Autres réponses fausses. Parmi ces réponses, certaines sont accompagnées de marques, d'autres non. Certaines ont une longueur pas trop éloignée de la réponse attendue (5 mm), elles peuvent être le produit de procédures correctes, ce qui montrerait un grand manque de précision dans l'utilisation de l'instrument. Certaines encore moins précises peuvent aussi être produit de reports « avec les doigts », comme observé pendant le pré-test.	48	17,58	
99999	Absence de réponse	11	4,03	
	Total	273	100,00	

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Environ la moitié des élèves réussit et la procédure attendue n'apparaît que pour 30% des élèves. Près de 20% des élèves fournissent une bonne réponse obtenue avec une autre procédure. On peut penser pour ces élèves : soit qu'ils n'envisagent de procédure soustractive pour un problème dans lequel il faut déterminer une transformation positive et qu'ils calculent sur les objets « en avançant », soit que la bande n'est pas perçue spontanément comme un instrument mais comme un troisième objet, au même titre que les traits gris et noir. On peut sans doute rapprocher les réponses codées « long-bande » de cette dernière difficulté (près d'1 élève sur 6). De même, les élèves qui utilisent l'écart entre leurs doigts (non repérés ici) pour reporter les longueurs alors qu'ils disposent d'une bande perçoivent bien qu'ils ont besoin d'un instrument mais ne le reconnaissent pas dans la bande.

Nous pensons que la soustraction « sur objet » n'est pas enseignée actuellement. Le taux relativement faible d'élèves (moins de 30%) qui en font une tend à montrer que les élèves n'inventent les opérations sur les objets si on ne les leur enseigne pas.

Comparaison allB et allR

Les différences de réussite entre allR et allB sont significatives mais d'une part il y a beaucoup de procédures sans calcul dans allR (dues au compromis entre taille des nombres, choix de l'unité et taille du papier), d'autre part la bande comme instrument semble poser des difficultés importantes. Par suite il nous est difficile de tirer des conclusions quant à la différence éventuelle de reconnaissance de l'opération sur les objets mesurés et sur les objets non mesurés. Néanmoins, la question de savoir si les opérations sur les objets sont susceptibles de contribuer à l'apprentissage des opérations sur les nombres et réciproquement nous semble toujours pertinente mais notre méthodologie ne nous permet pas d'y répondre.

- Les problèmes de multiplication avec opération sur objet

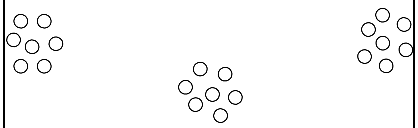
MLg	Multiplication sur objet, Longueur	103
Mdis	Multiplication sur objet, DIScret	212

Nous rappelons les énoncés de ces deux problèmes.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

- Énoncés

MLg	Mdis
On trace, bout à bout, des petits traits qui ont tous la même longueur. On en a tracé trois et on a obtenu ce grand trait :  Si on traçait 78 petits traits bout à bout, quelle serait la longueur du grand trait ?	On fait des paquets de jetons, tous identiques. On en a fait trois :  Si on faisait 84 paquets, combien utiliserait-on de jetons ?

Pour ces deux exercices, les procédures de calcul ont été proches et peu variées. En revanche, certaines erreurs sont spécifiques de certaines grandeurs. Pour les raisons déjà indiquées, dans la classe 1, l'exercice MLg n'a été abordé que par quelques élèves, nous supprimons cette classe de nos résultats.

Analyses croisées pour MLg et Mdis

Nous rassemblons ici les réponses et procédures en plusieurs catégories :

- les procédures qui montrent que l'élève a compris le sens du problème ce qui semble être à peu près équivalent à la reconnaissance de l'opération (on repère seulement deux procédures archaïques : addition itérée de 7, 1 élève ; dessin de paquets de 7, 1 élève),
- les procédures fausses qui utilisent les nombres 6 ou 18 (respectivement 7 ou 21), le plus souvent dans une opération,
- les procédures fausses qui n'utilisent pas les nombres 6 ou 18 (respectivement 7 ou 21), le plus souvent dans une opération, souvent avec 3 (dans les deus tiers des cas).
- 5 élèves graduent le trait de l'exercice MLg de façon apparemment arbitraire, ils sont comptés avec les autres réponses fausses s'ils en ont donné une, avec les absences de réponses sinon.

Dans la plupart des cas, nous n'indiquons pas s'il s'agit d'une réponse sans procédure (écrite directement) ou si une procédure est écrite.

MLg		Effectif	%/Expr.
R	Présence de la multiplication : 78×6 ou du résultat juste 468 (82 élèves) ou erreur probable dans le calcul mental de 78×6 (2 élèves)	123	49,00
avec 18 ou 6	Procédure (ou réponse) fausse avec 18 ou 6, dont 78×18 (20 élèves), 78 : 18 (5 élèves), 18 (9 élèves).	44	17,53

MLg		Effectif	%/Expr.
sans 18 ni 6	Opération sans 18 ni 6, dont 78×3 (20 élèves), 78 : 3 (7 élèves).	40	15,94
9999	Autre réponse fausse sans procédure	15	5,98
99999	Absence de réponse et de procédure	29	11,55
Total		251	100,00

Mdis		Effectif	%/Expr.
R	Présence de la multiplication : 84×7 ou du résultat juste 588 (136 élèves) ou d'une procédure archaïque (2 élèves).	179	65,81
avec 21 ou 7	Procédure (ou réponse) fausse avec 21 ou 7, dont 84 : 7 (22 élèves).	40	14,71
sans 21 ni 7	Opération sans 21 ni 7, dont 84×3 (11 élèves), 84 : 3 (9 élèves).	33	12,13
9999	Autre réponse fausse sans procédure	9	3,31
99999	Absence de réponse et de procédure	11	4,04
Total		272	100,00

Le taux de non réponse pour MLg est assez important. Il est fort probable que des élèves ont été désemparés par cet exercice où ils devaient utiliser leur règle graduée sans qu'on le leur dise. La différence de réussite est importante entre les deux exercices. Mdis qui demandait aussi de prendre une information sur le dessin a semble-t-il moins perturbé les élèves. Cette différence peut éventuellement être attribuée en partie à la place de MLg (plutôt en début de questionnaire) mais on peut aussi penser que les élèves ont peu l'habitude de prendre une information par mesurage dans le cadre d'un problème d'arithmétique. La procédure erronée qui consiste à multiplier le nombre par paquets par le « cardinal de ce qui est dessiné » (78×18 et 84×21) est utilisée par 8% des élèves dans le cas de la longueur et non quantifiée (car absente ou très marginale) dans le cas discret. Il nous semble que les deux exercices ont une forme proche. Dans les deux cas il faut mettre en relation toutes les informations écrites et le dessin. Il ne nous semble pas qu'il y ait des informations « inutiles », mais plutôt que la mise en relation texte et dessin permet de repérer et sélectionner les informations pertinentes pour la résolution du problème. Ces différences sont-elles le fait de la grandeur ou plus finement le changement de grandeur n'induit-il pas obligatoirement un changement de contexte assez global ? Le remplacement d'un mot par un autre ne suffit pas, il faut réécrire l'histoire. Par exemple, il n'y a qu'une taille de paquets dans Mdis, on n'y évoque pas de gros paquets ni de petits paquets alors qu'on parle d'un grand trait et de petits traits dans MLg. Ce n'est pas

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

l'unité, mais le « comportement des objets longs » qui implique certains contextes spécifiques, ces comportements sont décrits mathématiquement par les opérations sur les objets (l'addition correspond à la mise bout à bout) et ils requièrent un lexique et des instruments spécifiques.

En ligne RPMLg

En colonne RPMdis

Effectifs % ligne % colonne	R	avec 21 ou 7	sans 21 ni 7	9999	99999	ENSEMBLE
R	96 79,3% 57,8%	13 10,7% 37,1%	10 8,3% 34,5%	0 0,0% 0,0%	2 1,7% 22,2%	121 100,0% 48,8%
avec 18 ou 6	24 54,5% 14,5%	12 27,3% 34,3%	4 9,1% 13,8%	3 6,8% 33,3%	1 2,3% 11,1%	44 100,0% 17,7%
sans 18 ni 6	18 46,2% 10,8%	8 20,5% 22,9%	8 20,5% 27,6%	3 7,7% 33,3%	2 5,1% 22,2%	39 100,0% 15,7%
9999	10 66,7% 6,0%	0 0,0% 0,0%	2 13,3% 6,9%	2 13,3% 22,2%	1 6,7% 11,1%	15 100,0% 6,0%
99999	18 62,1% 10,8%	2 6,9% 5,7%	5 17,2% 17,2%	1 3,4% 11,1%	3 10,3% 33,3%	29 100,0% 11,7%
ENSEMBLE	166 66,9% 100,0%	35 14,1% 100,0%	29 11,7% 100,0%	9 3,6% 100,0%	9 3,6% 100,0%	248 100,0% 100,0%

Le tableau croisé montre notamment que les élèves qui n'avaient pas répondu à MLg évoluent « dans la moyenne » de Mdis.

Concernant la réussite croisée aux deux exercices, on voit aussi que 39% des élèves (96/248) réussissent aux deux exercices alors que 191 élèves réussissent au moins à un des deux exercices (121 pour l'un, 166 pour l'autre), soit 77%. Le rapport entre ceux qui réussissent au moins une fois et ceux qui réussissent aux deux est de 2. Néanmoins, les deux réussites ne sont pas indépendantes (le pourcentage théorique en cas d'indépendance est de 33%). (kappa=0,179)

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

3.5. Les problèmes de déplacement (ou de distance sur une route)

- Nomenclature

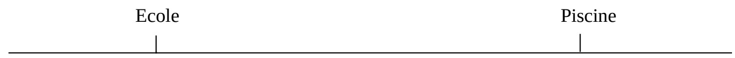
De	DEplacement, texte	105
Sc	déplacement SChéma	201
Pa	déplacement PAncartes	206

Chaque problème de déplacement comporte quatre questions. La première demande de réinterpréter une information qui se trouve dans l'énoncé. Les autres consistent à calculer une distance entre deux lieux.

Nous avons adopté une même nomenclature pour les questions aux trois exercices. La première question est une question de LEcture (Le), ce qui donne les trois libellés de questions : LeDe, LeSc, LePa. Pour les problèmes de déplacement, par exemple, chacune des trois questions suivantes porte sur une opération, ce qui donne les libellés de questions De2, De3, De4 ; un objet regroupant la réussite aux trois questions est intitulée De3op.

Des élèves, dont nous ignorons le nombre, négligent les zéros dans les calculs de cette série d'exercices. Nous les avons comptabilisés en reconstituant les réponses probables, en ajoutant « un certain nombre de zéros ».

- Exercice Déplacement (De)

texte sans schéma : De	texte avec schéma : De
Linda et Sam partent de l'école en même temps et vont à la piscine en prenant la même route. Linda marche lentement. Sam court. Au bout de dix minutes : Sam a parcouru 900m, il est à 600m de la piscine et Linda est à 400m de Sam. Quelle est la distance entre Sam et Linda au bout de dix minutes ? A quelle distance de l'école, Linda est-elle au bout de dix minutes ? A quelle distance de la piscine, Linda est-elle au bout de dix minutes ? Quelle est la distance entre l'école et la piscine ? échelle : 0,45	Linda et Sam partent de l'école en même temps et vont à la piscine en prenant la même route. Linda marche lentement. Sam court. Au bout de dix minutes : Sam a parcouru 900m, il est à 600m de la piscine et Linda est à 400m de Sam.  Quelle est la distance entre Sam et Linda au bout de dix minutes ? A quelle distance de l'école, Linda est-elle au bout de dix minutes ? A quelle distance de la piscine, Linda est-elle au bout de dix minutes ? Quelle est la distance entre l'école et la piscine ?

Pour cet exercice, nous présentons les réponses aux quatre questions ainsi que la réussite croisée aux trois calculs. Parmi les réponses fausses aux différentes questions, on trouve à peu près toutes les combinaisons additives ou soustractives entre les nombres de l'énoncé, nous ne retenons que celles qui dépassent 5%. Parmi les réponses fausses nous n'avons pas repéré de représentation cohérente globale, mais erronée, de l'espace. Pour cette raison, nous ne présentons pas de croisement des procédures aux différentes questions. Par ailleurs, pour chaque question, un seul élève écrit une multiplication ou une division, nous l'intégrons dans les « autres réponses fausses ». Pour chaque question de calcul, de deux à cinq élèves écrivent que c'est *impossible*. Nous les incluons aussi dans les « autres réponses fausses ».

Cet exercice avait deux versions pour la passation : avec un schéma ou sans schéma. Le schéma s'ajoutait au texte. Nous ne considérons pas cette variable dans un premier temps.

Nous présentons d'abord les codes des procédures et erreurs et les effectifs. Pour cet exercice, nous excluons la classe 1 (deux ou trois élèves ont dépassé la première question).

PLeDe		Effectif	%
R	Réponse attendue : 400 (ou 400 m)	85	34,00
500	Réponse 500 : résultat de 900-400.	88	35,20
200	Réponse 200 : résultat de 600-400	21	8,40
9999	Autre réponse fausse	37	14,80
99999	Absence de réponse	19	7,60
	Total	250	100,00

PDe2		Effectif	%
R	Réponse attendue : 500 (ou 500 m), résultat de 900-400	66	26,40
400	Réponse 400 : tiré du texte ou résultat de 900-500 (pour les élèves qui auraient répondu 500 à LeDe)	22	8,80
9999	Autre réponse fausse dont réponse « impossible » (5 élèves)	74	29,60
99999	Absence de réponse	88	35,20
	Total	250	100,00

PDe3		Effectif	%
R	Réponse attendue : 1000 (ou 1000 m ou 1 km)	54	21,60
1100	Réponse 1100 : résultat probable de 900+600-400	46	18,40
9999	Autre réponse fausse dont réponse « impossible » (2 élèves)	74	29,60
99999	Absence de réponse	76	30,40
	Total	250	100,00

PDe4		Effectif	%
R	Réponse attendue : 1500 (ou 1500 m)	114	45,60
9999	Autre réponse dont réponse « impossible » (2 élèves)	49	19,60
99999	Absence de réponse	87	34,80
	Total	250	100,00

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Moins du tiers des élèves répond correctement à la première question de cet exercice. S'agit-il d'un effet du contrat didactique ou bien d'une difficulté à se représenter la situation ? Pendant la passation, la seule question qui nous a été posée sur cet exercice, par un seul élève est « mais on nous donne la réponse dans le texte, … » ce qui est une manifestation du contrat. Pour cet exercice, à partir de la deuxième question, les taux de non réponse sont très élevés (autour d'un élève sur trois). La dernière question PDe4 est plutôt bien réussie par les élèves qui y répondent (près de 70%) ce qui n'est pas vrai des deux autres (respectivement 40% et 29% des réponses). La réussite croisée aux trois dernières questions est de 11%.

Très peu d'élèves ont produit un schéma même parmi ceux qui ont réussi. Parmi ceux qui avaient une amorce de schéma, bien peu l'ont utilisée. Dans cet exercice, situé en première partie, les élèves disposaient de la règle, quelques élèves qui avaient la version schéma ont mesuré 9 cm et placé un point « Sam » à 9 cm (pour 900 m) du point « école ». Ceci ne laisse que quelques millimètres entre le point « Sam » et le point « Piscine », ces élèves n'ont pas terminé leur représentation, ni résolu le problème.

- Exercice Pancartes

Sur une route, à Nato, on voit une pancarte :

Nato

Pali 900 km →
Garo 600 km ←
Topu 500 km →

Quelle est la distance entre Nato et Topu ?
Quelle est la distance entre Garo et Topu ?
Quelle est la distance entre Pali et Topu ?
Quelle est la distance entre Pali et Garo ?

Pour cet exercice, la première variable est constituée par les réponses détaillées à la première question (PLePa). Pour les questions de « calcul », pour des raisons que nous allons préciser, nous choisissons directement une variable qui croise les réponses aux trois questions (PPa3op).

PLePa		Effectif	%
R	Réponse attendue : 500	186	68,38
a2 ou s2 ou a3	Opération : somme (a2) ou différence (s2) de deux des trois nombres, somme (a3) des trois nombres	35	12,87
9999	Autre réponse fausse (dont 3 élèves qui écrivent que c'est impossible ou qu'on ne peut pas savoir)	13	4,78
99999	Absence de réponse	38	13,97
	Total	272	100,00

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

PPa3op		Effectif	%
R	Réponse attendue : 1100, 400, 1500 (ou opérations addition, soustraction, addition présumées avec erreur de calcul probable – 2 élèves)	36	13,24
R1 ou R2	Une ou deux réponses correctes et absence de réponse pour les autres questions	6	2,21
a	Trois additions (avec erreur de calcul probable, 3 élèves)	42	15,44
s	Trois soustractions (avec erreur de calcul probable, 5 élèves)	135	49,63
lsa	Autres combinaisons d’additions, soustractions appliquées aux « bonnes villes » (dont 5 élèves qui calculent les deux bonnes additions et remplacent la soustraction par la somme des trois nombres) ou lecture de nombres sur pancarte.	26	9,56
ao	Présence d’au moins une multiplication	1	0,37
9999	Autres réponses fausses	23	8,46
99999	Absence de réponse	3	1,10
	Total	272	100,00

Outre les quelques élèves qui indiquent que la question est « impossible », le taux de non réponse est assez élevé pour la question de lecture (LePa). Ce peut être un problème de représentation « mentale » de l’espace : « où est Nato ? ». Cette question nous a été posée par un élève pendant la passation du test et par un enseignant alors que nous présentions cet exercice au cours d’une session de formation continue. En outre, il peut y avoir un effet du contrat didactique qui imposerait qu’il y ait un calcul à faire dans cette première question. Malgré ces difficultés, la bonne réponse à la question est donnée par les deux tiers des élèves ce qui est assez supérieur à ce qu’on observe pour la première question du problème précédent. On peut penser de ces élèves qu’ils interprètent correctement la situation.

Paradoxalement, la réussite conjointe aux trois calculs de distance (PPa3op) est faible : un peu plus d’un élève sur 7. Après avoir répondu à la question de « lecture », beaucoup d’élèves choisissent une opération (parmi addition et soustraction) et l’utilisent pour traiter les trois questions (2, 3 et 4) en l’appliquant aux « bonnes villes ». Ces deux procédures erronées sont majoritaires : près de la moitié des élèves calcule trois soustractions entre les « bonnes villes » et un peu moins d’un sur six calcule trois additions entre les « bonnes villes ». Nous voyons qu’en croisant la réussite aux trois questions de calcul nous pouvons décrire 80% des réponses avec trois procédures c’est pour cela que nous n’avons pas détaillé les réponses à chacune des questions de Pa.

Les élèves semblent bien concevoir qu’il s’agit d’un problème spatial, que les pancartes donnent des distances à partir d’un point, mais ils ne semblent pas éprouver la nécessité

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

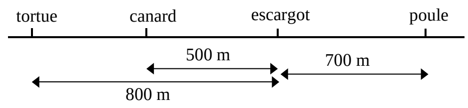
tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

d'orienter davantage l'espace pour résoudre ce problème de pancarte. (Le taux de non réponse est faible pour ces trois questions).

Malgré la parenté que nous leur attribuions *a priori*, les exercices De et Pa semblent être très différents par les formes de réponses qui leur sont données par les élèves. Néanmoins ces réponses sont souvent fausses ce qui signifie que les élèves ne les considèrent pas comme des problèmes proches et sans doute qu'ils n'ont pas vraiment d'idée de la façon de les résoudre.

- Exercice Schéma, distance entre les animaux

Sur un chemin, il y a quatre animaux : un escargot, une tortue, une poule et un canard.



Sur le chemin, quelle est la distance entre la tortue et l'escargot ?
Sur le chemin, quelle est la distance entre le canard et la poule ?
Sur le chemin, quelle est la distance entre la tortue et le canard ?
Sur le chemin, quelle est la distance entre la tortue et la poule ?

Pour cet exercice, nous présentons les réponses séparées aux quatre questions LeSc, Sc2, Sc3 et Sc4, la réussite croisée aux trois questions de calcul et la réussite croisée aux trois questions LeSc, Sc2 et Sc4.

Pour traiter nos données, nous avons recensé toutes les réponses puis repéré les plus fréquentes en ayant à l'esprit la possibilité de réponses qui correspondraient à des proportions entre les différentes parties du dessin compte-tenu de nos études préalables (erreurs récurrentes avec les schémas et pré-test). Nous avons aussi recherché sur la bande des marques de report des distances du schéma.

Les élèves n'ont pas de règle graduée.

Globalement nous parvenons à recenser toutes les réponses avec environ 5% de réponses « autres ».

PLeSc		Effectif	%
R	Réponse attendue : 800 (cette réponse peut être visiblement calculée, avec erreur de calcul pour 1 élève)	217	79,49
R et 1000b	Réponse 800 (et 1000 barré)	15	5,49
1000	Réponse 1000 (dont un élève qui a barré la bonne réponse)	17	6,23
9999	Autre réponse fausse (dont 1 élève qui a barré la bonne réponse et la réponse 1000)	18	6,59
99999	Absence de réponse	6	2,20
	Total	273	100,00

PSc2		Effectif	%
R	Réponse attendue : 1200 (ou erreur dans le calcul écrit de 500+700, 2 élèves)	207	75,82
1000 ou 800	Réponse parmi 1000, 800 (dont deux élèves qui rayent 1000 pour 800)	16	5,86
coh	Cohérence locale avec opération utilisant une estimation.	10	3,66
700	Réponse 700 : mauvaise lecture du schéma	11	4,03
9999	Autre réponse fausse	14	5,13
99999	Absence de réponse	15	5,49
	Total	273	100,00

PSc3		Effectif	%
R	Réponse attendue : 300 (ou, pour un élève, erreur de calcul visible dans 800-500)	88	32,23
R et 400b	Réponse attendue : 300 (et 400 barré)	4	1,47
R et 500b	Réponse attendue : 300 (et 500 barré)	4	1,47
400	Réponse 400, probablement obtenue par 800 : 2 (visible sur quelques productions)	52	19,05
500	Réponse 500, distance probablement estimée comme étant égale à la « distance entre le canard et l'escargot »	86	31,50
400 et 500b	Réponse 400 (et 500 barré)	4	1,47
700	Réponse 700, peut correspondre à la comparaison à la « distance entre l'escargot et la poule »	3	1,10
800	Réponse 800, mauvaise lecture du schéma	3	1,10
9999	Autre réponse fausse (dont 2 élèves qui barrent la bonne réponse et 1 élève qui considère que c'est impossible)	11	4,03
99999	Absence de réponse	18	6,59
	Total	273	100,00

PSc4		Effectif	%
R	Réponse attendue	205	75,09
coh	Cohérence locale avec opération utilisant une estimation.	18	6,59
2000	Somme des trois longueurs	3	1,10
9999	Autre réponse fausse	16	5,86
99999	Absence de réponse dont 1 élève qui barre la bonne réponse	31	11,36
	Total	273	100,00

La question LeSc est la mieux réussie. La moitié des réponses fausses est constituée par la réponse 1000. On peut penser que ces élèves calculent la distance demandée en utilisant la

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

donnée 500 : ils font une estimation en interprétant, à tort, les proportions du schéma. Par exemple, ils peuvent considérer que la distance entre la tortue et le canard est égale à la distance entre le canard et l'escargot. Il faut aussi remarquer qu'à peu près autant d'élèves modifient leur réponse : après avoir interprété les proportions et proposé 1000, ils semblent barrer spontanément ce nombre et donnent la bonne réponse : 800. Il faut sans doute voir dans ce fort taux de réponse 1000 un effet du contrat didactique (qui impliquerait qu'il y a « quelque chose à faire pour répondre », un calcul). On trouve d'ailleurs quelques élèves qui « calculent » 800 en effectuant 800-500, puis 300+500 par exemple. En dehors du contrat didactique, on peut penser que deux éléments viennent néanmoins favoriser la réponse 1000 : les proportions du dessin sont incompatibles avec les nombres écrits, le nombre 500 est attracteur.

La réussite aux questions Sc2 et Sc4 est comparable : les trois quarts des élèves réussissent. Parmi les erreurs à la question Sc2, signalons les élèves qui semblent ne pas parvenir à interpréter le schéma et répondent 700. Les élèves qui répondent 1000 ou 800 ont probablement la démarche déjà signalée pour la réponse 1000 à la question précédente (LeSc) : ils estiment les proportions du dessin. Ils peuvent alors considérer par exemple que les distances entre le canard et la poule et entre la tortue et l'escargot (800 m) sont égales ou encore que la distance entre l'escargot et la poule est égale à la distance entre le canard et l'escargot (500 m). Pour la question Sc4, le nombre de non réponse augmente un peu. Précisons que le nombre 1500 peut être obtenu par le raisonnement faux sur les proportions : 500 (TC) +500 (CE) +500 (EP), mais il n'est pas détectable parmi les bonnes réponses. Par ailleurs, parmi les réponses fausses, il est souvent difficile d'interpréter les calculs des élèves, toutefois nous pensons que certains d'entre eux cherchent à trouver une certaine cohérence dans leurs réponses (code coh) : intégrer une estimation dans des calculs, quitte à ignorer une partie des données de l'énoncé ou de leurs réponses. Par exemple : CP=1200 m, TC=700 m, TP=1900 m (n°812) ou TE=1000 m, CP=1200 m, TC=500 m, TP=1700 m (n°912).

La question Sc3 est la plus mal réussie : par moins du tiers des élèves. (La réussite à cette question est un bon indicateur de la réussite conjointe aux quatre questions.) Deux réponses fausses viennent occuper le devant de la scène : près d'un élève sur trois répond 500 et un sur cinq répond 400 (quelques élèves écrivent 800 : 2). C'est en principe une soustraction qui doit permettre de résoudre le problème. On devine les raisonnements des élèves qui répondent 400 ou 500 : ils interprètent les proportions du dessin et estiment que C est au milieu de [TE] (ou que TC=CE). Comme pour la première question (LeSc), environ 5% des élèves proposent une

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

réponse et la barrent : 500 est abandonné au profit de la bonne réponse ou de 400, 400 est abandonné au profit de la bonne réponse. On peut ainsi créer une hiérarchie des réponses de la moins évoluée à la plus évoluée : estimation de la proportion par report de longueur (TC=CE), utilisation d'une opération relative aux proportions (division), utilisation de l'ordre des points (soustraction).

Cette situation semble engager spontanément une (petite) partie des élèves dans un contrôle de leurs réponses. Les nombres choisis (nombres entiers de centaines inférieurs à 9), parce qu'ils mobilisent des connaissances en calcul qui sont *a priori* bien maîtrisées en fin de CM2, sont propices à cette attitude. Avec certains élèves, la situation semble donc provoquer un conflit cognitif qui les fait évoluer vers la bonne réponse. On voit aussi la grande sensibilité des élèves aux proportions du dessin et il semble raisonnable de penser qu'ils n'ont, pour beaucoup, pas encore appris que, « dans certains schémas de longueur, seul l'ordre compte ».

Ajoutons que les réponses des élèves aux exercices SSCLg et SSLg (soustraction avec schéma de longueur) sont, en un sens, contradictoires avec Sc3 puisque les élèves identifient à plus de 65% qu'il « faut faire » une soustraction. Il faut donc chercher dans Sc3 des éléments qui expliquent cette contradiction. Il ne semble pas raisonnable d'attribuer la faiblesse des résultats à Sc3 uniquement à la multiplicité des informations de Sc, cette multiplicité d'information existe aussi pour Sc2 et Sc4 et ne fait pas échouer les élèves. Parmi les caractéristiques de Sc3, on peut relever les proportions du dessin contradictoires avec les informations chiffrées, les nombres « ronds » qui peuvent peut-être créer de l'attirance pour certaines réponses, le texte qui évoque des déplacements (mais c'est aussi le cas pour Sc2 et Sc4).

Enfin , signalons que la longueur du trait entre la tortue et le canard est de 3 cm ce qui pourrait se traduire, moyennant quelques zéros et une estimation absolue (sans règle) de la longueur TC par « 300 m » (cf. supra). Ceci est possible mais probablement très rare dans nos productions car les élèves qui réussissent à cette question réussissent aux autres où cette estimation n'est pas possible.

- Comparaison des exercices

Différences de réussite

Les différences de réussite entre les trois exercices de déplacement sont-elles significatives ? (nous définissons la réussite à partir des codes R et R faisant suite à une réponse barrée). Nous cumulons la réussite aux trois calculs.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Moyenne pour les différents exercices :

De3op	Effectif	%
Réussite	31	12,4
Échec	219	87,6
Total	250	100,0

Sc3op	Effectif	%
Réussite	88	32,2
Échec	185	67,8
Total	273	100,0

Pa3op	Effectif	%
Réussite	36	13,2
Échec	236	86,8
Total	272	100,0

Test échantillons appariés

	t	ddl	Sig. (bilatérale)
Sc3op - Pa3op	6,698	271	,000
Sc3op - De3op	7,062	247	,000
De3op - Pa3op	-,745	246	,457

Ce test montre que les différences de réussite entre les exercices De et Pa ne sont pas significatives. Par ailleurs, elles le sont entre les exercices Sc et Pa d'une part, Sc et De d'autre part, ce qui n'est pas surprenant.

Croisement des réponses

			Pa3op				Total
			0		1		
De3op	0	Effectif (Résidu)	191	(6,5)	25	(-6,5	216
	1	Effectif (Résidu)	20	(-6,5)	11	(6,5)	31
Total		Effectif	211		36		247

			Pa3op				Total
			0		1		
Sc3op	0	Effectif (Résidu)	175	(15,4)	9	(-15,4)	184
	1	Effectif (Résidu)	61	(-15,4)	27	(15,4)	88
Total		Effectif	236		36		272

			Sc3op				Total
			0		1		
De3op	0	Effectif (Résidu)	155	(12,4)	62	(-12,4)	217
	1	Effectif (Résidu)	8	(-12,4)	23	(12,4)	31
Total		Effectif	163		85		248

	Kappa
De3op * Pa3op	,224
Sc3op * Pa3op	,305
De3op * Sc3op	,261

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

D’après le calcul de Kappa, il semble qu’on peut dire que les exercices De et Pa sont les plus « éloignés », ce sont eux qui évaluent des notions les plus différentes. On retrouve ce résultat quand on calcule la corrélation entre les réponses.

Corrélations pour échantillons appariés

	N	Corrélation	Sig.
De3op & Pa3op	247	,224	,001
Sc3op & Pa3op	272	,356	,001
PSc3op & De3op	248	,318	,001

Sc nous apparaît comme un intermédiaire, un lien, entre De et Pa. A priori nous considérions qu’il constituait un moyen pour résoudre les deux exercices : De et Pa. Il se trouve que bien peu d’élèves ont résolu Pa et De et moins encore ont utilisé un schéma pour le faire.

L’exercice Sc nous permet d’identifier des erreurs caractéristiques des schémas cotés, qui semblent relever du traitement dans le registre « schéma coté ». Quant aux registres langue naturelle et pancarte pour les problèmes de déplacement, les productions des élèves semblent nous permettre de dire qu’ils n’effectuent pas spontanément de conversions vers le registre schéma coté (les quelques tentatives d’utilisation de l’embryon de schéma dans De ne sont souvent pas satisfaisantes) et qu’ils sont démunis pour traiter les deux exercices de déplacement sans schéma.

Perspectives

Les réponses fausses prégnantes dans Sc3 et la part relativement importante de réponses fausses qui évoluent vers une réponse « plus correcte » pour plusieurs questions dans l’exercice Sc nous amènent à plusieurs conclusions :

- si la lecture simple d’un schéma coté ne semble pas poser trop de problèmes, on ne peut en dire autant du traitement en termes d’opérations, notamment pour ce qui concerne l’identification de la soustraction. Sc semble indiquer que nombre d’élèves ne savent ce qui est « important » dans ce schéma de longueur, à savoir l’ordre des points,
- en particulier beaucoup d’élèves semblent sensibles aux proportions du dessin et les croisent avec les valeurs numériques, l’égalité plus ou moins apparente de longueur est associée à une égalité de nombres. On voit alors des réponses par division là où on attendrait une soustraction mais une autre procédure semble tenace, il s’agit d’estimations grossières, une sorte d’utilisation de la proportionnalité en acte qui ne ferait pas appel à la division mais seulement à l’égalité (et à la linéarité additive) Ces

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

réponses (souvent difficiles à repérer) se retrouvent apparemment à chaque fois qu'il y a des schémas cotés, en plus moins grand nombre cependant,

- un moyen de faire apparaître massivement ces procédures fausses semble être d'utiliser des nombres ronds qui provoquent des attirances numériques conjointement à des proportions « simples » (moitié notamment),
- enfin, il se trouve que dans certains cas (5% des élèves), les élèves modifient spontanément leur réponse vers une procédure plus élaborée. Ces modifications semblent se produire lorsqu'il y a une « contradiction » entre les nombres initialement présents sur le schéma et les proportions du schéma. En situation d'apprentissage, l'exercice Sc et, en particulier la question Sc3, pourrait être un moyen pour provoquer un conflit cognitif chez les élèves quant à l'interprétation d'un schéma coté. Finalement, cette situation ne pourrait-elle pas amener les élèves à produire des schémas cotés pour d'autres situations telles que De ou Pa ?

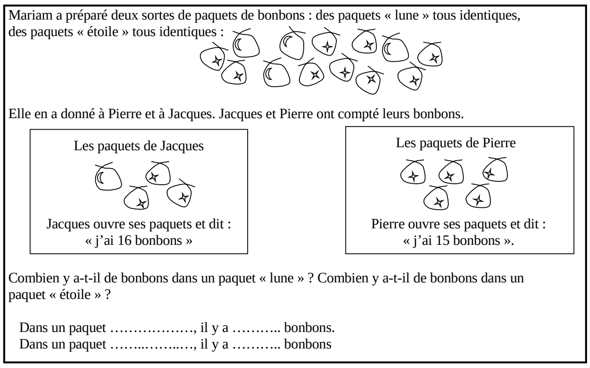
3.6. Les problèmes sur les quatre opérations

4opD	4 OPérations Discret (paquets)	107
4opL	4 OPérations LonGueur (baguettes)	203
4opR	4 OPérations Rectangle (étiquettes)	209

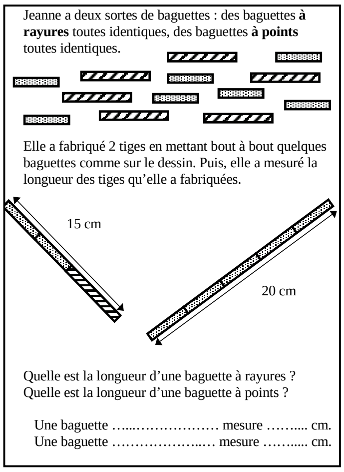
Les deux derniers exercices sont passés sans règle graduée. En revanche, les élèves ont à leur disposition une bandelette en carton.

Nous rappelons les trois énoncés :

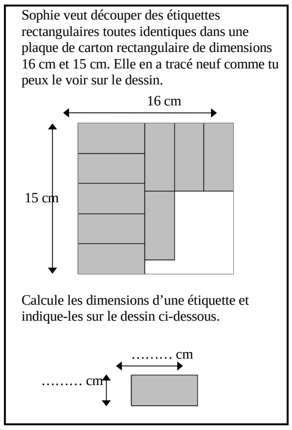
4opD



4opL



4opR



- Codage des erreurs, réponses et procédures

Pour ces trois exercices, nous avons élaboré un codage commun des réponses aux trois exercices. Toutefois, certaines erreurs apparaissent avec les flèches de cotation présentes seulement dans 4opL et 4opR. Nous précisons les différents codes pour chaque problème. Nous indiquons les effectifs et les fréquences de chaque réponse.

La plupart des procédures sont invisibles, pour presque tous les élèves, nous reconstruisons donc leurs procédures, il faut sans doute être prudent quant à certaines de ces recontructions.

Dans les tableaux qui suivent nous utilisons le codage (X,Y) pour les réponses des élèves. Sans précision supplémentaire, cela signifie que X est la valeur pour la première « inconnue » (celle qui s'obtient directement par division) et Y est la valeur pour la deuxième.

Nous excluons la classe 1 des résultats pour 4opD, exercice traité par 10 élèves sur 21.

P4opD	
R	Réponse attendue (étoile 3, lune 7) (dont deux réussites suite à un ajustement après retour sur la prise en compte d'une seule contrainte)
Rcomm ou RP	Réponse (5,7), susceptible de correspondre à une inversion dans l'interprétation ultime des calculs : 5×3=15 ; 3×3+7=16 ou réponse (7,3) ou absence d'indication des noms des paquets.
2div	Réponse (3, 4) avec ou sans indication de nom de paquet, interprétée comme deux divisions
ctr	Réponse (5,1) ou (2,10) : prise en compte d'une seule contrainte (5×3)+1=16 ou (2×3)+10=16 (réponse suivie d'un ajustement insuffisant pour cinq élèves sur sept).
equit	Réponse (3, X) : le partage de 15 en 5 parts égales (division) semble vu. Autre réponse fausse pour X ou pas de réponse pour 3 élèves.
consigne	Réponse (15,X) ou (4,9). Nous considérons que l'erreur est liée à la complexité de la consigne : 15 est le nombre de bonbons dans les 5 paquets étoile, 4 et 9 sont respectivement les nombres de paquets étoile et lune dessinés en première partie d'énoncé.
9999	Autre réponse fausse
99999	Absence de réponse

P4opL	
R	Réponse attendue (à points 4, à rayures 7)
RP	Réponse (7,4) ou absence d'indication de la qualité des baguettes
2div	Réponse (4,5) avec ou sans indication de nom de paquet, interprétée comme deux divisions
ctr	Réponse (2,11) ou (3,9), prise en compte d'une seule contrainte.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

P4opL	
equit prop	Réponse (4,X), le partage équitable semble reconnu. Pour X, on a une valeur entre 5,5 et 11 (hypothèse d'une estimation utilisant les nombres de l'énoncé et les proportions du dessin pour trouver X)
equit	Réponse (4,X), le partage équitable semble reconnu. (Autre réponse fausse pour X ou pas de réponse pour 4 élèves.)
estim prop	Réponses (2,5;10) ou (5,10) ou (X,7,5) avec X<7,5. Elles peuvent correspondre à une estimation grossière des longueurs prenant en comprenant les proportions du dessin et une partie des données chiffrées.
estim absol	Estimation absolue de la longueur des baguettes.
grad bande	Graduation de la bande dans une unité arbitraire (ou en « cm ») et utilisation de la bande, comme d'une règle graduée, pour mesurer les baguettes.
consigne	Réponse avec 15 ou 20, à savoir utilisant telle quelle une des deux longueurs totales de l'énoncé. Les réponses du type (20,X) sont plus fréquentes que celles avec 15. Nous considérons que l'erreur est liée à la complexité de la consigne.
9999	Autre réponse fausse
99999	Absence de réponse

P4opR	
R	Réponse attendue (3,7) bien placés (dont deux élèves qui répondent après avoir rayé une estimation)
Rcomm ou RP	Réponse (5,7) : susceptible de correspondre à une inversion dans l'interprétation ultime des calculs : 5×3=15 ; 3×3+7=16 (visible dans une production) ou réponse (7,3) : inversion dans l'indication des longueurs
2div	Réponse (3, 4), interprétée comme deux divisions
ctr	Réponse (2,10), prise en compte d'une seule contrainte.
equit prop	Réponse (3,X), le partage équitable semble reconnu. Pour la deuxième valeur, on a une valeur entre 5 et 7 (pour un élève, cette réponse est donnée après avoir rayé une estimation absolue)
equit	Réponse (3,X), le partage équitable semble reconnu. Autre réponse fausse pour X, pas de réponse pour 10 élèves.
estim absol	Estimation absolue de la longueur des baguettes. Parmi les réponses : (1,2), (1,3), (1;1,5)
grad bande	Graduation de la bande dans une unité arbitraire et utilisation de la bande, comme d'une règle graduée, pour mesurer les baguettes ou couple de valeurs dont la deuxième est double de la première pour 6 élèves.
consigne	Réponse avec 16 (la longueur de la plaque). Nous considérons que l'erreur est liée à la complexité de la consigne.
9999	Autre réponse fausse
99999	Absence de réponse

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

P4opD	Eff.	%
R	137	54,58
Rcomm ou RP	3	1,20
2div	30	11,95
ctr	7	2,79
equit	20	7,97
consigne	14	5,58
9999	28	11,16
99999	12	4,78
Total	251	100,00

P4opL	Eff.	%
R	153	56,25
RP	3	1,10
2div	19	6,99
ctr	4	1,47
equit prop	4	1,47
equit	7	2,57
estim prop	13	4,78
estim absol	5	1,84
grad bande	3	1,10
consigne	21	7,72
9999	30	11,03
99999	10	3,68
Total	272	100,00

P4opR	Eff.	%
R	106	38,97
Rcomm ou RP	3	1,10
2div	31	11,40
ctr	1	0,37
equit prop	23	8,46
equit	17	6,25
estim absol	27	9,93
grad bande	12	4,41
consigne	6	2,21
9999	32	11,76
99999	14	5,15
Total	272	100,00

- Premières analyses

Des apprentissages au cours de la résolution ?

Pour le dernier exercice, 6 élèves rayent une estimation absolue pour évoluer soit vers un calcul correct, soit vers une estimation proportionnelle. Ce phénomène reflète-t-il un apprentissage dans la résolution de cet exercice ou plus banalement la mise en relation de l'étiquette réponse avec les étiquettes de la plaque rectangulaire ? Plutôt qu'un phénomène d'apprentissage des mathématiques, on aurait alors un apprentissage dans la lecture de la consigne.

Des points communs dans les réponses aux trois exercices

La procédure qui consiste à prendre en compte une seule contrainte (ctr) semble disparaître au fil des versions, on peut penser qu'elle constitue un moyen d'apprentissage d'autant plus qu'elle semble permettre à certains élèves (7) de modifier leur réponse.

L'erreur la plus répandue consiste à voir deux partages équitables dans les deux « totaux » (2div). Elle est moins représentée dans la version 4opL (environ 7%), autour de 11% dans les deux autres versions.

- Procédures d'estimation

Procédures d'estimation absolue

Les procédures qui consistent à estimer les proportions n'apparaissent qu'avec les schémas cotés, elles sont beaucoup plus prégnantes dans la version rectangle, de même celles qui consistent à estimer « absolument » les longueurs.

Par ailleurs, le rappel de l'étiquette, en bas peut inciter certains élèves à la détacher du reste de l'énoncé. Cette particularité peut favoriser l'apparition des procédures codées estim absol et grad bande: 39 élèves semblent concernés contre 8 dans 4opL.

Procédures d'estimation relative

L'exercice PSLg (problème de division de longueur sur un schéma) a une certaine parenté avec la recherche de la première inconnue dans les exercices « 4op ». Nous avions pointé le fait qu'il y avait un implicite dans l'énoncé avec l'égalité des différents morceaux. Dans les deux exercices 4opL et 4opR, le fait que les parts sont égales est explicité. En revanche, la question n'est explicitement formulée que dans 4opL. Pour cet exercice nous avions signalé une quantité d'erreurs codées 9999 plus importante que pour les autres exercices de division. Nous avions parlé de réponses autour de la valeur 30.

La réponse estim prop n'est mise en évidence que dans l'exercice 4opL (5%). Ceci ne signifie pas que les élèves n'utilisent pas cette procédure dans d'autres exercices. C'est l'interview informelle d'un élève au cours du pré-test pour l'exercice 4opR qui nous a permis de l'identifier. Elle est difficile à repérer car elle peut donner des réponses assez dispersées, codées probablement 9999 (ou éventuellement, si les élèves « ont de la chance », codées R ou 2div).

Les élèves feraient des estimations très grossières, « à la louche », utilisant les données chiffrées qui leur conviennent et les proportions du dessin. Ce sont des connaissances rudimentaires de proportionnalité, en acte, qui seraient donc sollicitées. Il nous semble que c'est ce même type de procédure qui donne la réponse majoritaire 500 dans Sc3. Peut-être faut-il alors voir notamment dans les réponses 400 pour Sc3 et equitprop pour 4opR et 4opL un raffinement de cette procédure : les élèves verraient des divisions (même quand il n'y en a pas à voir) pour un partage visiblement à peu près égal et feraient un ajustement (plus ou moins linéaire) pour les partages visiblement inégaux. L'utilisation de cette procédure

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

pourrait être très liée au contexte (un énoncé « fouillis » avec des données à sélectionner, des nombres « faciles », des proportions « faciles »).

Effet de la règle graduée et procédures d'estimation

Bien qu'il faille sans doute être très prudent à propos de cette comparaison, la réussite à 4opR, dans notre questionnaire (40%), est très nettement supérieure aux résultats de l'évaluation d'entrée en 6ème où la réussite est de 13% (25% lorsque les deux questions sont posées, successivement, dans l'ordre, ce qui nous semble être beaucoup plus facile). La réussite à notre questionnaire pour la première grandeur est 66% alors qu'aux évaluations elle est de 20% (proche de 50% lorsque les questions sont séparées). Parmi les différences : nous avons éliminé l'utilisation de la règle graduée (et « ajouté » une bande cartonnée), nous avons supprimé le mot « réel », nous avons proposé deux versions différentes de l'exercice au préalable. Le mesurage correspond respectivement à 50% (et 20% avec la version « séparée ») des réponses dans les évaluations nationales, apparemment environ 10% de nos élèves estiment les longueurs « à vue ». La suppression de la règle graduée semble donc neutraliser au moins partiellement la procédure fausse de mesurage et permettre à certains élèves d'envisager d'autres procédures plus élaborées.

- Différences entre les questions

Dans les tableaux qui suivent, nous appelons R, le cumul des réponses précédentes R, RP et Rcomm. Nous appelons V1, toute réponse correcte pour première inconnue et fausse pour la deuxième (ce sont les réponses 2div, equit et equi prop des tableaux précédents). A droite de chaque tableau, nous cumulons les bonnes réponses pour cette première inconnue (codes R ou V1).

Résultats

P4opD1			
	Effectif	%	
R	140	55,78	75,70
V1	50	19,92	
autres	49	19,52	
99999	12	4,78	
Total	251	100,00	

P4opL1			
	Effectif	%	
R	156	57,35	68,38
V1	30	11,03	
estim absol	5	1,84	
autres	71	26,10	
99999	10	3,68	
Total	272	100,00	

P4opR1			
	Effectif	%	
R	109	40,07	66,18
V1	71	26,10	
estim absol	27	9,93	
autres	51	18,75	
99999	14	5,15	
Total	272	100,00	

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Analyse globale des différences

La réussite globale (code R) est un peu supérieure pour la version longueur, passée en deuxième, que pour la version discret, passée en premier. La version rectangle est en revanche beaucoup moins bien réussie que les deux autres, bien que passée en troisième.

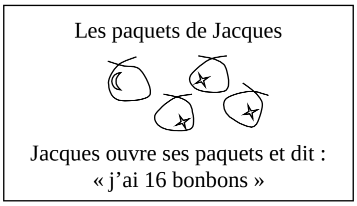
Toutefois, ces résultats semblent devoir être nuancés. Quand on considère la réussite séparée pour chaque inconnue, la version 4opD, passée en premier, est la mieux réussie et les deux versions 4opL et 4opR sont au coude à coude. On trouve des réussites proches de celles obtenues aux problèmes de division. On trouve certaines erreurs communes aux trois formes de l'énoncé mais avec des fréquences différentes.

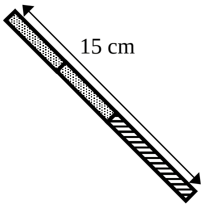
Différences de réussite en division et soustraction selon le contexte ou la grandeur

Nous nous intéressons à l'évolution des réponses entre la première et la deuxième inconnue pour nos trois problèmes. Le taux de conversion de la réussite à la première réponse en réussite est le plus élevé pour 4opL (près de 5 élèves sur 6), alors que ce taux est de près de 3 élèves sur 4 pour 4opD et de moins de 2 pour 3 pour 4opR. Dans le passage de 4opL à 4opR, on voit apparaître de très nombreuses réponses fausses pour la deuxième inconnue, la première étant correcte. La relation soustractive serait plus difficile à voir dans la longueur de la plaque rectangulaire que dans la première tige. Peut-être parce qu'il faut utiliser les deux dimensions du même objet, la plaque, alors que les deux objets « utiles » sont séparés avec les tiges. (cf. supra)

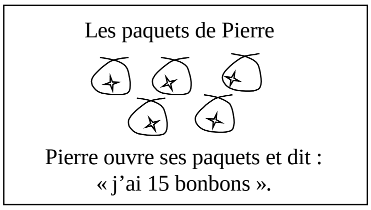
Enfin, malgré l'apparition de procédures d'estimation dans 4opL qui n'existent pas dans 4opD, le taux de conversion de la réussite à une inconnue est largement supérieur pour 4opL que pour 4opD et malgré une plus faible réussite pour le calcul de la première inconnue, la réussite globale est plus forte pour 4opL que pour 4opD. La relation soustractive semble plus difficile à voir dans la situation « paquets » que dans la situation « baguettes » alors que c'est le contraire pour la relation de division. Peut-être faut-il voir là, une influence de la représentation. En effet, pour 4opL, le schéma coté porte en lui une certaine grandeur de longueur (même si « seul » l'ordre est juste) alors que le dessin des paquets ne montre pas la grandeur qu'on cherche, les bonbons. D'autant moins que les paquets sont tous identiques en taille, qu'ils soient lune ou étoile.

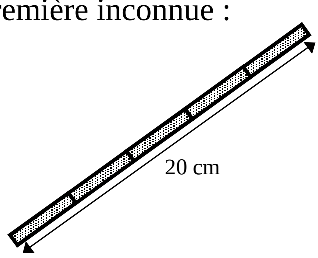
tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008





La situation est sans doute différente pour la première inconnue :





L'image des boites qu'on remplit à l'identique est peut-être plus familière que l'image du trait partagé en parts égales pour les situations de division.

On peut aussi ajouter quant à la difficulté pour la soustraction dans 4opD que les deux nombres 16 et 4 créent peut-être une attirance particulière par la division (contrairement à 15 et 3 pour 4opL).

Pourquoi les élèves échouent-ils à la 2ème question de 4opR après avoir réussi à la 1ère ?

Cette différence peut peut-être s'expliquer soit par le fait que l'exercice 4opR est plus difficile que 4opL ce qui conduirait des élèves à se rabattre vers des procédures moins élaborées, soit par le fait que la forme de l'énoncé est plus confuse dans 4opR que dans 4opL. Plusieurs éléments peuvent rendre l'exercice 4opR plus difficile. Tout d'abord, les deux dimensions sont liées à un même objet. Après avoir trouvé sa largeur, les élèves doivent « retourner » l'étiquette pour chercher sa longueur, ils doivent aussi réutiliser la plaque rectangulaire pour s'intéresser à sa deuxième dimension. Par ailleurs, contrairement aux deux autres exercices l'objet dont les dimensions sont à trouver n'est pas isolé en début d'énoncé et les deux grandeurs ne sont pas désignés explicitement dans les questions (on parle de dimensions au lieu de la longueur et la largeur de l'étiquette).

- Croisements entre les exercices

Pour croiser les réussites à nos exercices, nous calculons les « kappa » entre plusieurs variables. Nous croisons la « réussite globale », c'est à dire la réussite aux deux questions ainsi que la « réussite V1 », c'est à dire la réussite à la première inconnue, ainsi que les « procédures » c'est-à-dire la réussite pour chacun des inconnues. Nous donnons d'abord les

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

valeurs de Kappa puis nous annexons les tableaux croisés qui ont été nécessaires pour le calcul.

Valeurs de Kappa selon différentes modalités

	Procédures (V1 ou R)	Kappa	signification	Nb d'obs
P4opLnum * P4opDnum	L*D	,385	0,001	248
P4opDnum * P4opRnum	R*D	,242	0,001	248
P4opLnum * P4opRnum	L*R	,351	0,001	272

	Réussite globale (R)	Kappa	signification	Nb d'obs
R4opLnum * R4opDnum	L*D	,528	0,001	248
R4opDnum * R4opRnum	R*D	,349	0,001	248
R4opLnum * R4opRnum	L*R	,393	0,001	272

	1ère variable (V1)	Kappa	signification	Nb d'obs
V1_4opLnum * V1_4opDnum	L*D	,363	0,001	248
V1_4opRnum * V1_4opDnum	R*D	,254	0,001	248
V1_4opLnum * V1_4opRnum	L*R	,466	0,001	272

Le calcul du Kappa pour la réussite à la première variable (3ème tableau) nous confirme ce que nous supposions : les versions L et R sont plus concordantes que les deux autres paires. Pour la réussite globale, comme pour les procédures, ce sont les versions L et D qui sont les plus concordantes, suivies par la paire qui étudie les longueurs, puis la paire D/R.

Tableaux croisés pour les trois paires d'exercices « 4op »

			P4opRnum						Total
			échec		V1		R		
P4opLnum	échec	Effectif (Résidu)	57	(27,9)	17	(5,4)	12	(-22,5)	86
	V1	Effectif (Résidu)	10	(-0,1)	13	(5,2)	7	(-5,0)	30
	R	Effectif (Résidu)	25	(-27,8)	41	(0,3)	90	(27,5)	156
Total		Effectif	92		71		109		272

			P4opRnum						Total
			échec		V1		R		
P4opDs1	,00	Effectif	30	(12,4)	12	(-3,9)	17	(-8,5)	59
	1,00	Effectif	25	(10,1	17	(3,5)	8	(-13,6)	50
	10,00	Effectif	19	(-22,5)	38	(,4)	82	(22,0)	139
Total		Effectif	74		67		107		248

			P4opLnum						Total
			échec		V1		R		
P4opDs1	,00	Effectif (Résidu)	36	(17,9)	6	(,8)	17	(-18,7)	59
	1,00	Effectif (Résidu)	24	(8,7	9	(4,6)	17	(-13,2)	50
	10,00	Effectif (Résidu)	16	(-26,6	7	(-5,3)	116	(31,9)	139
Total		Effectif	76		22		150		248

3.7. Conclusions

▪ Conclusions sur le rôle des grandeurs

Il nous semble clair que l'effet de la grandeur sur la réussite des élèves n'est pas une question simple. Même si nous percevons pour certains problèmes de soustraction et de division, ainsi que pour notre problème de multiplication (sur objets) un moins bon résultat pour la longueur que pour le discret, ce n'est pas le cas pour tous. En particulier la série 4op semble montrer que la différence pourrait dépendre de la familiarité avec certaines représentations et que, malgré les difficultés liées à la lecture des schémas que nous avons évoquées, de tels schémas pourraient être favorables à la reconnaissance de l'opération. Notre bibliographie sur les variables dans la résolution des problèmes sur les quatre opérations est très peu fournie et il est fort probable que l'approfondir permettrait d'avancer sur cette question.

Nous avons par ailleurs vu des différences importantes sur la réussite croisée à différents problèmes de division en comparant les différentes classes. De façon simpliste : avec des moyennes identiques quant aux nombres d'exercices globalement résolus, dans certaines classes tous les élèves réussissent au moins un exercice, dans d'autres beaucoup d'élèves échouent tout le temps et quelques uns réussissent toujours. Ces différences peuvent avoir des causes nombreuses. La variété des contextes et les contextes eux-mêmes des exercices proposés en apprentissage peuvent être des facteurs parmi d'autres.

▪ Conclusions sur les procédures « non définitives » de calcul pour les opérations inverses

Nous avons relevé une certaine prégnance de procédures « non définitives » de calcul pour les opérations inverses. Ce constat n'est pas forcément à déplorer : dans les situations de soustraction notamment, une procédure non définitive peut être aussi performante que la procédure « définitive ». C'est généralement moins le cas pour les situations de division (sauf si les élèves ne savent pas calculer une division). Rappelons que nous n'avons pas étudié les réussites en termes de « réponse exacte » aux problèmes. Toutefois, on observe beaucoup

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

d'élèves qui utilisent à la fois les procédures définitives et les non définitives pour les situations de division. Ces procédures « non définitives » sont probablement la trace d'apprentissages antérieurs et elles n'ont pas été éliminées ensuite ou bien l'élève n'a pas fait le lien entre l'apprentissage de l'algorithme de division et les problèmes qu'il permet de résoudre.

Pour ce qui concerne l'apprentissage de la division, nous pensons que notre étude pose plusieurs questions :

- À propos de notre problème de numération nous avons avancé à deux reprises des arguments qui pourraient plaider en faveur d'une introduction plus précoce d'un symbolisme de la division (un signe d'opération, le mot « division »). L'introduction d'un tel symbolisme pourrait peut-être permettre de mieux distinguer ce qui relève de l'opération qui permet de « traduire » la situation et ce qui relève du calcul de l'opération (de l'obtention du résultat par des moyens divers). Ceci pourrait permettre, dans certains cas et en particulier avant de disposer des techniques opératoires, de commencer à identifier qu'il y a une opération qui permet de résoudre certains problèmes même si on ne sait pas encore trouver systématiquement le résultat de façon économique. Ce point est à rattacher à ce que nous avons dit à propos de l'enseignement ancien. Il se peut, mais cela reste à préciser, que dans l'enseignement actuel on introduise non seulement les signes d'opération tardivement mais qu'on les utilise davantage pour signifier un calcul que pour traduire les situations. Il pourrait y avoir sous-jacente l'idée qu'associer une opération à une situation (ou à un type de situation) n'est pas un apprentissage opportun ;
- Quel symbolisme pour la division ? Cette question se pose notamment du point de vue de l'harmonisation entre les divisions exacte et euclidienne, se pose aussi la question de l'utilisation du signe « × » pour noter l'opération de division euclidienne. Il nous semble que ce problème n'est pas le même quand il s'agit d'étudier l'arithmétique savante des entiers naturels (dans l'enseignement secondaire) et au début de l'apprentissage de la division euclidienne quand on apprend « le sens des opérations ». Le signe × est-il véritablement opportun au début de l'apprentissage de la division ?

Conclusion sur les problèmes de déplacement

L'échec est assez massif à nos problèmes de déplacement texte et pancarte. Les élèves n'essaient apparemment pas de représenter (ni de se représenter) l'espace. Pour le problème

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

dont les données sont portées par des pancartes, ils semblent choisir une opération indépendamment du sens des flèches et s'y tiennent. Pour le problème dont les données sont dans un texte, on ne repère pas de régularité dans les réponses, même si la dernière question, qui ne met pas en jeu des déplacements mais uniquement des positions est mieux réussie que les autres. Toutefois, dans ces trois problèmes, il y a une première question qui devait servir à repérer la compréhension de la situation et qui ne demandait pas de calcul. Elle a peut-être eu un effet très négatif sur la réussite des élèves. Il aurait peut-être été opportun de la placer en 2ème ou 3ème position.

- Conclusions sur les schémas cotés

Tout d'abord, rappelons ce que nous avons indiqué en introduction, les élèves ne dessinent que très marginalement des schémas cotés pour résoudre des problèmes impliquant la longueur. Ils n'ont pas utilisé le plus souvent les ébauches de schémas que nous avions dessinées (quelques uns ont d'ailleurs parfois essayé de le faire, sans réussir à mener à terme ce projet).

Nous avions évoqué deux interprétations, fausses, de ces schémas lors de la conception du test. Elles consistent d'une part à donner la grandeur « absolue » des traits (procédure erronée de mesurage), d'autre part à donner leur grandeur relative par rapport aux données chiffrées présentes dans l'énoncé (procédure erronée d'estimation des proportions). Nous avons retrouvé ces deux interprétations même si les élèves ne disposaient pas de la règle. La procédure erronée d'estimation des proportions se rencontre tant pour des situations de division où les élèves font alors une sorte d'estimation grossière des proportions sans utiliser la division, que pour des situations de soustraction. Les valeurs numériques semblent être un facteur important quant à l'apparition ou non de ces procédures erronées, la complexité de la situation semble en être un autre. Les élèves pourraient se rabattre sur ces procédures lorsqu'ils ne savent pas quoi faire d'autre.

Nous avions supprimé la règle graduée de nos exercices avec schéma pour tenter d'éliminer les procédures erronées de mesurage. Nous avons vu que nous avons partiellement échoué à cet objectif, toutefois et bien qu'il faille être très prudent quant aux comparaisons, il nous semble que la suppression de cet instrument est susceptible de permettre à certains élèves d'abandonner la procédure erronée de mesurage notamment et d'envisager des procédures de résolution plus élaborées. Finalement, la présence de la règle graduée pourrait jouer un rôle

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

contre-productif lors de la résolution de problèmes comportant des schémas. Cette hypothèse renvoie à l'apprentissage de la géométrie et à ce qu'on a le droit ou pas de lire sur un dessin.

Enfin, le problème de calcul de « distances entre les animaux », dont les données numériques sont fournies sur un schéma coté, nous a amenée à évoquer la possibilité d'utiliser ce problème pour une ingénierie relative à l'apprentissage de la lecture des schémas cotés, voire de leur production pour résoudre des problèmes de déplacement. En effet, l'utilisation de nombres ronds qui permettent des calculs rapides (et un contrôle facile) et les proportions du schéma visiblement fausses par rapport aux données numériques fournies pourraient favoriser la perception d'une contradiction entre les différentes données numériques (celles calculées et celles fournies) et permettre de développer une interprétation *ad hoc* des schémas cotés, voire d'en produire.

4. Conclusion

Dans cette conclusion nous reprenons des éléments quant à notre première partie sur la numération et le système métrique et d'autres sur le sens des opérations.

Nous avons mis en évidence une différence dans les procédures utilisées pour résoudre les questions « sans contexte » et les questions « en contexte » pour la numération et le système métrique. Quand on reste à l'intérieur du système métrique, selon les unités, selon les pratiques sociales aujourd'hui impliquées par ces unités probablement, selon l'enseignement dispensé, il semble qu'on puisse avoir pour la résolution des questions en contexte et hors contexte, soit une articulation quand on enseigne dans différents registres une même relation (ce qui est le cas de la conversion des mm en cm avec l'utilisation de la règle graduée), soit une désarticulation entre les techniques de résolution pour les deux types de questions peut-être quand une relation n'est enseignée que dans un contexte.

En termes de types de tâches, ces résultats tendraient à montrer que pour les unités « non usuelles », les types de tâches sont très éclatés : les questions hors contexte et les questions en contexte pour une même relation entre unités métriques pourraient constituer des types de tâches différents, en ce sens qu'ils ne seraient pas résolus par la même technique.

Pour la relation entre système métrique et numération, nos données semblent montrer qu'on peut avoir pour le traitement des tâches :

- des techniques formelles, utilisées uniquement pour des tâches hors contexte et donc forcément étrangères les unes aux autres puisque aucun contexte ne les rapproche,

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

- des techniques de calcul et des techniques internes à la numération (procédures qui ne laissent pas de traces) utilisées pour résoudre les problèmes en contexte tant de numération que de système métrique après conversion dans une bonne unité, c'est-à-dire une fois que les questions de système métrique peuvent être interprétées comme des questions de numération.

On retrouve des résultats médiocres (déjà observés dans les évaluations nationales) pour la recherche du nombre de centaines dans un nombre de quatre chiffres (question qui n'est d'ailleurs apparemment pas traitée complètement comme une question formelle d'après l'analyse factorielle). Les réussites aux conversions « formelles » sont assez moyennes, en particulier la conversion des kilogrammes en grammes est moins bien réussie que celle des kilogrammes en hectogrammes. Un élève sur quatre se trompe de puissance de dix pour convertir les kilogrammes en grammes.

Dans quels contextes tâches et techniques sur le système métrique et la numération vivent-ils dans l'enseignement d'aujourd'hui ? Observe-t-on dans les manuels d'aujourd'hui une mise en relation entre les connaissances formelles et en contexte tant pour la numération que pour le système métrique ? Observe-t-on une articulation entre les tâches et techniques du système métrique et de la numération ? L'absence d'articulation pourrait expliquer les résultats médiocres en numération et en système métrique car les deux domaines pourraient vivre séparément plutôt que de se renforcer l'un l'autre.

Nous avons mis en évidence la présence de procédures « non définitives » pour la résolution de problèmes de division qui se manifestent sous la forme de multiplications. Elles nous semblent susceptibles de cacher le sens de l'opération « division ». Par ailleurs, des calculs sur des « nombres simples » pourraient amener à travailler les sens de l'opération « division » même quand on ne dispose pas de l'algorithme. Ces éléments nous amènent à envisager la nécessité de distinguer davantage sens du problème et sens de l'opération dans l'apprentissage. Ceci nous semble amener à la nécessité d'introduire un symbolisme plus précoce pour la division. Il peut s'agir d'utiliser le mot « division » mais aussi d'utiliser un signe pour désigner l'opération, la question du choix du signe étant sans doute délicate.

À propos des schémas cotés, nous avons repéré plusieurs choses. Tout d'abord, lorsqu'il s'agit de résoudre des problèmes de distance sur des routes, nous observons que les élèves échouent massivement lorsqu'il n'y a pas de schéma coté pour représenter la situation. Parmi ceux qui réussissent, une petite partie d'entre eux en produisent. À propos de l'interprétation

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

de tels schémas, nous retrouvons des difficultés connues mais peut-être sommes-nous mieux en mesure de les spécifier. On observe deux interprétations fausses :

- La première consiste à donner la longueur du trait qui représente la situation : nous l'appelons procédure d'estimation absolue. Cette procédure peut d'ailleurs être non immédiate : s'il s'agit par exemple d'un trait de 4 cm dans un problème où les données sont en centaines de mètres écrites sous la forme X00 m, les élèves peuvent écrire 400 m ; si les élèves n'ont pas de règle pour mesurer ils peuvent donner une estimation de sa mesure « à l'œil » ;
- La deuxième consiste à utiliser les proportions du dessin en prenant en compte les données chiffrées fournies pour donner une estimation de la longueur cherchée, nous l'appelons procédure erronée d'estimation relative.

Il nous faut signaler que l'identification de ces procédures n'est pas toujours simple, en particulier de la deuxième puisque les réponses fournies par les élèves peuvent être relativement variées et le plus souvent sans trace. La deuxième procédure nous semble plus élaborée que la première en ce sens qu'il est nécessaire d'avoir pris un peu de distance avec la représentation pour la mettre en œuvre.

Nous avons mis en évidence des conditions relatives à l'apparition de ces procédures et peut-être pour les dépasser. Tout d'abord, il est bien possible que ces procédures constituent des solutions de repli quand la situation devient trop compliquée à traiter. Venons-en à des conditions spécifiques pour chacune d'entre elles. Pour la première, il semble que le fait de supprimer la règle graduée permet à un certain nombre d'élèves d'envisager d'autres procédures, plus élaborées pour résoudre les problèmes. La suppression de la règle modifie peut-être le contrat : « puisqu'il n'y a pas de règle, on n'a pas besoin d'utiliser les dimensions du dessin ». Pour la deuxième, le contexte semble influer sur l'apparition de cette procédure : en particulier, le choix des nombres et des proportions semblent être important, des nombres ronds (qui permettent des calculs très simples) et des proportions simples (moitié dans notre questionnaire) pourraient faciliter l'apparition de cette procédure.

Toutefois, il est bien possible qu'on puisse faire de cette difficulté un atout. Dans notre exercice, le dessin n'est pas du tout à l'échelle. On observe que des élèves en nombre non négligeable commencent par fournir une réponse erronée du type estimation relative. Comme les calculs sont très simples, certains semblent être en mesure de contrôler qu'il n'y a plus d'additivité des longueurs avec les nombres qu'ils obtiennent. Ils prennent alors peut-être conscience qu'il y a un conflit entre les données de l'énoncé : entre nombres et proportions.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Ils reviennent alors sur leur réponse (spontanément) et en proposent une qui est correcte, obtenue avec une soustraction (le plus souvent, le calcul n'est pas visible). Peut-être que notre dispositif pourrait être un moyen pour enseigner « ce qu'on a le droit de lire sur un schéma coté », voire comment on produit un tel schéma. Il y a d'ailleurs des schémas sur lesquels il « faut » lire les proportions (pour les situations de division). Ceci n'est cependant pas probablement pas vrai en général : quand on fait de géométrie, en principe les longueurs égales sont codées ; dans un problème d'arithmétique, à part dans notre test, il n'est pas sûr qu'on donne souvent un schéma sans qu'il y ait texte qui permette de confirmer les égalités de longueur éventuellement visibles sur le dessin.

À propos de la soustraction sur objets, nous observons que moins d'un élève sur trois est capable de produire une « soustraction sur objets », sans mesure. Nous pensons que cette connaissance n'est pas enseignée. Nous constatons donc que beaucoup d'élèves ne l'inventent pas. Nous n'avons pas mis en évidence la contribution éventuelle (ou possible) de cette connaissance au sens des opérations mais elle n'est peut-être pas négliger. Cette connaissance est en effet importante dans la théorie des grandeurs que nous utilisée pour concevoir cet exercice.

Un de nos projets initiaux consistait à repérer des écarts entre les réussites aux exercices formulés dans le discret et d'autres dans le continu (le plus souvent la longueur). Sur ce plan nous n'avons pas identifié d'élément décisif. Certes certains exercices dans le discret semblent être mieux réussis que ceux sur la longueur : ce semble être le cas pour la soustraction, pour la multiplication sur objets et seulement pour le problème de quotition pour ce qui concerne la division. On constate avec nos problèmes sur les quatre opérations dans le discret (problème « paquets ») et sur la longueur (problème « baguettes ») que les représentations utilisées peuvent influer dans un sens ou dans l'autre. Il s'agit d'utiliser des schémas cotés pour représenter la longueur et des paquets qui contiennent des objets qu'on ne voit pas pour représenter le discret. Apparemment, la réussite est meilleure à la division avec les paquets qu'avec les schémas, c'est l'inverse pour la soustraction. Malgré les difficultés qu'il induit, le schéma de longueur pourrait donc faciliter la reconnaissance de l'opération soustraction. Toujours à propos de l'influence du contexte, nous avons proposé deux exercices avec la grandeur longueur dans la série avec les quatre opérations. Dans le deuxième, les deux longueurs sont les côtés d'un même rectangle alors que dans le premier ce sont les longueurs de deux baguettes « indépendantes ». Cette particularité semble rendre plus difficile l'exercice « rectangle ».

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Nous n'avons fait ce travail que pour la division : plus qu'une différence sur la réussite en fonction des grandeurs on constate surtout une très grande variabilité entre les différentes classes dans les réussites et les procédures des élèves. Certaines classes où presque tous les élèves savent faire « un peu » mais peu savent « tout » faire, d'autres où beaucoup ne savent « rien » faire et un nombre relativement important savent « tout » faire. Certaines classes avec beaucoup de procédures non définitives, d'autres avec très peu de telles procédures. Il pourrait être intéressant d'interroger les pratiques des enseignants : quelles sont les pratiques qui produisent ces phénomènes ? En particulier, quelles sont les influences respectives des organisations didactique et mathématique dans la production de tels phénomènes ? Par ailleurs, quels sont les effets à termes de ces phénomènes ?

Pour finir, nous revenons à notre série de problèmes sur les quatre opérations : ces trois problèmes sont loin d'être standard. Ce sont des problèmes à deux inconnues qui peuvent se résoudre avec une procédure arithmétique. Pour ces exercices, nous avions voulu mettre les élèves dans une situation difficile, sans toutefois les piéger. En particulier, nous avons essayé de ne pas donner d'indice sur l'ordre de recherche des inconnues. Les deux premiers exercices sont nettement mieux réussi que ce à quoi nous nous attendions, par plus de la moitié des élèves. Ceci signifie que les élèves ont su prendre des initiatives pour les résoudre.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Chapitre 6. Évolution des organisations mathématiques sur la numération

Initialement, ce chapitre était destiné à élucider les rapports entre numération et système métrique dans l'enseignement actuel dans le prolongement du questionnaire. Ce projet s'avère complexe et nous ne le menons pas véritablement à terme. Pour des raisons que nous allons préciser, ce chapitre sera principalement consacré à l'étude de l'évolution des organisations mathématiques sur la numération à différentes périodes.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

1. Introduction

1.1. Rappel des conclusions du chapitre 5 : sur la désarticulation possible dans les praxéologies actuelles entre les deux domaines

▪ Préliminaires

Nous appelons *unités de la numération* les mots qui désignent les puissances de dix : unité, dizaine, centaine, millier, dizaine de milliers, etc. Nous appelons *numération en unités*, les façons de désigner les nombres avec ces mots : *9 centaines 4 unités* ou *neuf centaines quatre unités*, par exemple.

Nous donnons maintenant deux propriétés de la numération positionnelle. Nous les évoquons seulement par des exemples. Nous appelons *propriété forte de la numération positionnelle* : « dans 6789 centaines, le chiffre des unités de 6789 indique des centaines et de, droite à gauche, chaque chiffre indique une unité dix fois plus grande que celui qui le précède ». Nous appelons propriété de la troncature, une conséquence de la propriété forte : « dans 23456, il y a 234 centaines et 56 unités ».

Nous ferons d'assez nombreuses références à ces éléments préliminaires.

▪ Conclusion et hypothèse

À partir des conclusions de notre chapitre précédent, nous formulons une hypothèse puis nous proposons des questions pour l'éprouver dans une étude de manuels actuels.

Nous pensons avoir confirmé les résultats de Parouty (2005) et des éléments des évaluations en 6ème quant à la réussite médiocre à certaines tâches de « conversion » en numération et en système métrique. Nous pensons avoir mis en évidence une différence dans les procédures utilisées pour résoudre les questions « sans contexte » et les questions « en contexte » pour la numération et le système métrique. Quand on reste à l'intérieur du système métrique, selon les unités, selon les pratiques de la vie courante aujourd'hui impliquées par ces unités probablement, il semble qu'on puisse avoir pour la résolution des questions en contexte et hors contexte, soit une articulation, soit une désarticulation entre les techniques de résolution pour les deux types de questions.

En termes de types de tâches, ces résultats tendraient à montrer que pour les unités « non usuelles », les types de tâches sont très éclatés : les questions hors contexte et les questions en contexte pour une même relation entre unités métriques pourraient constituer des types de tâches différents, en ce sens qu'ils ne seraient pas résolus par la même technique.

Pour la relation entre système métrique et numération, nos données semblent montrer qu'on peut avoir pour le traitement des tâches :

- des techniques formelles, utilisées uniquement pour des tâches hors contexte et donc forcément étrangères les unes aux autres puisqu'aucun contexte ne peut les rapprocher,
- des techniques de calcul et des techniques internes à la numération (procédures qui ne laissent pas de traces) utilisées pour résoudre les problèmes en contexte tant de numération que de système métrique après conversion dans une unité commune.

Dans quels environnements tâches et techniques sur le système métrique et la numération vivent-ils dans l'enseignement d'aujourd'hui ? Observe-t-on dans les manuels d'aujourd'hui une mise en relation entre les connaissances formelles et en contexte tant pour la numération que pour le système métrique ? Observe-t-on une articulation entre les tâches du système métrique et de la numération ? de même pour les techniques ?

L'enseignement ancien nous a permis d'identifier quelques aspects relatifs à la cohérence entre système métrique et numération. S'il y a bien une désarticulation entre les deux, tout ou partie de ces aspects devraient être perturbés. Les résultats médiocres sur certains items de numération et de système métrique pourraient être la manifestation d'une déperdition d'énergie : le travail en numération ne renforce pas le travail en système métrique et réciproquement.

- Questions pour étudier les manuels pour éprouver notre hypothèse

Sur l'articulation des progressions, n'arrive-t-il pas que le domaine numérique étudié en système métrique soit étranger à celui qui est étudié en numération ? Par exemple, les programmes de 2002 demandent d'une part d'étudier les nombres jusqu'à mille et d'autre part la relation entre kilogramme et gramme. L'étude des nombres « jusqu'à mille » ne se limiterait-elle pas « aux nombres de 3 chiffres » et celle de la relation entre kilogramme et gramme à celle de l'énoncé « 1 kg = 1000 g » sans qu'on évoque la relation entre centaines et millier ? On voit qu'il peut y avoir deux types d'ignorances entre les domaines numériques travaillés : celui dans lequel la numération précède le système métrique (on étudie par exemple la relation de dizaine entre mm et cm alors que les élèves ont déjà étudié les nombres jusqu'à mille) et où on peut supposer que les élèves réinvestissent des connaissances plus

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

anciennes et celui que nous avons évoqué avec l'étude du kg (dans laquelle des connaissances en numération sont susceptibles de manquer pour étudier le système métrique). Ce deuxième aspect nous semblerait particulièrement symptomatique de l'absence de place accordée au système métrique dans l'étude de la numération.

Sur l'articulation des techniques et technologies, quelles sont les techniques (en particulier, tableau et discours) présents dans les deux domaines ?

Sur les ostensifs, a-t-on les mêmes dans les deux domaines (ou bien des ostensifs qui se ressemblent) ? Au contraire, a-t-on des ostensifs étrangers les uns aux autres ? A-t-on les mêmes types de tâches en numération et système métrique ?

- Première étude : les rapports entre les deux domaines dans des manuels actuels

Méthodologie

Pour étudier cette première série de questions nous conduisons une étude sur des manuels actuels, parus entre 2001 et 2005. Nous choisissons trois manuels qui ont été les plus vendus en 2001 (d'après les informations communiquées à cette date par les éditeurs) : Le Nouveau Math Élem (NME), Pour comprendre les mathématiques (PCM), J'apprends les maths (JAM). Nous savons que les pratiques des enseignants ne se réduisent pas à ce qu'on trouve dans les manuels, par ailleurs nous ignorons, même, si les enseignants de nos classes utilisaient des manuels, le cas échéant lesquels et s'ils étaient récents. Toutefois, les élèves que nous avons interrogés peuvent avoir rencontré certains de ces manuels dans leur scolarité puisqu'ils étaient en CM2 en 2006 et leurs enseignants peuvent s'en être inspirés.

Compte tenu des programmes, c'est-à-dire de la programmation de l'étude des entiers et des diverses grandeurs et unités métriques, et de nos questions, nous étudions trois niveaux (CE1, CE2, CM1) et concentrons notre étude sur les nombres entiers. Nous relevons de façon systématique les tâches en numération et en système métrique, les textes des leçons qui peuvent être des exemples de tâches, des techniques ou des éléments technologiques, les ostensifs utilisés dans les deux domaines. Nous essayons de repérer les types de tâches des leçons de numération et de système métrique. Comme nous l'avons fait pour notre étude des manuels anciens, nous relevons les domaines numériques atteints quand on étudie telle ou telle unité du système métrique. Nous élaborons une grille plus ou moins commune pour étudier simultanément les deux domaines.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Résultats

Nous ne donnons pas en détail les résultats de cette première étude. Nous en retirons quelques faits qui nous semblent saillants et qui nous permettent de poser de nouvelles questions pour la suite de notre travail.

À propos de l'articulation des domaines numériques, au CE2, JAM étudie en parallèle les unités de la numération et le système d'unités fondé sur le millimètre (il propose cette étude pour la longueur mais pas pour les autres grandeurs). Les deux autres font vivre plus ou moins séparément numération et système métrique. Souvent, le domaine numérique étudié en numération est grand devant celui nécessaire dans les leçons de système métrique. Il y a cependant quelques exceptions où le domaine numérique nécessaire pour étudier le système métrique devance celui étudié en numération : NME CE2 (leçon 5) étudie les nombres jusqu'à 1000 (on écrit seulement 1000 et pas mille, ni 1 millier). Dans les leçons qui suivent, dans des calculs les élèves rencontrent des nombres de quatre chiffres. Arrive la leçon 27, dans laquelle on étudie notamment le kilomètre (introduit à partir d'un problème où il s'agit de calculer la longueur parcourue quand on fait cinq fois le tour d'une piste de 400 m et donner la réponse en kilomètres). On dit que « 1 kilomètre=1000 mètres ». La leçon (28) sur les nombres jusqu'à 10000 vient après : enfin, on y dira que « 1000 unités, c'est mille. C'est aussi 100 dizaines ou 10 centaines ». Dans la leçon 27, il y a notamment un exercice de conversion : « transforme dans les unités demandées : « 4008 cm=…m, …cm=3 m, 40 dm=…m, 820 cm=…m et …cm ». Dans PCM CE1, on étudie les nombres jusqu'à 99 (leçon 26), on rencontre ensuite la monnaie où on apprend que 1€=100c et on utilise les nombres jusqu'à 140 (leçon 31), vient ensuite « le nombre 100, la centaine » (leçon 36) et les nombres jusqu'à 999 (leçon 39). On voit donc que non seulement le domaine nécessaire pour étudier le système métrique (ou la monnaie) peut précéder son étude en numération mais que cela est aussi vrai, dans NME CE2, pour le calcul.

De façon générale, les leçons de système métrique sont beaucoup moins nombreuses qu'avant la réforme et on étudie en général plusieurs unités dans la même leçon. La capacité est très « négligée » dans certains manuels. Par exemple, elle n'apparaît pas dans le sommaire de NME CM1, on y trouve en revanche une leçon pour l'étude de la masse : « Unités de masse ». Dans les pages du livre, son titre a changé, il est devenu « Unités de masse… et de capacité ». On trouve donc la capacité agglomérée à la masse et leurs unités (NME CM1, pp. 106-107). Paradoxalement, dans cette première étude rapide, nous avons le sentiment que les tâches d'étude du système métrique n'ont pas été fondamentalement modifiées par rapport à l’enseignement ancien : on trouve des tâches d’estimation (qui toutefois peuvent parfois se réduire à un savoir livresque), on trouve des conversions, on trouve des tâches de rangement de grandeurs mesurées (tâches qui n’existaient peut-être pas dans l’enseignement ancien). PCM CE2 propose des tâches que nous avons trouvées dans l’enseignement ancien :

- pour l’étude du kilomètre, il fait courir les élèves pendant un kilomètre par exemple,
- il fait matérialiser les rapports entre plusieurs unités : kilogramme et gramme, mètre et dizaine de centimètres, par exemple.

En revanche, comme l’articulation entre numération et système métrique n’existe plus, ces tâches ne contribuent pas de façon claire à l’étude de la numération : par exemple dans la leçon 75 « mesurer des longueurs, la règle graduée » (située après les nombres jusqu’à 10000) où on apprend cm et mm, PCM CE2 fait mesurer des longueurs de 1 cm à 1 dm (de 5 cm à 20 cm dans le livre du maître), ce qui ne fait pas apprendre les petits nombres de mm par exemple. On ne trouve pas (ou presque pas) de tâches d’évocation de conversions en contexte (sauf lorsqu’il s’agit de lire des graduations), en particulier le rapport entre unités métriques : « combien de paquets de 100 g dans 4 kg ? » ne fait pas partie des tâches ordinairement prescrites. En revanche, ces conversions sont nécessaires pour résoudre certains problèmes d’arithmétique où une même grandeur peut être exprimée dans des unités différentes.

À propos de l’étude la numération, nous relevons au niveau des tâches de nombreuses décompositions de nombres selon les écritures chiffrées des puissances de dix. La plupart du temps, ces décompositions ne sont pas reprises dans les leçons de système métrique, c’est à dire que si on demande aux élèves de décomposer 5432 en 5000 + 400 + 30 + 2, on ne leur demande pas en général de décomposer 5432 m en 5000 m + 400 m + 30 m + 2 m. Pourtant, ces tâches semblent parfois constituer le cœur de l’étude de la numération. D’une façon peut-être plus subtile, on voit apparaître d’autres écarts entre les tâches de numération et de système métrique. Nous avons dit qu’on trouvait des tâches de comparaisons de grandeurs mesurées en système métrique. Dans NME CE2, leçon 52, on demande « Recopie les distances supérieures à 1 km : 200 m, 99 m, 3 km, 500 m, 2000 dm, 5000 m, 195 m, 99 hm, 500 dam, 1800 m ». On voit que cette tâche pourrait avoir une correspondance en numération. « Trouve et recopie les nombres supérieurs à 1 millier : 200, 99, 3 milliers, 5000, 195, 500 dizaines, 1800. » Formulée avec ces ostensifs, cette tâche n’existe pas dans nos manuels puisqu’en général on compare les nombres donnés par leur écriture chiffrée et que la technique de comparaison est l’algorithme de comparaison des chiffres deux à deux à partir de la gauche (après avoir comparé les longueurs des nombres). Dans notre traduction de la

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tâche en numération, nous avons par ailleurs éliminé la comparaison de 2000 dm avec 1 km car il n'a pas de correspondance directe en numération (sur les entiers), il est pourtant très intéressant. Pour le comparer à 1 km, soit on convertit tout en mètres (avec le tableau par exemple), soit on peut dire que 2000 dm c'est dix fois moins que 2000 m, c'est donc dix fois moins que 2 km, c'est donc moins que 1 km. Dans PCM CE2 (ldm, p. 121) et NME CE2, la technique pour résoudre ces exercices est la conversion dans une seule unité, unité qui est donc à choisir. On utilise ensuite probablement l'algorithme de comparaison de la numération.

Dans plusieurs manuels, les relations entre les unités de la numération n'apparaissent pas explicitement. C'est ainsi que PCM CE2 qui fait pourtant matérialiser plusieurs relations entre unités métriques, nous l'avons vu, ne cite que la relation entre centaine et millier et pas celle entre dizaine et centaine dans ses leçons de numération alors qu'il reprend pourtant en quatre leçons l'étude des nombres de trois chiffres. Cette relation est toutefois indiquée au CE1. Nous avons déjà parlé de la progression de NME au CE2 à propos du millier et de l'apparition tardive des relations entre unités de la numération.

De même, voyons-nous, dans les deux domaines, des tableaux (de conversion, de numération, jamais mixtes). Nous donnons une copie de deux d'entre eux tirés de NME CE2 l'un dans la leçon 52 « les unités de longueur », l'autre dans la leçon 109 « décomposer les nombres ».

Les unités de longueur du système métrique

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
4	5	7	2			
			3	1	8	

1 000 mètres = **1 kilomètre** 1 000 m = 1 km
100 mètres = **1 hectomètre** 100 m = 1 hm
10 mètres = **1 décamètre** 10 m = 1 dam

Exemples : • 4 km 5 hm 7 dam 2 m = 4 572 mètres • 318 cm = 3 m 1 dm 8 cm

(NME CE2, p. 60, leçon 52)

Tableau de décomposition des nombres

mille (milliers)			unités			
c	d	u	c	d	u	
3	5	7	4	8	9	→ **357 489**
3	0	0	0	0	0	→ 300 000
	5	0	0	0	0	→ 50 000
		7	0	0	0	→ 7 000
			4	0	0	→ 400
				8	0	→ 80
					9	→ 9

357 489 =
300 000 + 50 000 + 7 000 + 400 + 80 + 9
(3 x 100 000) + (5 x 10 000) + (7 x 1 000) + (4 x 100) + (8 x 10) + (9 x 1)

(NME CE2, p. 133, leçon 109)

On voit qu'on ne remplit pas les tableaux de la même façon : on écrit des chiffres au milieu du tableau pour le système métrique, on « pousse » les chiffres à droite pour la numération (en mettant des zéros éventuellement). Nous précisons ce que nous avons dit à propos des décompositions qui ne mobilisent pas les mêmes ostensifs dans les deux domaines : avec des unités métriques dans l'un, avec des écritures chiffrées des puissances de dix dans l'autre.

Enfin, nous voyons des leçons de numération, sur l'ordre et la régularité de la suite écrite (PCM CE1 leçons 49 et 50, NME CE2 leçons 6 et 7 par exemple) notamment dans lesquelles on n'évoque jamais les « quantités », on n'y trouve par ailleurs aucune référence aux unités de la numération, les seuls contextes évoqués – quand il y en a – sont des numéros. Le rangement de nombres occupe une place importante. Ce type de tâches se présente de diverses manières (que nous n'avons toutefois pas recensées précisément) : encadrer, trouver des nombres, autour, entre…

Nous retenons de cette première étude sommaire une hétérogénéité probablement importante dans les propositions des manuels pour étudier numération et système métrique. Par ailleurs, il semble bien possible que numération et système métrique soient désarticulés avec des praxéologies parfois différentes dans les deux domaines. En effet, entre les deux domaines, les tâches semblent avoir une certaine familiarité sans qu'elles se correspondent exactement, les techniques ne semblent pas être véritablement les mêmes, en particulier les ostensifs tant pour les tâches que pour les techniques semblent être parfois différents. Les leçons de numération qui ne réfèrent pas aux « quantités », même s'il ne s'agit que de l'algorithme de la suite écrite, nous paraissent étranges car le CE1 et le CE2 constituent quand même le cœur de l'apprentissage de la numération de position des entiers.

Nous donnons en exemple les leçons 22 et 23 de PCM CE2 (2004). Nous voyons que la leçon sur l'ordre des nombres de 3 chiffres précède celle sur la « décomposition » de ces mêmes nombres. Et nous n'avons pas repéré de leçon sur le nombre cent dans ce manuel : on passe des nombres jusqu'à 99 aux nombres jusqu'à 999.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

22 Les nombres jusqu'à 999
Écriture et ordre

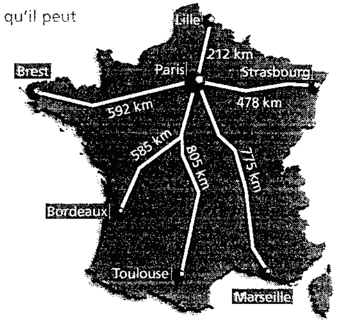
CALCUL MENTAL
Retrancher un petit nombre.
7 – 3 ; 9 – 4 ; 8 – 6...

Objectifs – *Ordonner et écrire en lettres les nombres de trois chiffres.*

Piste de recherche

Hugo habite Paris. Avec le réservoir plein au départ, sa voiture peut parcourir 500 km.

- Observe la carte et écris les noms des villes qu'il peut rejoindre sans prendre d'essence.



- Range dans l'ordre croissant les distances écrites sur la carte.

<

- Écris en lettres le nombre de kilomètres de Paris à Lille, puis de Paris à Toulouse.

Paris-Lille : .... Paris-Toulouse : ....

1. Range ces nombres dans l'ordre croissant (du plus petit au plus grand).

542 139 215 350 154

<

2. Range ces nombres dans l'ordre décroissant (du plus grand au plus petit).

250 301 98 175 84

\>

3. Écris chacun des nombres suivants à la place qui convient.
(Attention : il y a une étiquette en trop !)

607 905 736 676 831

650 750 850

4. Complète le tableau.

......	cent quatre-vingt-seize
303	......
......	huit cent quatre-vingt-dix
......	quatre cent soixante-dix
178	......
280	......

calcul réfléchi Complète.

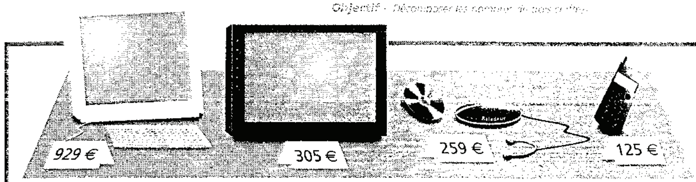
24 + ... = 30
67 + ... = 70
125 + ... = 130
...... + 52 = 60
...... + 50 = 100

23 Les nombres jusqu'à 999
Décomposition

CALCUL MENTAL
Retrancher un petit nombre.
9 – 5 ; 8 – 3 ; 7 – 2...

Objectif – *Décomposer les nombres de trois chiffres.*

Piste de recherche



- Paie chaque appareil avec des billets de 100 €, de 10 € et des pièces de 1 €. Tu dois utiliser chaque fois le moins de billets et de pièces possible.
- Complète chaque tableau.

A

	Nombre de billets de 100 €	Nombre de billets de 10 €	Nombre de pièces de 1 €
Baladeur			
Ordinateur			
Téléviseur			
Téléphone			

B

259 = 200 + 50 + 9
929 =
305 =
125 =

1. Observe l'exemple et complète.

648 = 600 + 40 + 8
...... = 400 + 80 + 6
534 = ...
...... = 200 + 70
908 = ...

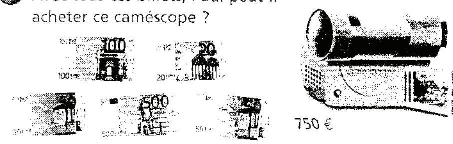
2. Observe l'exemple et complète.

543 c'est 5 centaines 4 dizaines et 3 unités.
856 c'est ...... centaines ...... dizaines et ...... unités.
...... c'est 6 centaines et 1 dizaine.
450 c'est ...... centaines et ...... dizaines.
...... c'est 8 centaines et 9 unités.

3. Pour chaque nombre, entoure en rouge le chiffre des dizaines et en **bleu** le chiffre des centaines.

2 4 8   1 5 0   9   3 0 2   4 8

4. Avec tous ces billets, Paul peut-il acheter ce caméscope ?



Mémo

c	d	u
6	4	8

648 = 600 + 40 + 8
648, c'est 6 centaines 4 dizaines 8 unités

Le coin du chercheur
A et B représentent chacun un chiffre différent. Retrouve ces chiffres.
A = B =

(PCM CE2 2004, leçons 22-23)

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Ces premiers éléments nous amène à confirmer notre hypothèse quant au fait que numération et système métrique ne se renforcent pas l'un l'autre. En effet, dans la mesure où les praxéologies existant dans les deux domaines ne sont pas très congruentes, il semble raisonnable de penser que les liens entre les deux sont difficiles et que ces deux domaines sont étudiés plus ou moins indépendamment l'un de l'autre. Toutefois, il nous semble que cette étude n'est pas faite à une échelle suffisamment grande pour être décisive.

À ce moment de notre étude, nous avons le sentiment qu'on ne travaille pas la numération et le système métrique avec les mêmes buts et même il nous semble que certaines tâches d'étude du système métrique auraient davantage leur place dans l'étude de la numération. En particulier, les relations entre unités de la numération sont parfois absentes alors qu'elles sont parfois plus explicites dans l'étude du système métrique ou de la monnaie. Enfin, nous ne comprenons pas véritablement le rôle des décompositions selon les puissances de dix chiffrées qui nous apparaissent comme des calculs à effectuer et dont nous n'avons pas le souvenir dans les leçons de numération des manuels anciens que nous avons consultés pour les technologies (chapitre 2). Peut-on véritablement comprendre la numération de position sans référer de manière systématique à des contextes qui renvoient aux valeurs des différents chiffres ou à ce qu'ils représentent, du moins dans les premiers temps de l'apprentissage ce qui nous semble encore être le cas des nombres de trois et quatre chiffres au CE2 ?

- Nouvelle question

À l'issue de cette première étude, nous sommes confrontée à une question qui nous surprend.

Qu'est-ce qu'étudier la numération de position des entiers ? Au sein de cette étude, quel est le rôle des décompositions selon les puissances de dix chiffrées ?

Nous éprouvons en effet le besoin de clarifier les objectifs de l'étude de cet objet que nous pensions bien connaître : la numération de position. Nous avons besoin, en quelque sorte, de « praxéologies mathématiques de référence ». Se pose d'abord la question de les trouver. Ensuite, nous les utiliserons pour tenter d'élucider le rapport institutionnel à la numération aujourd'hui.

1.2. Plan et méthodologie

Pour la suite de ce chapitre, nous allons d'abord étudier notre nouvelle question avec une méthodologie que nous allons préciser. Nous laissons provisoirement de côté les manuels actuels. Nous reviendrons à eux dans le but de mieux comprendre l'enseignement de la numération tel qu'il peut être dispensé aujourd'hui.

- Comment étudier notre nouvelle question ?

Notre question nous est apparue à partir d'une première étude de l'enseignement actuel. Pour l'étudier nous devons donc faire un « pas de côté » et nous tourner vers d'autres sources. Pour ce faire, nous utilisons trois moyens complémentaires. Nous commençons par une étude bibliographique des travaux de didactique en numération. Avec ce premier axe, nous voulons notamment comprendre quelle est la finalité d'un enseignement de la numération pour des chercheurs en didactique. Nous poursuivons par une nouvelle étude de l'enseignement ancien. Elle se décline selon deux axes. Nous étudions d'abord la numération dans les traités de référence dans l'enseignement ancien puis nous revenons sur le travail d'Harlé. L'étude de ces traités nous semble pertinente pour la période actuelle car on peut penser que les savoirs savants relatifs aux entiers au 18ème siècle sont encore valides aujourd'hui. Par ailleurs, si nous avons à peu près mis à jour l'étude du système métrique, nous n'avons pas véritablement caractérisé celle de la numération. Jusqu'à présent, notre étude de l'enseignement ancien nous a permis de mettre au point des outils pour étudier des questions didactiques sur l'enseignement actuel :

- l'élaboration et les résultats de notre questionnaire nous laissent penser que cette étude a permis de poser des questions pertinentes (conception des exercices, articulation des techniques dans les deux domaines),
- la praxéologie que nous avons mise en évidence pour l'étude du système métrique nous semble susceptible d'enrichir la réflexion sur des ingénieries pour l'enseignement actuel du système métrique.

Notre troisième axe pour étudier notre question consiste donc à mettre à jour le rapport institutionnel à la numération de position avant la réforme (ou dans plusieurs périodes qui ont précédé la réforme).

- Etudier l'histoire de l'enseignement de la numération pour comprendre la situation actuelle

Ce premier point nous permet non seulement de disposer de « praxéologies mathématiques de référence » quant à la numération mais aussi de mieux cerner l'état de cet enseignement jusqu'à la réforme. *A priori*, on peut penser que de nombreux bouleversements se sont produits au moment de la réforme et que la situation actuelle est un héritage complexe de ces

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

évolutions comme nous l'avons vu par exemple pour les objets proportionnalité et fractions dans notre chapitre 2. Ceci justifie que nous poursuivions notre étude de l'enseignement de la numération à partir de la réforme. Comme nous l'avons vu avec nos deux objets, des transformations importantes se produisent au moment de la contre-réforme et d'autres dans la période actuelle. Nous tentons donc de comprendre la période actuelle en caractérisant les évolutions successives relatives à l'enseignement de la numération au 20ème siècle. A chaque période, nous cherchons à caractériser de façon plus ou moins fine le rapport institutionnel à la numération, en particulier à repérer les savoirs de référence.

Avant d'étudier avec plus ou moins de détails les praxéologies de la numération à différentes époques, nous proposons après notre étude des traités un recensement de tâches valable pour toutes les époques. Il contribue aussi à mieux cerner ce qu'est « étudier la numération ».

2. Qu'est-ce qu'étudier la numération ?

2.1. Bibliographie

▪ Étudier la numération de position, qu'est-ce que c'est ?

Nous avons particulièrement consulté deux handbook internationaux, notamment les articles de Fuson (1992) dans « Handbook of research on Mathematics teaching and learning » et de Verschaffel, Greer & De Corte (2006) dans « Second Handbook of research on Mathematics teaching and learning ». Nous avons aussi utilisé le rapport « Programme cognitique, école et sciences cognitives » commandé par le ministère de la recherche dirigé par Barouillet & Camos (2002) qui propose une revue de travaux sur le thème « savoirs, savoir-faire arithmétiques, et leurs déficiences ».

Les études et la taille des nombres étudiés

Il semble qu'avant 1990, beaucoup d'études portent sur les nombres d'un chiffre et leurs sommes (et les soustractions correspondantes). Les études sur les nombres à plusieurs chiffres sont apparues plus tard. Il semble d'ailleurs qu'il s'agit principalement d'études sur les nombres à deux chiffres.

Verschaffel & al. (2006) indiquent d'ailleurs (nous traduisons) que :

> « Jusqu'à présent nous n'avons évoqué que les nombres de deux chiffres, mais selon Fuson, Smith et al. (1997) les structures conceptuelles pour les nombres de 3 chiffres ou plus sont des extensions de ces structures conceptuelles, excepté que les centaines et les

milliers (en anglais[59]) ont plutôt des caractéristiques « séparées » que « séquentielles » à cause de la structure plus régulière de leur nom (i.e. « trois cents » et « quatre milliers » en comparaison de « trente » et « quarante »). »

La question de la programmation de l'apprentissage de la longueur des nombres semble faire l'unanimité passée leur introduction. Fuson (1990), Baroody (1990) sont en désaccord sur la programmation pour l'apprentissage sur les nombres de 1 et 2 chiffres, ils se retrouvent avec DeBlois (1996) sur le fait qu'il est nécessaire que les élèves fréquentent rapidement des nombres à trois et quatre chiffres (ou même davantage) pour développer des connaissances sur la numération de position et les algorithmes. Fuson (1992) indique que cette étude s'étend sur 3 ans en URSS et en Asie alors qu'elle s'étend sur 5 ans aux USA et que les performances des enfants américains sont moins bonnes que celles des enfants des autres pays.

Dialectique entre cardinal et ordinal, modèle de Fuson

Fuson (1992), Verschaffel & al. (2006) rapportent que deux conceptions sont nécessaires pour l'apprentissage des nombres à plusieurs chiffres, nous les désignons par « cardinale » et « ordinale ». Il y a en fait des distinctions selon les auteurs (separate, sequenced pour Fuson, structuring, positioning pour l'école hollandaise). Ces conceptions bien connues sur les petits nombres se surajoutent donc à l'étude de la numération positionnelle.

Pour ce qui concerne la numération de position, Verschaffel & al. (2006) se concentrent sur la discussion du modèle de Fuson & al. (1997) à propos de la conceptualisation des nombres de deux chiffres qui consiste à caractériser les conceptions possibles des élèves quant à l'interprétation des nombres de plusieurs chiffres. Ce modèle identifie six conceptions possibles pour l'interprétation des nombres à deux chiffres, la sixième est une conception erronée répandue « concatenated single digit ». Nous donnons l'extrait de Fuson & al (1997, pp. 139-140). Les auteurs considèrent qu'il s'agit d'un modèle de développement dont l'ordre serait : unitary, decade, sequence, separate, integrated.

[59] et en français ajoutons-nous

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

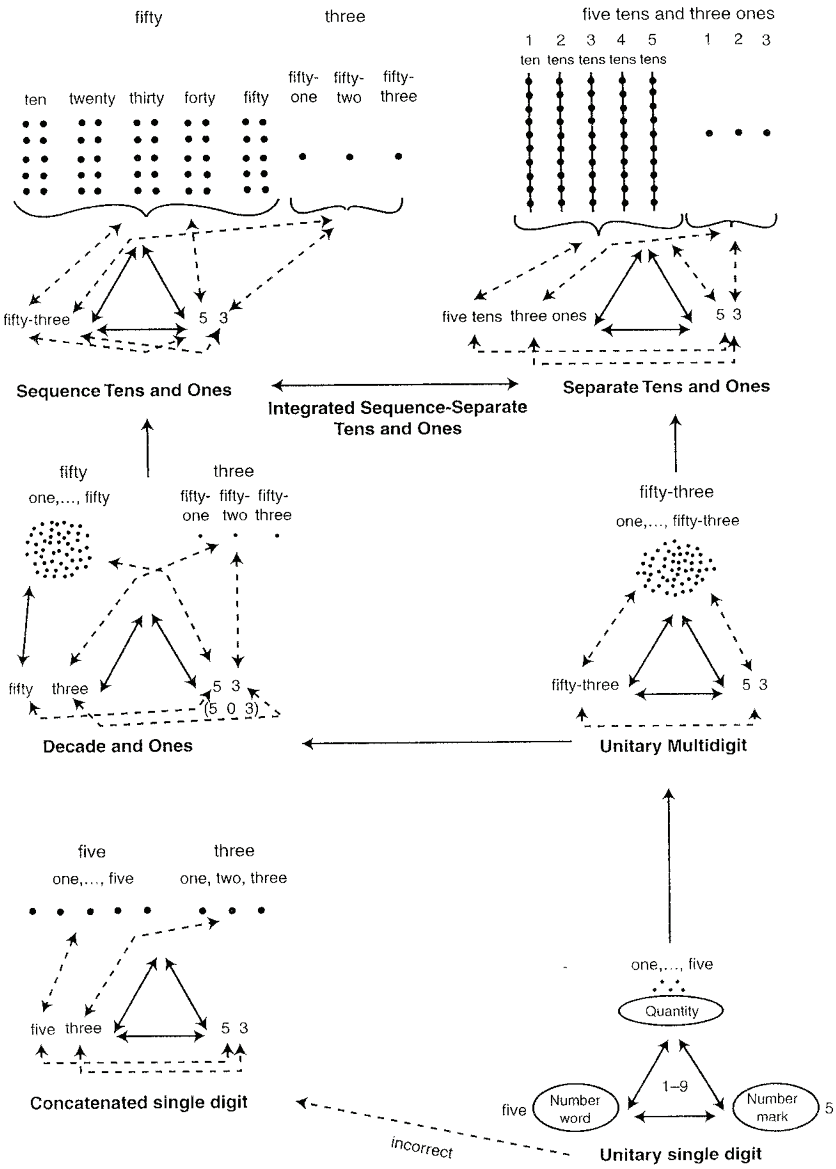


Figure 1. A developmental sequence of children's two-digit conceptual structures: The UDSSI Triad Model

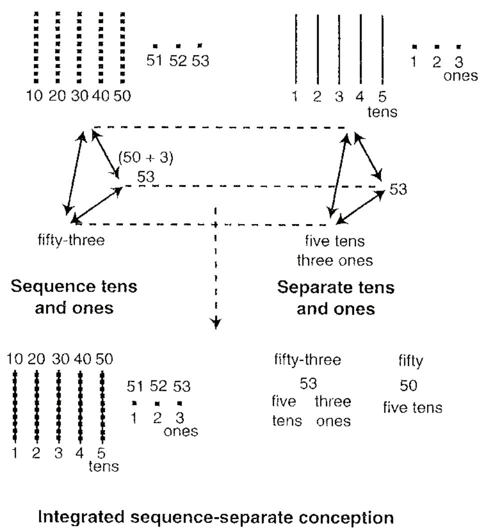


Figure 1—continued. A developmental sequence of children's two-digit conceptual structures

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Selon Collet & Grégoire (2005), ce modèle ne peut être considéré comme un modèle de développement car les stades ne se succèdent pas mais constitueraient plutôt des chemins variés de développement de la numération de position. Ils élaborent des tests où des représentations analogiques du nombre sont utilisées.

Des relations entre trois pôles

Fuson & Briars (1990) proposent une ingénierie dans laquelle il semble qu'elles introduisent presque simultanément les nombres à 2, 3 et 4 chiffres pour l'étude de la numération de position (étude qui est très fortement reliée à celle de la technique opératoire de l'addition). Dans cette ingénierie, on articule quatre registres de représentation : des écritures positionnelles, la numération orale, du matériel multibase et les noms du matériel multibase (gros cube, plaque, barre, petit cube). Les auteurs indiquent que les noms des objets sont utilisés par les élèves pour faire le lien avec les écritures chiffrées. Dans l'ingénierie, on met en relation les objets et les mots de la numération orale, les relations entre objets et les relations entre les mots de la numération orale.

Le travail de Collet & Grégoire (2005) consiste à évaluer les connaissances des élèves dans différentes tâches qui mettent en relation objet, écriture chiffrée, numération orale. DeBlois (1996) met en relation ces trois pôles ainsi que la numération en unités.

Il semble par ailleurs que de nombreux travaux en sciences cognitives, voire en neurosciences, s'intéressent à la numération de position. Nous rapportons uniquement ce qu'en dit le rapport « cognitique » ainsi que les précisions apportées par quelques uns des articles qui y sont cités. Jarlegan, Fayol & Barrouillet (1996) étudient des tâches de transcodage pour les nombres de deux chiffres, on note une réussite équivalente pour le passage entre écritures chiffrées et oral et pour le passage entre écriture chiffrée et matériel (environ 80%) alors que passage entre oral et matériel n'est réussi qu'à 65%. Ils terminent l'article par des propositions didactiques qui consistent à confronter les élèves à des tâches de transcodage entre oral et matériel. Fayol, Barrouillet & Renaud (1996) étudient les difficultés dans l'écriture des grands nombres. Ils construisent des modèles cognitifs et concluent qu'il n'y a pas besoin de passer par une représentation analogique (imaginer des quantités) pour les passages entre écrit et oral. Les difficultés dépendent de la longueur du nombre en chiffres, en lettres et des zéros intercalaires.

La plupart des auteurs prennent donc en compte des relations entre trois pôles quand il s'agit d'étudier la numération de position. L'exception de Fayol, Barrouillet & Renaud montre

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

notamment, selon nous, qu'on peut apprendre à dire les nombres écrits en chiffres sans référer à des représentations analogiques ce qui ne veut pas dire que c'est souhaitable, ni que c'est suffisant pour l'apprentissage de la numération de position en général.

Des travaux sur les procédures de calcul additif

Dans ce que nous avons vu, il semble que peu d'études de didactique se préoccupent exclusivement de la numération de position, celle-ci semble souvent être prise dans ses relations avec le calcul, le plus souvent l'addition et la soustraction. Il s'agit en général de s'intéresser soit à l'invention des procédures de calcul par les élèves (classification, moyen de les développer), soit à l'apprentissage des algorithmes et à leur relation éventuelle avec des procédures inventées ou avec les concepts de la numération. La question des connaissances conceptuelles et procédurales est alors souvent évoquée.

Plusieurs recherches concordent sur les types de procédures que les enfants inventent pour calculer des additions et des soustractions avec les nombres à plusieurs chiffres :

- le saut en comptant de 10 en 10 par exemple (jump),
- l'éclatement du nombre selon les unités de la numération (split).

L'invention de l'une ou l'autre de ces procédures semblent être plus ou moins déterminée par les conceptions que les élèves ont des nombres.

On envisage donc dans ces travaux, les besoins en numération pour l'addition et la soustraction. Nous avons trouvé évoqués dans Fuson (1992) les besoins pour la multiplication et la division.

Procédures de calcul sur la droite numérique

Verschaffel & al. (2006) abordent la ligne numérique vide (empty number line) au cœur de nombreuses recherches depuis les années 1990 aux Pays-Bas. Apparemment, cela correspond à ce que nous avons appelé « la droite graduée ». Des arguments tirés neurosciences sont convoqués. La ligne numérique vide semble être apparue en Europe (école hollandaise en particulier) depuis les années 1990. Bien qu'elle soit citée dans le paragraphe sur les nombres, pour ce que nous avons lu, il semble qu'il s'agit de voir la droite numérique dans les procédures de calcul additives et soustractives. Des études la concernant, en particulier son rôle dans l'élaboration des procédures de calcul ont été réalisées, mais les auteurs concluent le paragraphe la concernant par (nous traduisons) :

> Bien que plusieurs didacticiens des mathématiques travaillant dans le domaine de l'arithmétique des nombres à plusieurs chiffres donnent à cette interprétation sur la droite

> une place de plus en plus importante dans les curricula, manuels scolaires et guides pédagogiques (expérimentaux), il n'y a apparemment pas d'étude qui établisse de façon décisive que le développement de cet aspect accroisse les connaissances conceptuelles des élèves (et ses relations aux autres aspects du développement des nombres à plusieurs chiffres) d'une façon large et systématique.

Les premiers travaux sur la droite numérique ont été consacrés aux sommes inférieures à cent. Selter (1998) s'est intéressé aux nombres de trois chiffres. Des travaux que nous avons lu sur la droite numérique (Gravemeijer, 1994 ; Klein, Beishuizen & al, 1998 ; Selter, 1998), il apparaît qu'elle est davantage étudiée comme un instrument de calcul, pour éviter le recours aux algorithmes et favoriser l'invention de procédures, et plus généralement comme une représentation de l'ensemble des entiers naturels que comme un outil pour représenter une situation, une représentation linéaire de l'espace, par exemple. C'est une lecture en creux de plusieurs articles qui nous fait dire cela (Gravemeijer pp. 464-465, Selter p. 11).

La numération de position vue par les enseignants chinois

Ma (1999) rapporte les propos d'un professeur chinois qu'elle a identifié comme étant un PUFM (il a une « compréhension profonde des mathématiques fondamentales »). Il parle de l'étude la numération de position (nous traduisons) :

> Pour les élèves, la compréhension étendue de la valeur de la position ne peut pas se faire en un jour mais pas à pas. Au début, ils commencent à compter et à reconnaître les nombres avec deux chiffres, puis davantage, ils ont une première idée de ce que signifie une place en math, les noms des places et des aspects limités des relations entre ces places, comme 1 dizaine égale 10 unités, etc. L'idée la plus significative qu'ils apprennent à ce stade est que les différentes places ont des significations différentes ou représentent des valeurs différentes. Nous commençons par leur poser la question : « qu'est-ce que ce chiffre représente ? » Il apprennent qu'un 2 aux unités représentent 2 unités, un 2 aux dizaines représente 2 dizaines, un 2 aux centaines représente 2 centaines, etc. Ensuite, quand ils apprennent l'addition sans retenue et la soustraction, les valeurs des places deviennent plus significatives pour eux, quand ils doivent aligner les chiffres avec la même valeur. Après cela, quand ils apprennent l'addition et la soustraction avec retenue, les élèves apprennent à décomposer et recomposer une unité dans une autre qui a une valeur supérieure. Les compositions et décompositions d'une unité sont aussi un aspect important du concept de la valeur de la position. Maintenant dans la multiplication, ils rencontrent de nouveaux aspects de ce concept. Ils doivent se faire à l'idée de plusieurs dizaines, prenons par exemple 20 ou 35 dizaines, ou même plusieurs centaines de dizaines, comme dans ce problème 492 dizaines. Ils doivent se faire à l'idée de plusieurs centaines. Maintenant, ils doivent se faire à l'idée de plusieurs dizaines de centaines, ou même plusieurs centaines de centaines, comme 738 centaines. Pour comprendre cet aspect, ils doivent se faire à l'idée de la valeur de la position d'une façon systématique.

Discussion

Il nous semble que dans les travaux sur la numération, celle-ci n'est pas étudiée en tant que telle mais en relation avec le calcul. Pour ce que nous avons lu, pour les auteurs qui développent des modèles d'apprentissage de la numération de position, il s'agit toujours plus ou moins de relier trois éléments (une triade) : écriture chiffrée positionnelle, numération

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

orale et objets. La place de la triade dans l'utilisation de la droite numérique est moins explicite. Les articles sur la droite numérique précisent qu'un travail complémentaire est fait avec des représentations non linéaires (monnaie pour Klein, sorte de matériel multibase (en base dix) pour Selter, non précisé pour Gravemeijer), néanmoins ce travail n'est pas précisé et il est toujours dit qu'il intervient assez tard. L'oral n'est en général pas évoqué dans ces travaux.

Il nous semble que des problèmes spécifiques se posent à partir de l'étude des nombres de 3 chiffres car, si la question d'associer un chiffre à sa valeur se pose à peu près de la même façon quand il y a 2 chiffres que quand il y en a davantage, la propriété fondamentale de la numération positionnelle ne se présente pas de la même façon : la seule troncature possible quand il y a deux chiffres est celle qui consiste à couper entre unité et dizaine et qui revient donc à déterminer le chiffre des dizaines. Autrement dit, la question des conversions est beaucoup plus simple quand il y a 2 chiffres où il n'y a que deux unités à mettre en relation : les unités et les dizaines alors que quand on a 3 chiffres il faut mettre en relation : centaines et unités, centaines et dizaines, dizaines et unités. La question des relations entre unités est bien étudiée par DeBlois (1996) qui la considère comme centrale dans l'apprentissage de la numération de position, elle est sans doute abordée dans les travaux sur les calculs mais nous ne l'avons pas trouvée directement étudiée.

À part dans (DeBlois, 1996), nous n'avons pas trouvé de travail spécifique autour des unités de la numération. Ceci ne veut pas dire qu'il n'en existe pas. Toutefois, nous voulons préciser que cette question, sans être spécifique à une langue, se pose sans doute différemment selon les langues. Les difficultés relatives à la numération orale sont connues pour être spécifiques à des langues. La numération en unités (qui n'est pas réductible à la numération orale car 45 centaines est correct alors que 45 cents ne l'est pas) est plus ou moins congruente avec la numération orale : en anglais où on trouve de nombreuses irrégularités pour les nombres inférieurs à 100 on utilise les mêmes mots désigner les puissances de dix avec la numération orale et les unités de la numération. Une dizaine se dit comme dix (ten), une centaine comme cent (hundred) et un millier comme mille (thousand). Ceci signifie notamment que « 45 cents » existe « en anglais » (45 hundreds) mais que cette expression ne relève pas de la numération orale.

Retour sur les manuels récents

Si le travail que nous avons vu dans les manuels actuels par rapport à l'algorithme de la suite écrite peut s'inscrire dans la perspective « ordinale » de l'étude de la numération de position.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Il nous semble toutefois que dans les travaux de didactique que nous avons recensés, cette étude n'est pas détachée de la signification des chiffres ce qui ne semble pas être le cas des manuels actuels.

Par ailleurs, si JAM et PCM mettent en relation objets et numération orale, nous n'avons pas vu cela dans NME.

2.2. La numération dans les traités de référence et les résultats d'Harlé

Nous savons que les organisations mathématiques globales ont brutalement changé vers la fin du 19ème siècle mais nous avons déjà vu qu'il est grossièrement possible, pour les questions sur les relations entre grandeurs et entiers, de lire les théories anciennes en termes mathématiques actuels. Nous poursuivons ce travail à un niveau plus fin, celui de l'étude la numération de position des entiers. La période « classique » (la longue période qui a précédé la réforme) semble être stable de ce point de vue. En effet, nos observations sur les relations entre le système métrique et la numération et le travail d'Harlé laissent supposer que les techniques et technologies sont globalement stables de la fin du 19ème siècle à la réforme (malgré des variations pour favoriser les articulations entre nombres et grandeurs).

- Éléments de théories

Nous voulons présenter maintenant l'étude de la numération par Reynaud et Bezout.

Le traité de Reynaud (1821)

Nous donnons ci-après le paragraphe 2 de Reynaud intitulé « De la numération » :

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

2. Pour *former les nombres*, on part de l'unité; l'unité ajoutée à elle-même, donne un nombre nommé *deux;* celui-ci augmenté d'un, compose un nouveau nombre nommé *trois;* et en ajoutant successivement l'unité à chaque nombre obtenu, on obtient les *nombres, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf.* Ce dernier augmenté d'un, donne le nombre *dix;* la collection de dix unités forme un nouvel ordre d'unités, nommé *dixaine;* et de même qu'on a compté depuis une unité jusqu'à neuf unités, on a compté aussi depuis une dixaine jusqu'à neuf dixaines; mais pour abréger, au lieu des mots composés, une dixaine, deux dixaines, trois dixaines, quatre dixaines, cinq dixaines, six dixaines, sept dixaines, huit dixaines, neuf dixaines, on dit: *dix, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, soixante-dix, quatre-vingt; quatre-vingt-dix.* On peut substituer aux trois derniers noms, les mots *septante, octante, nonante*, qui désignent mieux, *sept dixaines, huit dixaines, neuf dixaines.* Pour exprimer les neuf nombres compris entre deux dixaines consécutives, on énonce successivement les dixaines et les unités; ainsi, la collection de trois dixaines et de sept unités, se nomme *trente-sept.* Il faut excepter de ce système les six premiers des neuf nombres compris entre dix et vingt; car au lieu des mots, dix-un, dix-deux, dix-trois, dix-quatre, dix-cinq, dix-six, on dit: *onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize.* La collection de neuf dixaines et de neuf unités, compose le nombre *nonante-neuf;* celui-ci augmenté d'un, donne le nombre *cent*, composé de dix dixaines, et la réunion de dix dixaines se nomme *centaine.* On compte depuis une centaine jusqu'à neuf centaines; et pour désigner les nonante-neuf nombres compris entre deux centaines consécutives, on ajoute aux noms, cent, deux cents, ..., neuf cents, ceux des nonante-neuf premiers nombres. Par exemple, la collection de quatre centaines et de huit unités, se nomme *quatre cent huit.* On parvient ainsi au nombre neuf cent nonante-neuf; celui-ci augmenté d'un, donne dix centaines; cette collection de dix centaines, forme une nouvelle unité principale nommée *mille;* et de même qu'on avait compté par unités, dixaines et centaines d'unité, depuis une unité jusqu'à mille unités, on compte par unités, dixaines et centaines de *mille*, depuis une unité de *mille* jusqu'à mille unités de *mille*, qu'on nomme *million.* Quant aux nombres compris entre deux mille consécutifs, on ajoute au nom des mille, les noms des neuf cent nonante-neuf premiers nombres. Ainsi, la collection de sept mille et de cinq cent sept unités, se nomme sept mille cinq cent sept. Le nombre, neuf cent nonante-neuf mille, neuf cent nonante-neuf, augmenté d'un, donne une collection de mille mille, appelée *million;* mille millions forment un *billion;* et ainsi de suite.

On peut observer que d'après ce système, *le nom d'un nombre ne dépend jamais que de la combinaison des noms des neuf cent nonante-neuf premiers nombres, avec les mots, unité, mille, million, billion, etc.;* de sorte que *l'énoncé d'un nombre n'exprime jamais plus de neuf unités, neuf dixaines et neuf centaines de chaque espèce.*

La manière d'écrire tous les mots à l'aide des diverses combinaisons des lettres de l'alphabet, fit pressentir la possibilité de représenter tous les nombres par un petit nombre de *signes;* il était même facile de prévoir que ces derniers, nommés *chiffres*, seraient en moindre nombre que les lettres, car ils ne doivent servir qu'à désigner une très petite partie des mots exprimés par les lettres. Le but qu'on s'est proposé en inventant les chiffres étant d'abréger l'écriture des nombres, on dut suivre la route déjà tracée par l'invention des mots. Ainsi, de même qu'on avait adopté neuf noms simples pour les neuf premiers nombres, on adopta neuf chiffres pour les représenter; et comme les combinaisons de ces neuf noms avec ceux des différentes unités avaient donné les noms de tous les nombres, on soumit les chiffres à la même loi, en exprimant par un même chiffre, comme on avait énoncé par le même nom, un même nombre d'unités, de dixaines, de centaines, etc. On représenta donc les neuf premiers nombres

un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf,

par les chiffres,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Ce qui fournit le moyen de simplifier l'écriture des nombres, en remplaçant les nombres d'unités, de dixaines et de centaines de chaque ordre, par les chiffres qui les représentent. Ainsi, pour écrire le nombre *neuf cent quarante-sept unités*, on le décomposa en, *neuf* centaines, *quatre* dixaines et *sept* unités; ce qui conduisit à 9 *centaines* 4 *dixaines* 7 *unités.*

La nécessité de soumettre les nombres à diverses opérations, fit apercevoir que le mélange des mots, unités, dixaines, etc., avec les chiffres, compliquait l'écriture des nombres, et que par conséquent il était utile de faire entièrement disparaître les lettres. Pour y parvenir, on classa les noms des unités, dixaines et centaines de chaque ordre, suivant leur rang de formation; les *unités simples* furent nommées *unités du premier ordre;* les dixaines, *unités du deuxième ordre;* les centaines, *unités du troisième ordre;* etc.; de sorte que le nombre *neuf cent quarante-sept* peut s'écrire:

9 *unités du* 3e *ordre*, 4 *unités du* 2e *ordre*, 7 *unités du* 1er *ordre.*

Cette dernière forme, quoique la plus compliquée, fournit l'idée heureuse de disposer les chiffres de manière que le rang de chacun indiquât l'ordre des unités qu'il représente. On convint que de plusieurs chiffres mis à côté les uns des autres, le premier, à partir de la droite, exprimerait des unités du premier ordre, ou unités simples; le deuxième, des unités du deuxième ordre, ou dixaines; le troisième, des unités du troisième ordre, ou centaines; et ainsi de suite. D'après cette convention, le nombre, *neuf cent quarante-sept*, peut s'écrire ainsi, 947; car le chiffre 9 occupant la troisième place, vaudra neuf unités du troisième ordre, ou neuf centaines, ou neuf cents; le deuxième chiffre 4, vaudra 4 unités du deuxième ordre, ou quatre dixaines, ou quarante; enfin le premier chiffre 7, vaudra sept unités. L'assemblage 947, exprime donc *neuf cent quarante-sept* unités.

Plusieurs nombres échappent à ce système; on ne saurait, par son moyen, écrire un nombre qui ne contiendrait pas toutes les unités des ordres inférieurs à ses plus hautes unités. Pour vaincre cette difficulté, on a inventé le chiffre *auxiliaire* 0, nommé *zéro*, qui n'ayant aucune valeur par lui-même, sert seulement à conserver aux *chiffres significatifs*, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, le rang qui convient à l'ordre de leurs unités. Ainsi, pour écrire en chiffres, le nombre *neuf cent sept*, composé de neuf centaines et de sept unités, sans dixaines, on met un zéro entre 9 et 7, pour tenir la place des dixaines; ce qui donne 907.

En général: *Pour mettre en chiffres un nombre énoncé; écrivez successivement à côté les uns des autres et en commençant par la gauche, les centaines, les dixaines et les unités de chaque ordre ternaire* (*), *et remplacez par des zéros, les unités, dixaines et centaines qui pourraient manquer. Parvenu aux unités simples, le nombre énoncé sera écrit.* Appliquons cette règle au nombre

dix-sept millions cinq cent deux unités.

Les plus hautes unités de ce nombre étant des millions, il devra renfermer trois *tranches*, savoir: celle des *millions*, celle des *mille* et celle des *unités;* posant donc à chacune de ces *tranches*, les centaines, dixaines et unités énoncées, et remplaçant celles qui manquent par des zéros, on écrira 17 000 502.

RÉCIPROQUEMENT: *Pour énoncer un nombre quelconque écrit en chiffres; partagez-le d'abord en tranches de trois chiffres, à partir de la droite, sauf à ne laisser qu'un ou deux chiffres dans la dernière tranche; commençant ensuite par la gauche, énoncez chaque tranche significative comme si elle était seule et donnez-lui le nom des unités de cette tranche.* Ainsi, les nombres 17 000 502, 1700, s'énoncent dix-sept millions cinq cent deux, et mil sept cents; le second nombre étant composé de 17 centaines, s'énonce aussi dix-sept cents.

En général, d'après notre système de numération, pour qu'un nombre exprime des dixaines ou des centaines ou etc., il suffit que son premier chiffre à droite représente des unités de cet ordre, ce qui revient à placer sur la droite de ce nombre un zéro, ou deux zéros, ou etc. Il en résulte que le nombre 327429 peut être considéré comme formé de 327 mille et 429 unités, ou de 3274 centaines et 29 unités, ou de 32742 dixaines et 9 unités, ou etc. Cette manière de décomposer les nombres servira par la suite.

(*) Par unités des *ordres ternaires*, on entend les *unités simples*, les *mille*, les *millions*, les *billions*, etc.

Reynaud fait donc un exposé complet de la numération. Nous relevons ci-après les éléments de sa progression : les neufs premiers nombres, puis la dizaine, puis compter par dizaines, puis intercaler les neuf premiers nombres entre deux dizaines, puis dix dizaines font une centaine, puis compter par centaines, puis intercaler les quatre-vingt-dix-neuf premiers nombres entre deux centaines, puis dix centaines font mille. Une règle de formation des noms de nombres est énoncée : « Pour exprimer les neuf nombres compris entre deux dixaines[60] consécutives, on énonce successivement les dixaines et les unités ; ainsi la collection de trois dixaines et sept unités, se nomme *trente-sept* » ; elle est généralisée implicitement par un exemple pour les nombres entre deux centaines. Notons que Reynaud propose de substituer les noms réguliers : septante, octante et nonante à soixante-dix, quatre-vingts et quatre-vingt-dix et signale les exceptions pour : dix-un, dix-deux, dix-trois, dix-quatre, dix-cinq et dix-six. La numération orale jusqu'à neuf cent quatre-vingt-dix-neuf apparaît comme une autre langue pour exprimer les nombres déjà connus dans la numération en unités. Pour les nombres au-delà de mille, il y a au moins deux approches possibles : soit on considère qu'on est en base mille et on étudie toute la classe des milliers en une seule fois, soit on considère qu'on est en base dix et on étudie successivement chaque nouvelle unité de la numération (unité de mille, dizaine de mille, centaine de mille). Il n'est pas facile de dire si Reynaud s'intéresse à la suite des unités de la numération de dix en dix fois plus grandes ou bien s'il adopte le système à base mille quand il écrit : « de même qu'on avait compté par unités, dixaines et centaines d'unités, depuis une unité jusqu'à mille unités, on compte par unités, dixaines et centaines de mille, depuis une unité de mille jusqu'à mille unités de mille, qu'on nomme million ». Ainsi, chaque unité est-elle à peu près citée… à condition de reconstruire son nom complet : unité de mille, dizaine de mille, etc. La construction de la suite des nombres est ensuite explicitée pour la classe des mille et non pour chaque ordre : entre deux mille consécutifs, on ajoute les neuf cent quatre-vingt-dix-neuf premiers nombres. Ceci permet d'obtenir tout de suite la numération orale jusqu'à neuf cent quatre vingt dix neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf. Il semble donc, qu'au-delà de mille, Reynaud privilégie l'approche par classe et au détriment de celle par ordre. Il ne donne pas explicitement la relation de dizaine entre eux mais les noms des ordres sont possibles à reconstruire. Ces deux numérations sont présentées sans l'aide des chiffres arabes. Pour la suite, nous sommes tentée de dire que Reynaud réécrit à des fins didactiques une histoire de la numération. Les chiffres sont introduits pour

[60] Écriture d'époque

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

simplifier les noms des nombres dans la numération en unités : 1, 2, 3…, 9 au lieu de un, deux, trois…, neuf. Ceci permet par exemple d'écrire le nombre : cinq dizaines quatre unités, 5 dizaines 4 unités. La numération positionnelle apparaît alors comme une numération abrégée de la numération en unités : les noms des unités sont remplacés par des positions dans l'écriture avec les chiffres. Le chiffre auxiliaire 0 « sert à conserver aux chiffres significatifs, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ,7, 8, 9, le rang qui convient à l'ordre de leurs unités ». Reynaud termine par deux règles pour la traduction entre numérations orale et positionnelle des grands nombres : l'une d'écriture, l'autre de lecture.

Précisons que, dans un chapitre que nous n'avons pas étudié, après l'étude de la numération décimale, des quatre opérations et de la proportionnalité, Reynaud expose la numération en bases. Le chapitre est intitulé : « Numération et calcul des nombres entiers et fractionnaires, quand la base est un nombre positif quelconque ; propriétés de ces nombres. Fractions continues. ». Il étudie notamment des questions théoriques sur le calcul des quatre opérations indépendamment de la base : par exemple, changements de bases, nombre de chiffres du produit en fonction de ceux des facteurs, questions de divisibilité par rapport à l'écriture chiffrée dans différentes bases, nombres non entiers en bases, etc. En fait, ce chapitre semble être un chapitre d'arithmétique élémentaire « savante ». Il est « destiné aux Élèves qui savent l'algèbre ». Le chapitre qui suit est le dernier du traité, il est relatif aux logarithmes.

Le traité de Bezout

Nous donnons ci-après l'extrait du traité de Bezout relatif à la numération de position (Bezout, 1821, pp. 2-5, §7-16).

De la Numération et des Décimales.

7. La numération est l'art d'exprimer tous les nombres par une quantité limitée de noms et de caractères : ces caractères s'appellent *chiffres*.

Nous nous dispenserons de donner ici le nom des nombres; c'est une connaissance familière à tout le monde.

Quant à la manière de représenter les nombres par des chiffres, plusieurs raisons nous engagent à en exposer les principes.

8. Les caractères dont on fait usage dans la numération actuelle, et les noms des nombres qu'ils représentent, sont tels qu'on les voit ici.

zéro,	un,	deux,	trois,	quatre,	cinq,	six,	sept,	huit,	neuf.
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9.

Pour exprimer tous les autres nombres avec ces caractères, on est convenu que de dix unités on en ferait une seule, à laquelle on donnerait le nom de *dixaines*, et que l'on compterait par dixaines comme on compte par unités, c'est-à-dire, que l'on compterait deux dixaines, trois dixaines, etc., jusqu'à 9 : que pour représenter ces nouvelles unités, on emploierait les mêmes chiffres que pour les unités simples, mais qu'on les en distinguerait par la place qu'on leur ferait occuper, en les mettant à la gauche des unités simples.

Ainsi, pour représenter *cinquante-quatre*, qui renferment cinq dixaines et quatre unités, on est convenu d'écrire 54. Pour représenter *soixante*, qui contiennent un nombre exact de dixaines et point d'unités, on écrit 60, en mettant un zéro, qui marque qu'il n'y a point d'unités simples, et détermine le chiffre 6 à marquer un nombre de dixaines. On peut, par ce moyen, compter jusqu'à *quatre-vingt-dix-neuf* inclusivement.

9. Remarquons, en passant, cette propriété de la numération actuelle; savoir, qu'un chiffre placé à la gauche d'un autre, ou suivi d'un zéro, représente un nombre dix fois plus grand que s'il était seul.

10. Depuis 99 on peut compter jusqu'à *neuf cent quatre-vingt-dix-neuf*, par une convention semblable. De dix dixaines on composera une seule unité qu'on nommera *centaine*, parce que dix fois dix font cent; on comptera ces centaines depuis un jusqu'à neuf, et on les représentera par les mêmes chiffres, mais en plaçant ces chiffres à la gauche des dixaines.

Ainsi, pour marquer *huit cent cinquante-neuf*, qui contiennent huit centaines, cinq dixaines et neuf unités, on écrira 859. Si l'on avait *huit cent neuf*, qui contiennent huit centaines, point de dixaines, et neuf unités, on écrirait 809; c'est-à-dire que l'on mettrait un zéro pour tenir la place des dixaines qui manquent. Si les unités manquaient aussi, on mettrait deux zéros : ainsi, pour marquer *huit cents*, on écrirait 800.

11. Remarquons encore qu'en vertu de cette convention, un chiffre suivi de deux autres, ou de deux zéros, marque un nombre cent fois plus grand que s'il était seul.

12. Depuis *neuf cent quatre-vingt-dix-neuf*, on peut compter, par le même artifice, jusqu'à *neuf mille neuf cent quatre-vingt-dix-neuf*, en formant de dix centaines une unité qu'on appelle *mille*, parce que dix fois cent font mille; comptant ces unités comme ci-devant, et les représentant par les mêmes chiffres placés à la gauche des centaines.

Ainsi, pour marquer *sept mille huit cent cinquante-neuf*, on écrira 7859; pour marquer *sept mille neuf*, on écrira 7009, et pour *sept mille*, on écrira 7000, où l'on voit qu'un chiffre suivi de trois autres, ou de trois zéros, marque un nombre mille fois plus grand que s'il était seul.

13. En continuant ainsi de renfermer dix unités d'un certain ordre, dans une seule unité, et de placer ces nouvelles unités dans des rangs de plus en plus avancés sur la gauche, on parvient à exprimer d'une manière uniforme, et avec dix caractères seulement, tous les nombres entiers imaginables.

14. Pour énoncer facilement un nombre exprimé par tant de chiffres qu'on voudra, on le partagera, par la pensée, en tranches de trois chiffres chacune, en allant de droite à gauche : on donnera à chaque tranche les noms suivans, en partant de la droite, *unités*, *mille*, *millions*, *billions*, *trillions*, *quatrillions*, *quintillions*, *sextillions*, etc. Le premier chiffre de chaque tranche, en partant toujours de la droite, aura le nom de la tranche, le second celui de dixaines, et le troisième celui de centaines.

Ainsi, en partant de la gauche, on énoncera chaque tranche comme si elle était seule, et l'on prononcera à la fin de chacune le nom de cette même tranche : par exemple, pour énoncer le nombre suivant :

quatrillions,	trillions,	billions,	millions,	mille,	unités.
23	456	789	234	565	456.

On dira vingt-trois *quatrillions*, quatre cent cinquante-six *trillions*, sept cent quatre-vingt-neuf *billions*, deux cent trente-quatre *millions*, cinq cent soixante et cinq *mille*, quatre cent cinquante-six *unités*.

15. De la numération que nous venons d'exposer, et qui est purement de convention, il résulte qu'à mesure qu'on avance de droite à gauche, les unités dont chaque nombre est composé, sont de dix en dix fois plus grandes, et que par conséquent, pour rendre un nombre dix fois, cent fois, mille fois plus grand, il suffit de mettre à la suite du chiffre de ses unités, un, deux, trois, etc., zéros : au contraire, à mesure qu'on rétrograde de gauche à droite, les unités sont de dix en dix fois plus petites.

16. Telle est la numération actuelle : elle est la base de toutes les autres manières de compter, quoique dans plusieurs arts on ne s'assujétisse pas toujours à compter uniquement par dixaines, par dixaines de dixaines, etc.

L'approche de Bezout est un peu différente de celle de Reynaud car il introduit et étudie en parallèle les trois numérations : en unités, orale et écrite. Pour chaque ordre, de 1 jusqu'à 9999, il progresse dans les trois numérations selon le plan suivant : de 1 à 9, traduction entre numérations orale et chiffrée ; de 10 à 99, la dizaine, compter les dizaines, position des dizaines à gauche des unités simples, traduction de la numération orale vers la numération en unités vers la numération positionnelle, ce moyen – juxtaposer deux chiffres – permet de compter jusqu'à quatre-vingt-dix-neuf ; de 100 à 999, dix dizaines font une nouvelle unité (la centaine), compter les centaines de un à neuf, placer les centaines à gauche des dizaines,

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

traduction de la numération orale vers la numération en unités vers la numération positionnelle, ce moyen – juxtaposer trois chiffres – permet de compter jusqu'à neuf cent quatre-vingt-dix-neuf ; de même de 1000 à 9999. Le zéro tient la place des unités qui manquent. Signalons que Bezout ne donne pas la liste des noms des dizaines et ne parle pas des irrégularités de l'oral. Il donne juste des exemples (réguliers) de traduction de la numération orale vers la numération en unités puis vers la numération positionnelle pour les dizaines et les centaines. Pour les nombres au-delà de 9999, il poursuit (§13) : « En continuant ainsi de renfermer dix unités d'un certain ordre, dans une seule unité, et de placer ces nouvelles unités dans des rangs de plus en plus avancés sur la gauche, on parvient à exprimer d'une manière uniforme, et avec dix caractères seulement, tous les nombres entiers imaginables ». Il donne ensuite les noms des classes (mais ne dit pas qu'elles sont dans un rapport mille) et indique que chacune d'elles est découpée en trois tranches : unité, dizaine, centaine. Ensuite, il énonce une règle de lecture des nombres écrits en chiffres (pour les grands nombres). Il semble donc que l'approche de Bezout privilégie les ordres plutôt que les classes pour les grands nombres. Toutefois pour les nombres de plus de trois chiffres, s'il donne les noms des unités de la numération pour former chaque nouvelle unité, il ne les utilise pas explicitement pour écrire les nombres. Il donne directement la numération positionnelle.

Comparaison entre les deux traités

Même s'il y a des différences (notamment, Bezout ne produit pas la liste des neuf premiers nombres par ajout de une unité, il ne comble pas explicitement les intervalles entre deux unités et il privilégie les ordres et non les classes pour les grands nombres), ces deux approches ont un point commun qui nous semble essentiel. L'approche de Bezout est d'ailleurs sans doute moins progressive que celle de Reynaud de ce point de vue. Néanmoins, nous pensons qu'on peut dire que tout se passe comme s'il y avait trois numérations à étudier :

- la numération en unités, à base dix, où l'on compte en unités, dizaines, centaines, unités de mille, dizaines de mille,…,
- la numération orale qui serait d'abord une numération en unités à base dix avec des irrégularités (pour les nombres jusqu'à 999 ou 9999) puis une numération à base mille (avec des chiffres énoncés en base dix) pour les grands nombres,
- et une numération écrite, positionnelle, régulière, à base dix.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

La numération en unités est régulière. C'est une numération « hybride »[61] : la juxtaposition des termes indique soit une multiplication, soit une addition. Même si l'ordre des unités n'est *a priori* pas imposé (*5 centaines 3 dizaines* s'interprète de la même façon que *3 dizaines 5 centaines*), dans les manuels et dans les traités, elle est apparemment utilisée avec l'ordre décroissant. Cette numération est intermédiaire entre les deux autres, voire génératrice. En effet, de cette numération en unités, on tire la numération orale des nombres inférieurs à 9999 (ou 999) : 5 centaines | 3 dizaines = cinq cent | trente, en juxtaposant les traductions de chaque ordre.[62] On en tire aussi la numération écrite : le chiffre des unités est en première position, tout chiffre placé à gauche d'un autre exprime des unités dix fois plus fortes : de droite à gauche, 0 est en première position, 3 en deuxième, 5 en troisième, soit 530.

En quoi cette théorie permet-elle de traiter les tâches que nous allons présenter ? Quelles techniques et technologies observons-nous dans les manuels ? Sont-elles bien en relation avec cette théorie ?

- Retour sur le travail d'Harlé (1984)

Pour commencer à étudier ces questions, nous confrontons les résultats d'Harlé relatifs aux discours sur la numération dans les manuels du début du siècle aux textes des traités. Ensuite, nous discutons la conception qu'Harlé semble avoir du nombre en utilisant ce qui émerge de son discours.

Relecture de l'étude de la numération à la lumière des traités

Nous avons déjà dit qu'Harlé connaît le traité de Bezout mais ne le prend pas véritablement en compte pour ses analyses (les travaux de Neyret datent de 1995). Harlé décrit donc les leçons de numération. Nous rapportons ses résultats et insérons des commentaires par rapport à ce que nous avons vu dans les traités. Une première partie de l'étude d'Harlé est consacrée à « la numération parlée ». Pour les premiers nombres, il relève deux approches : la première consiste à indiquer les noms des neuf ou dix premiers nombres : un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix ; la seconde à former la suite des nombres à partir de un en ajoutant successivement une unité, jusqu'à obtenir neuf ou dix : un et un font deux, deux et un font trois... Bezout pratique selon la première approche et Reynaud selon la seconde. Pour les nombres plus grands, il semble qu'on ait peu de variations selon les manuels mais deux

[61] Nous empruntons cette expression à (ERMEL CE, 1978)

[62] Il faut bien sûr préciser que cette traduction terme à terme présente quelques exceptions : nombres de onze à seize, de soixante et onze à soixante-seize et de quatre-vingt-onze à quatre-vingt-seize.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

formulations l'une détaillée, l'autre moins. Cette dernière peut peut-être s'expliquer par le fait que les élèves étudient les cent premiers nombres depuis le CP et que certains auteurs choisiraient de ne pas leur faire tout revoir en CM mais c'est aussi elle qui est présente dans le traité de Bezout, alors que la première est utilisée par Reynaud. Les manuels construisent les ordres successifs des nombres : « dix ou une dizaine est l'unité du second ordre. » On précise alors qu'« on compte par dizaines comme on compte par unités simples ». Puis, éventuellement, on appelle *deux dizaines* : *vingt*, *trois dizaines* : *trente*… Après avoir « compté par dizaines », on comble les intervalles : « entre deux dizaines consécutives, on intercale les neufs premiers nombres. » (Brouet, CM, 1923) Certains manuels donnent une double désignation pour la deuxième dizaine : *dix un* qu'on appelle *onze*, *dix deux* qu'on appelle *douze*, quand d'autres donnent directement les noms des nombres irréguliers : *onze*, *douze*, … de même certains donnent directement les noms *vingt*, *trente*, *quarante* sans passer par *deux dizaines*, *trois dizaines*, *quatre dizaines*. Ensuite, on construit l'ordre des centaines puis on compte les centaines comme on compte les unités et les dizaines : « un cent, deux cents, trois cents, quatre cents,… dix cents ou mille » (Plomion, CM, 1923). Puis, entre deux centaines, on intercale les quatre-vingt-dix-neuf premiers nombres. Harlé indique qu'« ainsi est construite la « classe des unités » regroupant les nombres inférieurs ou égaux à neuf cent quatre-vingt-dix-neuf. Les classes des mille et des millions seront élaborées l'une après l'autre selon les mêmes procédés ». Harlé précise en outre qu'en fin d'étude de la numération parlée on rappelle son « principe » : une unité d'un ordre vaut dix unités de l'ordre inférieur.

Il consacre une deuxième partie de l'étude des entiers à la « numération écrite », cette partie est un peu moins détaillée.[63] Il indique qu'on donne d'abord la correspondance entre les chiffres de 1 à 9 et l'oral (le 0 est adjoint comme signe particulier), puis le « principe » : « Tout chiffre placé à la gauche d'un autre exprime des unités dix fois plus fortes » (Royer, CM, 1928). Les manuels indiquent aussi une règle d'écriture, suivie d'une règle de lecture pour les nombres de plus de trois chiffres :

> Pour écrire un nombre en chiffres, on écrit successivement en allant de gauche à droite les centaines, les dizaines et les unités de chaque classe en commençant par la classe la plus élevée et en ayant soin de remplacer par des zéros les ordres manquants. (Goupil, CM, 1912)
>
> Pour lire un nombre écrit en chiffres, on le divise en tranches de trois chiffres à partir de la droite ; puis commençant par la gauche, on lit successivement la quantité et le nom des unités de chaque classe. » (Plomion, CM, 1923)

[63] Toutefois, le statut du zéro, chiffre ou nombre, y est longuement discuté mais nous n'y ferons pas davantage allusion.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

On voit qu'en fait les formulations rapportées par Harlé semblent être empruntées à l'un ou l'autre traité. Toutefois, même si nous n'avons pas réussi à voir une évolution entre les dates de parution des manuels et l'influence d'un traité plus que de l'autre nous n'excluons pas que cela soit possible. Pour le savoir, il faudrait étudier plus précisément que nous l'avons fait les dates de premières publications des différents manuels, le suivi des collections, etc.

Qu'est-ce qu'un nombre pour Harlé ?

Nous discutons maintenant certaines analyses d'Harlé. Vers la fin de son étude de la numération parlée, Harlé indique (p. 82, c'est nous qui soulignons) :

> La numération parlée est présentée comme une recette permettant de nommer les nombres : il n'est jamais dit que le principe sur lequel repose la façon de nommer les entiers <u>trouve son origine</u> dans la numération décimale de position qui sera illustrée lors de la numération écrite.

Il indique un peu plus loin que conformément au programme la grande majorité des manuels traite bien distinctement les deux numérations parlée et écrite, il ajoute qu'en fin d'étude de chacune de ces numérations :

> il sera rappelé que « le principe de la numération est que : une unité d'un ordre vaut dix unités de <u>l'ordre inférieur</u> ».
>
> C'est le principe de <u>la numération décimale de position</u> qui est <u>énoncé en fin</u> de la numération parlée, <u>alors qu'on l'a utilisé pour</u> construire les noms des nombres et que l'on n'a fait aucune allusion auparavant à la numération de position.

Il écrit, à propos de la numération écrite, que

> le principe de la numération écrite est la transposition de celui de la numération parlée. « Tout chiffre placé <u>à la gauche</u> d'un autre exprime des unités dix fois plus fortes » (Royer, CM, 1928).

Les éléments que nous avons rapportés concernant la progression dans l'apprentissage de « la numération parlée » ainsi que son « principe » qui met en relation deux unités de la numération successives ne nous semblent pas relever de la position mais uniquement de la régularité d'un système de numération, qu'il soit positionnel ou non. Il s'agit du principe des groupements itératifs par dix valable pour toute numération à base dix. En revanche, le principe qui concerne la numération écrite contient le caractère positionnel de la numération (« à gauche ») *adjoint* au principe des tailles relatives des unités de la numération parlée : un même signe désigne deux choses différentes suivant sa position. Harlé ne semble pas distinguer ces deux caractéristiques, elles semblent être amalgamées.

A propos de l'opposition entre abstrait et concret (chapitre 1), nous avons déjà cité le « nombre-concept mathématique » évoqué par Harlé. Même s'il reste relativement implicite dans sa thèse, nous voulons revenir sur ce point. Notamment, nous nous demandons, dans

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

quelle mesure, pour Harlé, les écritures chiffrées des nombres (et les calculs sur ces « écritures ») ne seraient pas les seules choses susceptibles d'être des nombres (pour l'école primaire). Ceci pourrait expliquer qu'il considère que les noms des nombres découlent des principes de la numération de position et qu'il estime peu rigoureux l'exposé de la numération parlée proposé dans les manuels. En outre, dans sa conclusion de l'étude de la numération écrite, il indique : « il est pour le moins étonnant de constater que de nombreux manuels ne font que donner les principes et les règles de la numération décimale de position pour pouvoir énoncer, écrire et lire les nombres entiers. On ne trouve jamais exprimée, noir sur blanc, la décomposition d'un nombre selon les différentes puissances de dix (…). ». Apparemment Harlé (p. 88) reconnaît la décomposition d'un entier selon les puissances de dix seulement dans les expressions qui n'impliquent que des écritures chiffrées accompagnées éventuellement de symbolisme arithmétique : il en voit lorsqu'on écrit, dans 2 manuels sur 25 « dans le nombre 3742, le 3 vaut 3000, le 7 vaut 700, le 4 vaut 40, le 2 vaut 2 » ou encore dans $268=2\times100+6\times10+8$ (ce qu'il ne trouve dans aucun manuel).

Bien qu'il ne les y pointe pas, ses extraits de manuels montrent des décompositions telles que : « 9 centaines de mille 4 dizaines de mille » pour 940 000. Et pour nous, les dizaines et centaines de mille sont des puissances de dix. Ceci a pour conséquence qu'il conclut, à tort, pensons-nous, à propos de l'image du nombre qui se dégage des manuels, à « un amalgame du signifiant et du signifié : le nombre est assimilé à son écriture, présenté uniquement dans le système décimal de position, pas de décomposition explicite selon les puissances de dix ». Nous voyons en effet, dans plusieurs des reproductions de manuels qu'il propose, de telles décompositions et des écritures non limitées au système décimal de position. Nous pensons donc qu'il y a des décompositions selon les puissances de dix dans les manuels mais qu'il ne les voit pas du fait qu'il ne cherche que des écritures chiffrées (et des calculs avec ces écritures) ce qui confirmerait notre interprétation.

L'écriture chiffrée n'est manifestement pas première pour l'étude des nombres dans les livres anciens. La numération en unités nous semble être au cœur du travail de numération, elle est manifestement l'ostensif pour les « décompositions selon les puissances de dix ». Harlé ne lui donne pas de statut mathématique, nous pensons que cela peut expliquer qu'il voie « une recette permettant de nommer les nombres » là où nous voyons l'introduction et l'utilisation d'une numération intermédiaire jouant un rôle central.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

2.3. Plan et méthodologie pour l'étude de la numération à une période donnée

- Méthode

Notre étude va, grossièrement, des années 30 au début des années 2000. En outre, pour le début du siècle, nous reprenons les résultats d'Harlé avec les limites déjà signalées. Nous n'avons pas étudié en détail la numération dans les manuels précédant les années 30. Nous avons repéré trois périodes qui nous semblent se distinguer par des caractéristiques assez nettes (toutefois un tel découpage est forcément grossier et comporte des phases transitoires plus ou moins longues) :

- une première période que nous appelons la période classique : des années 30 à la réforme, que nous avons commencé à étudier à travers les traités et le système métrique,
- une deuxième : la réforme,
- une troisième : à partir de la contre réforme. Néanmoins, cette troisième période, très complexe, n'est pas uniforme.

Nous avons tenté de recenser les types de tâches en numération et en système métrique aux différentes époques. Pour chaque type de tâches nous avons voulu identifier les techniques et technologies à l'œuvre en fonction de l'époque en repérant notamment les ostensifs utilisés. Ce premier travail d'identification se fait conjointement à la mise en évidence des théories.

En effet, nous voulons mettre en évidence les théories de référence de la numération de position à l'œuvre à différentes périodes en étant au plus près des trois niveaux T, τ, θ effectivement enseignés. Ceci signifie que notre projet consiste notamment à mettre en évidence comment la théorie permet de traiter ou prend en charge les différents types de tâches, les techniques et technologies. Autrement dit, comment la théorie prend-elle en charge l'OM à l'œuvre ? Cette question suppose en fait, naïvement, qu'une telle théorie existe. Aussi, au besoin, comme nous l'avons fait à propos de l'étude la proportionnalité dans les programmes de 2002, nous étudions également la question : quelle théorie prend en charge, au mieux, l'OM à l'œuvre ? Ce projet demande des méthodologies différentes selon les époques. Nous avons en effet eu deux méthodes :

- soit nous avons identifié des textes qui présentent explicitement la théorie et nous vérifions que les techniques et technologies coïncident effectivement avec ces textes « théoriques »,

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

- soit, si ces textes ne suffisent pas, nous inférons les théories effectives à partir des niveaux T, τ et θ des organisations mathématiques à l'œuvre en utilisant en particulier les progressions et les ostensifs.

Malgré des changements non négligeables, en particulier dans les technologies, les tâches de numération sont relativement stables au fil du temps. Nous les présentons brièvement à la suite de l'explicitation du choix du niveau de classe retenu pour notre étude.

- Niveau d'étude

Concernant les niveaux d'enseignement, nous avons déjà indiqué pourquoi nous avons choisi le CE pour l'étude de l'articulation entre numération des entiers et système métrique. Au cours de cette étude, nous avons déjà commencé à élucider le rapport institutionnel à la numération dans l'enseignement ancien. Nous la complétons donc en étudiant la numération au CE. Toutefois, il est clair que l'étude des entiers n'est pas terminée au CE, pas plus aujourd'hui qu'hier comme nous l'avons vu dans notre 1er chapitre à propos de ce qu'écrit Harlé.

Pour des questions de temps parfois, nous nous limitons au CE2 car au CE1 certains manuels se limitent aux nombres jusqu'à 999 et nous voulons voir comment est travaillée la relation de centaine à millier (néanmoins, il peut nous arriver de faire référence à des manuels d'autres niveaux).

Pour laisser une taille raisonnable à notre étude, nous nous limitons aux nombres de taille intermédiaire, cœur du travail au CE2 : de 3 à 5 ou 6 chiffres (sans aller jusqu'aux « grands nombres »). Ceci signifie que nous excluons notamment l'étude détaillée des « grands nombres », en particulier nous n'étudions pas spécifiquement les deux approches possibles entre approche chiffre par chiffre et approche par classe pour les nombres de plus de 3 chiffres.

- Les types de tâches

Nous nous proposons maintenant de présenter les types de tâches recensés pour l'étude de la numération de position au cours élémentaire pour les nombres de 3 ou 4 chiffres.

Nous indiquons d'abord des tâches « emblématiques » réparties en six types. Nous ajoutons un type de tâches qui est fondamental mais dont nous pensons qu'il est essentiellement technologique. Enfin, comme une fonction essentielle de la numération est le calcul, nous avons un type de tâches « calcul ». Il est probablement plus difficile à cerner que les autres comme nous allons le voir et nous n'en donnerons pas une « description ».

Est-ce à dire que nous avons recensé tous les types de tâches de la numération de position ? Ceci est possible mais nous ne pouvons le garantir. La frontière entre le calcul et la numération, notamment, est parfois floue. Nous n'avons pas relevé précisément les tâches pour l'étude des opérations ni tenté d'en faire une catégorisation. En outre, la réponse à cette question dépend peut-être des époques car il est possible que certaines tâches changent d'habitat selon la période. Les réponses des enseignants qu'interroge Parouty (2005) sont peut-être un signe extrême de cette variabilité. Rappelons qu'en effet, nombre d'entre eux considèrent qu'il est nécessaire d'avoir étudié la division pour traiter le problème qui consiste à chercher le nombre de paquets de 100 dans un nombre de quatre chiffres.

La numération de position est un objet d'enseignement tout à fait répandu. Il existe probablement, en tant que tel, dans un très grand nombre de pays, si ce n'est dans tous ceux qui ont une école primaire, et peut-être à toutes les époques. À ce titre, il semble assez naturel qu'un certain nombre de tâches enseignées soient emblématiques car relevant de pratiques de référence pour la vie courante. Aussi, nos cinq premiers types de tâches emblématiques ont-ils des représentants dans « la vie courante ».

Les deux premiers types que nous présentons nous semblent incontournables. Le premier consiste à relier les nombres et les objets : étant donnée une collection, combien d'objets contient-elle ? (et réciproquement, faire une collection dont on connaît le nombre). Nous parlerons du type de tâches « dénombrer ».

Le deuxième type est représenté par la tâche emblématique qui relie numérations orale et écrite : étant donné un nombre écrit en chiffres, donner sa désignation orale et réciproquement. Rappelons que nous n'avons pas étudié cette question pour les grands nombres. Nous parlerons du type de tâches « dire écrire un nombre »

Nous incluons ensuite deux autres types de tâches dans cette première catégorie : le rangement de nombres et la connaissance des suites orales et écrites (le pas entre deux nombres étant une puissance de dix, en montant, en descendant).

On peut penser que ces quatre types de tâches sont emblématiques pour l'institution école primaire. Elles correspondent probablement à des pratiques extrêmement répandues dans les sociétés qui ont des pratiques numériques.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Vient ensuite un cinquième type que nous désignons ici par une tâche : « Combien faut-il de billets de 100 francs pour avoir 4500 francs ? ». Nous appelons « nombre de » la catégorie de tâches à laquelle elle appartient. Même si cette tâche est intéressante dans différentes numérations (à l'oral par exemple), nous considérons qu'elle est emblématique de la numération de position à cause de la propriété forte de la numération positionnelle qui permet de la traiter. Cette propriété n'est pas énoncée dans nos manuels de CE2, ni hier ni aujourd'hui. Dans (Reynaud, 1821, §2), elle est énoncée sous la forme :

> En général, d'après notre système de numération, pour qu'un nombre exprime des dixaines ou des centaines ou etc., il suffit que son premier chiffre à droite représente des unités de cet ordre,

Reynaud poursuit :

> ce qui revient à placer sur la droite de ce nombre un zéro, ou deux zéros, ou etc. Il en résulte que le nombre 327429 peut être considéré comme formé de 327 mille et 429 unités, ou de 3274 centaines et 29 unités, ou de 32742 dixaines et 9 unités, ou etc. Cette manière de décomposer les nombres servira par la suite.

Un sixième type de tâches emblématique est « le changement de base ». Il n'apparaît à l'école que lorsqu'on travaille dans plusieurs bases, c'est à dire au moment de la réforme.

Le dernier type que nous avons qualifié de « technologique » consiste à décomposer et recomposer un nombre à l'aide de la numération. Ce type est très sensible aux ostensifs qui vivent dans l'institution. En effet, nous avons écrit dans notre relecture du travail d'Harlé qu'il cherche des décompositions du nombre 268 et qu'il n'en trouve pas car il ne reconnaît que la forme 2×100+6×10+8 alors que nous en trouvons mais sous la forme 2 centaines 6 dizaines 8 unités.

3. La période classique

Harlé a déjà étudié la numération au début du siècle. Que faisons-nous de plus ou de différent ? Nous identifions les praxéologies : nous mettons à jour les types de tâches et nous mettons en évidence le niveau théorique qu'Harlé n'a pas envisagé comme nous l'avons vu. Harlé n'a pas travaillé dans le cadre de la TAD, la théorie de la transposition didactique n'étant pas encore très élaborée au début des années 80. Nous pensons qu'il a mis en évidence des discours constitutifs de l'étude des nombres sans leur donner de statut particulier, nous verrons qu'ils constituent soit des techniques soit des technologies. Il s'est peu intéressé aux tâches de numération. Par ailleurs, nous nous plaçons plus tôt que lui dans la scolarité : il est au CM, nous sommes au CE, ce qui nous permet, espérons-nous, de voir un travail plus approfondi des types de tâches élémentaires. Enfin, nous nous plaçons à une période plus tardive même si nous reprenons ses résultats avec les limites déjà signalées.

Nous redonnons la liste de noms abrégés de nos manuels, ce sont les mêmes que ceux utilisés pour l'étude du système métrique. Nous n'indiquons que la date de l'édition consultée suivie de la date probable de la première édition (cette information nous semble en effet plus déterminante pour repérer les évolutions que la date de l'édition).

(Brouet)	1905	1893
(Minet CE1) (Minet CE2)	1923	1906
(Mortreux ldm[64] CE1) (Mortreux ldm CE2)	avant 1923 (lde 1930)	1908
(Clap)	1934	avant 1923
(Boucheny)	1930	1931
(Châtelet 1932 CE1) (Châtelet 1932 CE2)	1932	1932
G. Condevaux (Châtelet 1952)[65]	1952	1951
(Dumarqué)	1934	1934

(Marijon 1947 CE1) (Marijon 1947 CE2)	1947	1939
(Marijon 1957 CE1) (Marijon 1957 CE2)	1957	1953
(Vassort CE1)	1949	1949
(Vassort CE2)	1950	1950
(Bodard CE1)	1957	1957
(Bodard CE2)	1966	1957
(Denise CE1)	1969	1962
(Denise CE2)	1969	1962

3.1. Repérage de technologies

- Les technologies

Ce qui nous frappe dans les leçons de numération des manuels anciens est le petit nombre de technologies, le fait qu'elles soient faciles à identifier et la quasi absence de techniques. Pour les nombres de un à quatre chiffres, nous avons identifié les technologies suivantes, nous les numérotons de θ1 à θ5 et nous y ferons référence :

θ1 La première met en relation position et unités de la numération : dans un nombre, à partir de la droite, le premier chiffre est celui qui représente les unités, le deuxième les dizaines, le troisième les centaines, le quatrième les unités de mille. Le chiffre 0 ne représente pas d'unité, il marque un rang.

[64] Nous utilisons les abréviations lde et ldm pour désigner respectivement le « livre de l'élève » et le « livre du maître ».

[65] Nous rappelons que, contrairement à l'édition de 1932, Châtelet n'est pas cité comme auteur de ce manuel. Il apparaît uniquement dans le titre de la collection.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

$\theta 2$ La deuxième met en relation les unités de la numération :

- une dizaine c'est dix (ou 10) unités,
- une centaine c'est dix (ou 10) dizaines, cent (ou 100) unités,
- un millier (ou une unité de mille) c'est dix (ou 10) centaines, cent (ou 100) dizaines, mille (ou 1000) unités.

$\theta 3$ La troisième met en relation numération orale et unités de la numération :

- dix ou une dizaine, vingt ou deux dizaines, trente ou trois dizaines, quarante ou quatre dizaines, cinquante ou cinq dizaines, soixante ou six dizaines, soixante-dix ou sept dizaines, quatre-vingts ou huit dizaines, quatre-vingt-dix ou neuf dizaines,
- cent ou une centaine, deux cents ou deux centaines, …, neuf cents ou neuf centaines,
- mille ou un millier, deux mille ou deux milliers, … , neuf mille ou neuf milliers.

$\theta 4$ La quatrième consiste à compter par « unités » : on compte par dizaines, centaines, unités de mille comme on a compté par unités.

$\theta 5$ La cinquième technologie est itérative. Nous retrouvons l'organisation proposée par les traités. La construction de la suite des nombres s'effectue selon le plan suivant.

On construit les dix premiers nombres en ajoutant l'unité à chaque nombre obtenu.

Ensuite on définit l'unité du deuxième ordre : dix ou une dizaine. On compte par dizaines comme on a compté par unité, jusqu'à dix dizaines. Ensuite, on ajoute à chacune des dizaines, les neuf premiers nombres. On définit l'unité du troisième ordre, comme 99 auquel on ajoute 1 qui est aussi dix dizaines ou une centaine. Ensuite, on compte par centaines comme on a compté par unité, jusqu'à dix centaines. Entre deux centaines, on ajoute les 99 premiers nombres. On définit l'unité du quatrième ordre comme 999 auquel on ajoute 1 qui est aussi dix centaines ou un millier. Selon les manuels, on a deux possibilités : certains comptent par milliers comme on a compté par centaines, dizaines et unités, d'autres comptent par unités de mille comme on a compté par unités. Dans les deux cas, on intercale entre deux milliers, les 999 premiers nombres. Mais ceux qui ont compté seulement les unités de mille poursuivent en

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

comptant par dizaines de milliers qui est l'unité du cinquième ordre et en intercalant entre deux dizaines de mille les 9999 premiers nombres, etc.

Nous revenons à la 5ème technologie. On voit que les technologies 2 et 4 y sont reprises. De façon plus précise pour un rang donné, on construit l'unité d'ordre n+1 comme étant dix unités d'ordre n (θ2), on compte jusqu'à dix par unité d'ordre n+1 comme on a compté par unités d'ordre 1 (θ4). Entre deux unités d'ordre n+1, on forme un nouveau nombre en ajoutant chacun des nombres qu'on avait construits jusqu'alors (l'unité d'ordre n+1 étant exclue).

La 5ème technologie est en fait une construction itérative de l'ensemble des entiers naturels à partir des objets. On construit les nombres et leur désignation dans la numération en unités[66] <u>sans utiliser la division euclidienne</u>. La 5ème technologie est un discours théorique. La technologie 1 permet d'obtenir la numération positionnelle, la technologie 3 permet d'obtenir la numération orale. Ceci implique que les besoins trophiques pour construire l'ensemble des entiers naturels sont réduits, ils sont au « niveau des élèves » nous semble-t-il.

- Variations dans les technologies

Même si tout n'est pas toujours explicite comme nous allons le voir, il nous semble en revanche que les technologies pour la numération des entiers n'évoluent pas au cours de la période car, à part dans Châtelet 1932, on n'a pas de trace d'autres choses. En revanche, certaines technologies semblent être minorées au fil de la période et Châtelet 1932 semble avoir joué un rôle de ce point de vue.

La 1ère technologie est en général explicitée bien que dans certains livres on se contente parfois d'un schéma sans numérotation des positions. Le rôle du zéro n'est pas toujours explicite. Les technologies 2, 3 et 4 sont régulièrement présentes quant à elles.

Concernant la dernière technologie, la situation est nettement moins uniforme. En fait, Châtelet 1932 semble marquer une rupture. La technologie y est mais elle est accompagnée d'autres éléments, redondants du point de vue théorique. Dans les manuels qui suivent, ce sont parfois les autres éléments et non la 5ème technologie qui sont présents. En particulier, aucun de nos manuels postérieurs à 1947 (sauf Châtelet 1952) ne construit la centaine comme 99 auquel on ajoute 1, ils comptent directement dix dizaines (Châtelet 1932 introduit la

---

[66] Plus précisément, la numération positionnelle est construite au fur et à mesure de la rencontre des différents ordres et quand on construit l'unité d'ordre n+1, on a déjà la notation positionnelle pour les nombres strictement inférieurs à l'unité d'ordre n+1 (10^{n+1}-1).

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

modification qui consiste à définir la centaine comme dix dizaines avant d'avoir étudié les nombres entre deux dizaines, de même pour mille qui est d'abord présenté comme dix centaines, puis repris comme 999+1). Pour mille, certains reviennent à 999+1, mais d'autres comptent directement dix centaines. Les nombres entre deux centaines (par exemple) ne sont pas construits en ajoutant les nombres de 1 à 99 mais évoqués sous la forme « centaines, dizaines, unités » qui correspond selon les manuels plus ou moins explicitement à des procédures de dénombrement. (Châtelet 1932 donne à la fois des procédures de dénombrement en centaines, dizaines, unités et indique que « à plusieurs pièces ou billets de 100 fr., on joint une somme plus petite que 100 fr. » ce qui nous semble être une version contextualisée de la 5ème technologie.).

Bodard est peut-être le signe de la perte du sens de la progression car au CE1 comme au CE2, on n'a pas de leçon « les centaines », tous les nombres de 3 chiffres sont abordés simultanément et nous ne parvenons pas à repérer la volonté de faire émerger une autre structure à la place.

Il nous semble nécessaire de signaler que les plans des manuels suivent le plan théorique de construction des nombres : une leçon « la centaine » dans laquelle on donne la technologie 2 suivie par une leçon « les centaines » dans laquelle on donne la technologie 4 suivie par une leçon « entre deux centaines » dans laquelle on donne la technologie 5. Précisons que certains manuels traitent dans une même leçon la centaine et les centaines mais que les deux points, la centaine et les centaines, sont mis en évidence successivement dans la leçon.

En quoi ces discours technologiques permettent-ils de prendre en charge les types de tâches que nous avons repérés ?

3.2. Techniques et types de tâches

Pour chacune des cinq tâches auxquelles nous nous sommes intéressée nous donnons d'abord une technique puis nous essayons de cerner au mieux le type de tâches qu'on peut associer à chacune d'elles.

Pour les techniques, signalons qu'il s'agit de reconstructions. Dans les manuels, les enchaînements que nous proposons ne sont pas indiqués comme nous le faisons. Nous allons voir que les technologies peuvent être converties en techniques opérationnelles. Ceci n'exclut pas qu'il existe d'autres techniques pour traiter les différentes tâches.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

- Dénombrer

Technique pour la tâche « dénombrer »

Si on dispose de l'ostensif numération en unités, notre première tâche « dénombrer une collection » peut être traitée en utilisant les technologies (2) (faire les groupements itératifs s'ils ne sont pas déjà faits), puis (4) (déterminer le nombre de chaque groupement, ce nombre étant inférieur à 9), puis (1) (étant donnés les nombres de chaque unités obtenues par (4), on juxtapose les chiffres, en utilisant 0 au besoin pour que chaque nombre d'unités occupe la position qui lui revient). Cette suite de technologies fonctionne dans les deux sens : qu'il s'agisse de « dénombrer » une collection donnée ou de fabriquer une collection dont le nombre est donné. La technique que nous identifions pour traiter notre première tâche consiste donc à découper la tâche en sous-tâches. Chacune de ces sous-tâches peut ensuite être traitée par une technique qui est en fait une des cinq technologies. (La technologie 5 garantit l'unicité)

Étude du type de tâches « dénombrer »

Ce type de tâches se présente sous plusieurs formes. *A priori*, la collection peut être n'importe quel « objet », au sens d'une théorie des grandeurs. Dans nos manuels, les grandeurs en présence sont diverses. En général, elle existe avec des collections discrètes évoquées le plus souvent dans des pratiques de la vie courante : on achète des centaines d'enveloppes, des dizaines de boutons ou des boîtes de 10 plumes, etc. Nous n'avons pas repéré de prescription de cette tâche sur des objets réels, toutefois la fabrication des groupements d'objets (5$^{\text{ème}}$ technologie ou l'évocation des différentes unités de la numération) est presque toujours décrite explicitement dans les leçons pour les nombres de 3 et 4 chiffres. Nous avons déjà évoqué ce type de tâches avec l'étude du système métrique (chapitre 3), sans forcément mettre en évidence les éléments qui nous intéressent maintenant. Compte tenu de l'articulation entre système métrique et numération et des éléments technologiques communs, nous considérons que, avant la réforme, les tâches de mesurage (de longueur, masse et capacité) sont des représentants de ce type de tâches. Enfin, une dernière grandeur qui permet de le travailler est la monnaie. Nous ne lui avons porté qu'une attention limitée. Disons que selon les manuels : la monnaie est étudiée dans des leçons spécifiques ou bien elle est intégrée avec l'étude des nombres. Les unités monétaires présentes sont le franc (éventuellement nouveau), le centime et le système franc / centimes selon que ces unités sont en circulation ou non.

- Dire écrire un nombre

Technique pour la tâche « dire écrire un nombre »

Étant donné un nombre écrit en chiffres, les technologies permettent-elles de l'énoncer ? Comme pour la tâche précédente, nous découpons cette tâche en sous-tâches. Pour chaque chiffre de l'écriture chiffrée du nombre, nous utilisons la technologie (1) nous obtenons le nombre dans la numération en unités, puis nous appliquons à cette désignation du nombre la technologie (2) pour obtenir la numération orale. Par exemple, 6023 comporte un 3 en première position, un 2 en deuxième, un 6 en quatrième, c'est donc, 6 milliers, 2 dizaines, 3 unités qui se prononcent respectivement six mille, vingt et trois. Le nombre se dit six mille vingt trois (à condition d'énoncer les unités de la numération dans l'ordre décroissant ce qui n'est en général pas précisé). Dans certains manuels on donne une technique pour l'énonciation des nombres de 3 ou 4 chiffres : « Pour lire un nombre de trois chiffres, on lit d'abord le chiffre des centaines, puis le nombre formé par les deux autres chiffres. Exemple : 325, c'est à dire 3 centaines, 25 unités, se lit trois cent vingt-cinq. » (Minet, CE1, p. 80). Boucheny (CE, 1930) en donne une pour les nombres de deux chiffres : « pour lire un nombre de deux chiffres, on énonce d'abord le nombre des dizaines, puis celui des unités. Ainsi 38 se lit trente-huit ». Ces techniques sont assez proches des discours technologiques, même si celle pour les nombres de trois chiffres s'appuie sur un découpage différent du nombre écrit en chiffres, découpage qui permet de résoudre le problème des exceptions dans la désignation orale des nombres de onze à seize et leurs dérivés entre 60 et 99.

Avec l'étude de ce type de tâches, on voit aussi comment on peut obtenir directement la désignation orale du nombre pour la tâche « dénombrer » sans passer par son écriture chiffrée. On enchaîne les technologies (2) puis (4), ensuite on ordonne les unités, et enfin on utilise la technologie (3).

Étude du type de tâches « dire écrire un nombre »

Cette tâche est principalement déclinée sous deux formes : à partir de l'écriture chiffrée d'un nombre, donner sa désignation orale et la tâche inverse. Elle est présente avec peu de variations aux différentes époques. Toutefois, dans nos manuels anciens, nous avons repéré quelques variantes à l'intérieur du type :

- Nommer les nombres formés de : 8 mille, 9 centaines, 9 dizaines et 5 unités ; 8 mille, 8 centaines, 8 dizaines, 8 unités. (Minet, CE2, révision des mille, p. 119)

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

- Quel est le chiffre des dizaines dans les nombres : trois cent quatre-vingt-deux ; cinq cent sept ? (Marijon, CM, p. 6)
- Écrire un zéro entre les deux chiffres des nombres suivants et écrire en lettres les nombres obtenus : 18, 27, 49, 33. (Boucheny, p. 50)

Nous pensons que ces quelques variantes (apparemment rares au CE) à l'intérieur du type ont pour but de faire fonctionner le registre de la numération en unités pour l'étude de la numération orale, c'est à dire de ne pas réduire ce type de tâches aux deux registres (numération positionnelle, numération orale) que la tâche emblématique implique. On peut remarquer que, dans nos manuels, ils ne sont pas donnés au début de l'apprentissage (mais en révision ou au CM pour les deux premiers).

- L'algorithme de l'écriture chiffrée

Technique pour l'algorithme de l'écriture chiffrée

Nous n'avons pas identifié de technique relative à l'algorithme de l'écriture chiffrée. Néanmoins, l'exposé de la théorie (ou la technologie 5) montre la construction de la suite des nombres, avec l'ostensif unités de la numération combiné à la numération positionnelle comme nous l'avons dit. Cette construction constitue donc aussi une technique pour la suite des nombres dans l'ostensif unités de la numération quand le pas est 1. Les correspondances entre unités de la numération et numération positionnelle d'une part (1ère technologie), entre unités de la numération et numération orale d'autre part (3ème technologie) nous semblent assurer les techniques pour produire les suites écrites et orales.

La situation est sans doute différente lorsque la technologie 5 n'est plus explicite, ce qui semble être le cas après 1945. En fait, Bodard, Vassort font plus ou moins la liste des nombres dans des tableaux. Denise découpe la suite des nombres en de nombreuses tranches régulières. De 100 à 999, il y a neuf leçons : une par centaine (au CE1) ; de 1000 à 9999, il y a six leçons : une par millier jusqu'à 4000 puis une pour deux milliers jusqu'à 10000 (au CE2).

Si le pas de la suite n'est pas 1 mais une autre unité d'ordre *n*, la numération en unités et les technologies 2 et 4 permettent de construire la suite attendue dans les unités de la numération, les technologies 1 et 3 permettant de la traduire dans les deux autres systèmes de désignation, étant entendu que compter de cent en cent revient à ajouter cent.

Par exemple, s'il faut compter de cent en cent à partir de 3850 (nous détaillons les deux premiers pas),

1) on ajoute une centaine à 3 milliers 8 centaines 5 dizaines. On obtient 3 milliers 9 centaines 5 dizaines (car on compte par centaine comme on compte par unité, θ4),
2) puis on ajoute une centaine à 3 milliers 9 centaines 5 dizaines, on obtient 3 milliers 10 centaines 5 dizaines (θ4 appliquée aux centaines)
3) puis 3 milliers et 1 millier 5 dizaines (θ2 appliquée à la relation de centaine à millier)
4) puis 4 milliers 5 dizaines (θ4 appliquée aux milliers).

Valence instrumentale de l'ostensif numération en unités

La numération en unités n'est pas très utile dans la vie courante. On pourrait être tenté de la remplacer par la numération orale. En fait, on voit dans l'exemple ci-dessus que la numération en unités a une valence instrumentale plus grande que la numération orale car on ne « peut » pas dire « dix cent » avant de le convertir en « mille » si on se place dans la numération orale (2ème étape). On pourrait aussi essayer de se passer de la numération en unités en la remplaçant par la numération positionnelle. On peut énoncer des règles sur la succession des chiffres, avec le principe du compteur : quand on doit augmenter de 1 un chiffre qui est à une position donnée, si ce chiffre n'est pas 9 on l'augmente de 1. Si ce chiffre est 9, il devient 0 et c'est le chiffre qui est à sa gauche qui est augmenté de 1. Si on a une succession de 9, ils passent tous à 0 et le premier chiffre à gauche qui n'est pas 9 est augmenté de 1. Si tous les chiffres sont des 9, on écrit un 1 à gauche du dernier 9 et tous les 9 passent à 0.

Ce qu'on voit dans ce discours c'est que les point 2, 3 et 4, que nous avons détaillés dans la technique qui utilise la numération en unités, sont agglomérés : on ne peut pas écrire avec la numération positionnelle les 3 milliers 10 centaines 5 dizaines : 31050, ni 3 milliers 1 millier 5 dizaines : 3150.

Plus précisément, on peut écrire ces différentes étapes avec la numération positionnelle, avec des règles de calcul : 3950+100=3000+900+50+100=3000+1000+50=4000+50=4050. Par rapport à la numération en unités, dans le troisième « membre » de l'égalité, l'écriture 1000 est bivalente[67] : elle est d'abord là pour dix centaines (900+100) puis devient un millier pour pouvoir être rattachée à 3000. La conversion des 10 centaines en 1 millier ne se voit pas, elle est prise en charge par la propriété forte de la notation positionnelle. En fait, elle peut se voir si on décide d'écrire des multiplications car 10 centaines c'est aussi 100×10. Si on veut faire

[67] Remarquons que pour formuler la bivalence de la numération positionnelle (qui est en fait une « quadrivalence » car on a aussi cent dizaines et mille unités) nous ne pouvons nous passer de la numération en unités, sauf à utiliser le calcul ce que nous faisons après.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

apparaître les différentes étapes qui correspondent aux manipulations dans la numération en unités, il faut écrire :

> $3950+100=3\times1000+9\times100+50+100=3\times1000+(9+1)\times100+5=3\times1000+100\times10+5=3\times1000+1000+50=(3+1)\times1000+50=4000+50=4050.$

Les besoins trophiques sont alors plus élevés, nous semble-t-il, car il faut exprimer en utilisant un formalisme relativement élaboré la multiplication et l'addition ainsi que la distributivité de la multiplication sur l'addition.

Il nous semble que ceci permet d'affirmer que, à besoins trophiques identiques, la valence instrumentale de la numération positionnelle est plus faible que celle de la numération en unités.

Bessot & Comiti (1982) ont montré que les jeunes enfants étaient capables de « compter » à l'écrit ou à l'oral, éventuellement pour dénombrer, sans avoir compris le principe de la numération. La numération en unités n'est donc pas forcément nécessaire pour mettre en œuvre l'un ou l'autre de ces algorithmes. En revanche, elle le devient (ou un autre système de désignation avec des mots qui permettrait de relier les groupes d'objets et les nombres, ce qui resterait à préciser) si on veut justifier avec des besoins trophiques peu élevés cet algorithme en relation avec les objets, notamment si on veut pouvoir utiliser des mots. Pour l'apprentissage, il permet de voir toutes les étapes et de les justifier.

Étude du type de tâches « algorithme de la suite des nombres »

À la période classique, les types de tâches oral et écrit ne sont en général pas distingués dans les manuels. On demande de compter de 10 en 10 à partir d'un nombre donné, par exemple.

- Comparer des nombres

Technique pour la tâche « comparer des nombres »

Pour l'ordre, la situation est un peu différente. Châtelet 1932 est le seul manuel qui donne explicitement un discours technologique exhaustif (ce manuel fourmille en fait de technologies, il n'est pas rare qu'il en propose plusieurs pour le même type de tâches). Il indique :

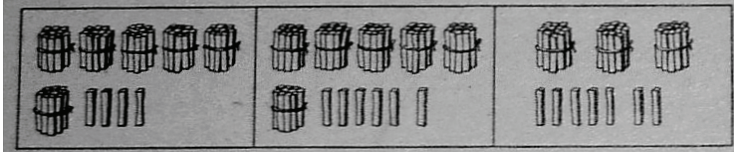
> « *Chaque nombre est* **plus grand** *que ceux qui sont* **avant** *lui, il est* **plus petit** *que ceux qui sont* **après** *lui.* Il s'obtient en **ajoutant 1** au nombre qui le **précède** ; ou en **retranchant 1** au nombre qui le suit.
>
> Lorsque les nombres sont ainsi **rangés**, ils sont dans l'**ordre naturel**. ». (p. 12)

Dans la leçon « Classement des cent premiers nombres » :

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

COMPARER DES NOMBRES D'OBJETS. — Comparons des collections de bûchettes, réparties en dizaines et bûchettes restantes.



64 **66** **37**

Le tas de 37 bûchettes comprend moins de 4 dizaines ; il comprend moins de bûchettes que les deux autres tas qui ont chacun 6 dizaines.

Les tas de 64 et 66 ont le même nombre de dizaines, mais le deuxième tas a plus d'unités, il renferme plus de bûchettes que le premier.

Le nombre **66** *est plus grand que* **64**, *qui est lui-même plus grand que* **37**.

Le nombre **37** *est plus petit que* **64**, *qui est lui-même plus petit que* **66**.

Cet élément technologique est suivi par le tableau des cent premiers nombres (nombres de 0 à 99 organisés en 10 lignes de 10 nombres) :

ORDRE NATUREL DES NOMBRES DE 1 A 100.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Ce tableau est accompagné par un petit discours : « Ce damier se lit comme un livre de gauche à droite et de haut en bas : chaque nombre est plus grand que ceux qui sont avant lui et plus petit que ceux qui sont après lui ».

La construction des nombres de 100 à 1000 est organisée selon le plan : les centaines, puis on ajoute un nombre inférieur à 100 aux centaines. Le discours sur l'ordre est poursuivi :

RANGEMENT DES NOMBRES DE 100 A 1.000. — Les nombres de 100 à 1.000 se rangent dans l'ordre naturel, en prolongeant les tableaux des 100 premiers nombres :

11e ligne : **100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109.**
12e ligne : **110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119.**
. . . .
35e ligne : **340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349.**

Pour comparer les nombres de quatre à six chiffres, « on compare d'abord les nombres de mille, si les nombres de mille sont égaux, on compare les unités. » (p. 144). Cette technique correspond au choix de construction des nombres de quatre à six chiffres par Châtelet : ils sont construits, en une fois, en comptant les mille.

Marijon 1947 donne un discours, pour les nombres de deux chiffres seulement, qui est proche de ce que fait Châtelet avec les bûchettes (cf. supra). Dans les autres manuels, qu'ils proposent ou non des tâches de rangement, nous n'avons pas repéré de discours relatif à l'ordre. Lorsqu'elle est donnée, on peut inférer de la construction de la suite des nombres à partir des unités de la numération (5ème technologie) une technique pour l'ordre, technique qui n'est pas très différente de ce que proposent Châtelet et Marijon.

Étude du type de tâches « comparer »

Nous n'avons pas trouvé la tâche « comparer » dans nos manuels les plus anciens. Pour nous, elle apparaît avec Châtelet 1932. Dans la mesure où ce manuel est visiblement un précurseur, il est possible que ce soit lui qui l'ait introduite. Dans tous les manuels publiés ensuite, sauf Bodard, elle est prescrite (seulement pour les nombres de 3 chiffres dans Châtelet 1952). Nous n'avons repéré que les nombres écrits en chiffres comme ostensif pour ce type de tâches. Néanmoins, la connaissance qui consiste à reconnaître le plus petit de deux nombres est explicitement nécessaire pour poser les soustractions. Dans nos manuels anciens on trouve en effet : « Pour soustraire deux nombres, on écrit le plus petit au-dessous du plus grand en ayant soin de mettre les unités sous les unités, les dizaines sous les dizaines (…). » (Boucheny) Dans Mortreux, la phrase n'est pas présente, mais on dispose les nombres l'un en dessous de l'autre en précisant dans la marge : « Grand nombre », « Petit nombre ». Par ailleurs, la tâche « quel est le plus grand (resp. le plus petit) nombre de 2, 3, 4 chiffres ? » existe dans des manuels anciens (Mortreux, Clap, Boucheny notamment).

- Conversion

De même que le type « dénombrer », le type de tâches « conversions » se décline à la fois dans les leçons de numération et de système métrique.

Présentation

Nous appelons donc « conversions », les changements d'unité de la numération, par exemple « convertir 3 centaines en dizaines » (la réponse est 30 dizaines). Dans le problème cité en exemple pour représenter ce type de tâches : « Combien faut-il de billets de 100 francs pour avoir 4500 francs ? », il s'agit de convertir des unités en centaines. Dans les manuels récents, la tâche citée en exemple relève du type « nombre de » (il faut trouver le « nombre de »

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

centaines de 4500) résolu par la technique de la « troncature ». Le « nombre de » n'est qu'un cas particulier des conversions, celui où une des deux unités est l'« unité ».

Catégorisation des conversions

Nous avons identifié plusieurs types de conversions. La technologie principale nous semble être néanmoins toujours la même : il s'agit des relations entre unités de la numération (θ4) mais d'autres technologies lui sont en général adjointes pour traiter les tâches du type « conversion ». En général, toutes les relations sont énoncées au moment de l'étude des notions indiquées entre parenthèses : de l'unité à la dizaine (leçon « la dizaine »), de la dizaine à la centaine et de l'unité à la centaine (leçon « la centaine ») ; de la centaine au millier, de l'unité au millier, de la dizaine au millier (leçon « le millier »). La dernière relation peut néanmoins être parfois absente. Nous n'avons pas repéré l'énoncé de techniques dans nos manuels. En revanche, le type de tâches « conversions » se décline en sous-types de tâches. Précisons aussi que tous les sous-types ne sont en général pas présents au sein d'un manuel donné, mais il nous semble que nous parvenons à une catégorisation significative. Par ailleurs, un manuel donné est souvent spécialisé dans des sous-types particuliers.

Les conversions les plus simples consistent en la restitution de la relation entre unités :

- au niveau matériel, nous l'avons déjà évoqué à propos du système métrique, la relation entre unités est travaillée sur les grandeurs-objets : on fabrique dix unités d'un type pour construire l'unité suivante. Sur les objets discrets, cette fabrication n'est en général pas prescrite, mais seulement décrite. Le maître peut d'ailleurs montrer avec des bûchettes par exemple,
- au niveau symbolique, elle est travaillée entre unités successives : combien y a-t-il de dizaines dans une centaine, combien de paquets de 100 enveloppes faut-il acheter pour avoir 1000 enveloppes ?
- et entre unités non successives : combien 1 millier, fait-il de dizaines ? d'unités ? Un réservoir contient 1000 l d'eau. Avec cette eau, combien pourrait-on remplir de seaux de 1 dal ? de fûts de 1 hl ?

Cette relation peut aussi être prise dans du calcul s'appuyant sur le « comptage par unités » (θ2) : 1000 F – 9 centaines de francs = …F, 7 hg + 3 hg = …hg ou …kg ; même si les unités ne sont plus explicitement écrites (elles doivent alors être repérées par la position) : 500 F + 500 F = … F. Ces derniers exemples sont tirés des leçons : « le billet de mille francs » et « Le kilogramme. Le kilomètre » (Bodard, CE1). Dans le « calcul mental » de la

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

leçon « le décamètre » de Boucheny avec le sous-titre « complément à 10 », on trouve « Une perche mesure 7 m. Quelle longueur lui manque-t-il pour mesurer 1 dam. » Vassort (CE1) demande « Que manque-t-il à 80 l pour faire 1 hl ? » et aussi « Combien faut-il de tonneaux de 50 l de vin pour remplir un fût d'un hectolitre ? »

Au niveau de complexité supérieur, on travaille avec les nombres de « un chiffre significatif ». Ces conversions sont en général étudiées en relation avec les thèmes suivants : « les dizaines », « les centaines », « les milliers ». On trouve là encore : les relations entre unités successives, entre une unité et l'« Unité », entre unités non successives : combien y a-t-il de dizaines dans 3 centaines ? combien 30 dizaines font-elles de centaines ? d'unités ? Combien 500 dizaines font-elles de milliers ? Combien font 2 fois 100 ? Rép. 2 centaines = 200. Combien y a-t-il de fois 100 dans 100 ? 300 ? 600 ? Rép : 1 centaine ou 1 fois cent ; 3 centaines ou 3 fois cent ; 6 centaines ou 6 fois cent. (Mortreux, ldm, p. 13). Convertir en centaines : 6 unités de mille ; 800 dizaines. (Boucheny, p. 73).

Il y a ensuite les conversions qui mettent en jeu deux chiffres non nuls. Peut-être qu'elles sont un peu plus rares : « Combien de centaines dans 35 dizaines" ? Rép : 3 centaines 5 dizaines » (Mortreux, ldm, p. 17) 1 kg 2 h g= …… hg. Combien y a-t-il d'hectomètres dans 3 km 5 hm ? Il nous semble important de remarquer que les deux catégories précédentes de conversions ne mobilisent pas nécessairement la propriété de la « troncature ». En effet, un raisonnement simple de calcul ou de comptage peut permettre de les traiter (nous faisons une inférence qui nous semble légitime de par la progression que nous voyons dans les manuels). Par exemple, pour traiter la tâche « combien y a-t-il de centaines dans 3 milliers », on peut élaborer le raisonnement suivant : « Dans chaque millier, il y a dix centaines. J'ai trois milliers, donc trois fois plus de centaines que dans un. C'est à dire trente centaines. » En reprenant ce raisonnement, mais à un niveau un peu plus compliqué, on peut avoir, pour 35 centaines en milliers : 35 centaines, c'est trente centaines et cinq centaines, qui font donc 3 milliers 5 centaines. Ces raisonnements constituent une technologie élaborée chiffre par chiffre pour la propriété forte de la numération (qui est alors la technique). Ce sont principalement ces conversions qui interviennent dans les technologies des techniques opératoires.

De cette présentation du type de tâches « conversion » dans la période classique, il nous semble qu'on peut retenir qu'il se présente sous une grande diversité. Cette diversité s'exprime à la fois par les ostensifs utilisés pour exprimer les nombres : écritures chiffrées, numération en unités (métriques ou de la numération), voire numération orale ; mais aussi par les contextes dans lesquels elles sont proposées : égalités à compléter, langue naturelle sans

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

pour autant qu'il y ait un contexte et aussi, en contexte. Signalons que les questions en contexte sont majoritairement formulées avec les écritures chiffrées alors que les questions hors contexte mobilisent les différents registres d'expression. Sans doute peut-on interpréter ce choix comme la volonté de ne pas trop s'éloigner des pratiques de la vie courante. Ceci implique que dans les conversions « en contexte » on travaille notamment le sous-type « nombre de » même s'il n'est pas formulé ainsi.

Évolution vers la fin de la période

Nous nous penchons sur nos trois manuels les plus récents pour repérer la façon dont le type de tâches conversions y est traité. Dans Denise (1969), les décompositions en unités de la numération sont formulées sous la forme d'une égalité dont l'un des membres est un nombre (sans unité) :

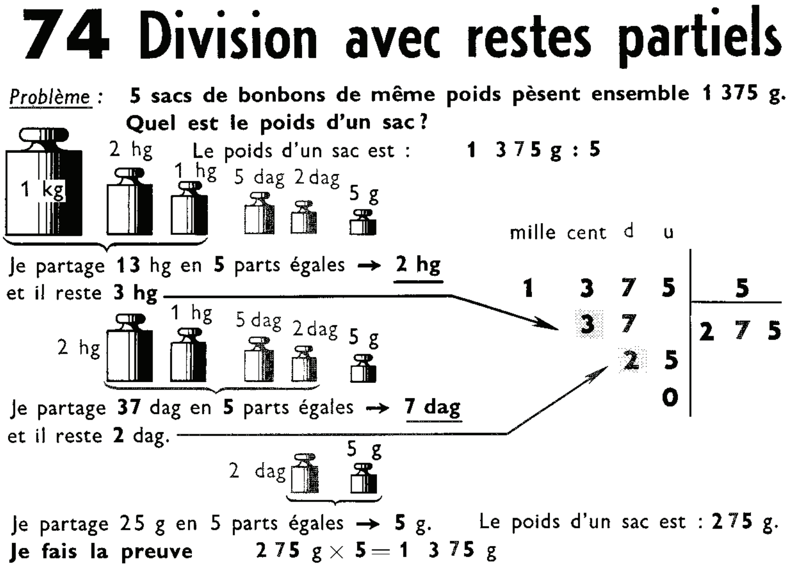
145=……centaine…… dizaines…..unités

108=…….dizaines……unités

Sur les objets, on a : « Pour payer 260 f combien faut-il de billets de 10 f ? » (CE1, p. 71) ainsi qu'un peu de calcul en centaines : « Dans un sac contenant 3 centaines de marrons, je verse 4 centaines de marrons. Combien de centaines de marrons le sac contient-il ? Combien de marrons ? ». Ces problèmes relèvent du « nombre de ». Les relations entre unités sont uniquement écrites dans les leçons : 300 = 3 centaines = 30 dizaines, pour la plupart des centaines.

Dans l'étude du système métrique, on trouve pourtant un traitement différent des relations entre centaine et dizaine et entre millier et centaine, puisqu'il y a des conversions entre deux unités dont aucune n'est l'unité « mère » : 2 hl = ….. dal (CE1, p. 66) et 1 kg 2 hg = …… hg (CE2, p. 56). D'ailleurs, la technologie de la technique opératoire de la division est formulée en kg, hg, dag, g (CE2, leçons 71, 74) avec une évocation des unités de la numération.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008



74 Division avec restes partiels

Problème : **5 sacs de bonbons de même poids pèsent ensemble 1 375 g. Quel est le poids d'un sac ?**

Le poids d'un sac est : **1 375 g : 5**

mille cent d u

Je partage **13** hg en **5** parts égales → **2 hg**
et il reste **3 hg**

1 3 7 5 | 5
3 7 | 2 7 5
2 5
0

Je partage **37** dag en **5** parts égales → **7 dag**
et il reste **2** dag.

Je partage 25 g en 5 parts égales → **5** g. Le poids d'un sac est : **275** g.
Je fais la preuve **275** g × **5** = **1 375** g

(Denise CE2, leçon 74)

Au CE1, à propos de l'« addition de trois nombres », on trouve une technologie dans les unités de la numération. On a :

> 1 dizaine + 4 dizaines = 5 dizaines
>
> 5 dizaines et 7 dizaines = 12 dizaines.

En revanche, on n'écrit pas : 12 dizaines = 1 centaine 2 dizaines mais :

> J'écris 2 dizaines et je retiens 1 centaine

Chez Bodard, au CE1 et au CE2, les conversions entre plusieurs centaines et dizaines existent seulement dans la leçon les nombres de 500 à 999. On y trouve aussi les conversions entre hm et dam, hl en dal, hg et dag. En revanche, la relation « 1 000 = 100 dizaines » n'est ni énoncée, ni travaillée ; contrairement à 1000 = 10 centaines qui est présente et travaillée dans plusieurs registres (cf. supra) mais toujours sous la forme 1 pour 10 (et non X pour X0).

Chez Vassort, les relations travaillées sont :

- entre les unités simples et les autres unités (« Combien y a-t-il de centaines dans 800 fagots ? »),
- entre les autres unités, mais essentiellement pour le complément à une unité en numération (Paul a 6 billets de 100 f, combien lui manque-t-il pour avoir 1 000 f ?). Dans l'ensemble, à part dans les « leçons », ces relations ne sont pas exprimées en unités de la numération mais avec les écritures chiffrées des nombres.

En revanche, pour le système métrique, pour toutes les grandeurs, la plupart des relations sont travaillées en contexte ou hors contexte. On trouve par exemple dans la leçon sur l'hectolitre :

> 368. Combien y a-t-il de décalitres dans : 300 l, 700 l, 5 hl, 4 hl, 8 hl, 6 hl, 3 hl 20 l, 2 hl 50 l, 360 l, 850 l, 180 l (…)

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Pour conclure, il semble que dans les livres publiés pour la première fois avant la deuxième guerre mondiale, on trouve un nombre important de tâches de conversions, avec une assez grande diversité. Il est possible qu'il y ait un affaiblissement du travail de la numération vers la fin de la période : on constate apparemment la disparition de certains sous-types de tâches au CE dans les manuels publiés pour la première fois après la guerre. En particulier, dans nos manuels :

- pour le travail de la numération, les conversions sont limitées à la relation entre une unité et ses sous-unités et à la relation entre un nombre de un chiffre d'unités et les Unités. Par exemple, combien de centaines font 600 unités ? Combien y a-t-il d'unités dans 6 centaines ? ou 600=……centaines.
- dans l'étude du système métrique, on peut en revanche trouver des conversions du type : 3 hl en dal ou 35 hm en km et hm ou 4 kg 3 hg en hg tout au long de notre période. Ces relations, travaillées dans l'étude du kilogramme et de l'hectogramme, sont par exemple utilisées par Denise (CE2, p. 74) dans la technologie de la technique opératoire de la division alors que les relations entre unités de la numération sont citées mais pas travaillées en numération.

▪ Le calcul sans retenue

Notre repérage n'est pas systématique, néanmoins beaucoup de manuels proposent des tâches de calcul sans retenue lors de l'étude de la numération. Ces tâches ne sont pas du type de celles que nous avons évoquées pour les conversions et les compléments à l'unité supérieure : elles ne mettent pas en relation les unités de la numération. Elles sont présentes à la fois dans les leçons de numération et de système métrique (dans seulement un des deux habitats pour certains manuels). Boucheny, Châtelet, Denise par exemple les évoquent dans les leçons de numération. Marijon 1947 ne les évoque pas dans les leçons (ni de numération ni de système métrique) mais le type de tâches est prescrit dans les exercices de système métrique, Vassort fait de même.

Nous avons identifié deux sous-types pour ce type de tâches :

- calcul avec les nombres de « un chiffre suivi de zéros » : par exemple : $200 + 300$, $500 – 300$, 300×2, $800 : 2$,
- calcul avec plusieurs chiffres non nuls sans retenue. La technique n'est en général pas explicitée dans les leçons mais le type de tâches est souvent prescrit. Il est en fait difficile d'identifier la technique attendue : faut-il poser l'opération ou bien s'agit-il de

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

calculer mentalement ? Nous faisons l'hypothèse que c'est un calcul mental qui est attendu car les technologies relatives aux unités s'y prêtent bien,

Nous indiquons aussi un autre type de tâches qui ressemble au second sous-type dont nous considérons qu'il ne relève plus de la numération mais du calcul, calcul avec plusieurs chiffres non nuls et retenue.

Pour le premier sous-type, (Boucheny, pp. 43-44) indique par exemple dans la leçon « Centaines » :

> « Opérations sur les centaines. – Réunissons 2 sacs et 3 sacs de cent jetons. Nous avons en tout :
>
> 2 centaines + 3 centaines = 5 centaines de jetons,
>
> ou 200 + 300= 500
>
> On a de même :
>
> 5 centaines – 3 centaines = 2 centaines ou 500 – 300 = 200 ou 500 – 300 = 200
>
> 3 centaines × 2 = 6 centaines ou 300 × 2 = 600
>
> 8 centaines : 2 = 4 centaines ou 800 : 2 = 400 »

Ces exercices sont très présents dans les manuels. La technique n'est pas toujours indiquée. C'est parfois seulement en « calcul mental » qu'on les trouve.

Pour le deuxième sous-type, Boucheny propose par exemple des calculs dans diverses unités, pour le CE2 (leçon « l'hectomètre ») :

246. Effectuer en prenant le mètre pour unité :

1° 3 hm + 4 hm	3° 7 hm + 50 m	5° 45 dam + 325 m
2° 5 hm + 20 dam	4° 8 hm + 5 m	6° 3 hm 2 dam + 3 hm 2 m

(…)

249. Effectuer en prenant pour unité celle du plus grand nombre :

1° 9 hm – 30 dam	3° 70 dam – 4 hm	5° 875 m – 5 hm
2° 8 hm – 300 m	4° 70 dam – 300 m	6° 720 m – 40 dam

Marijon qui n'explicite pas de technique de calcul sur les unités propose dans chaque leçon sur le système métrique des exercices « additionner » et / ou « soustraire » du type suivant :

> 7. Additionner, puis transformer en dag, ou en dag et g : 40 g et 50 g ; 45 g et 30 g ; 3 dag et 65 g ; 35 g et 32 g.
>
> 8. Soustraire : 3 dag de 85 g ; 4 dag de 70 g ; 40 g de 6 dag et 5 g ; 3 dag de 7 dag et 2 g. (p. 27, leçon sur le gramme)

Dans ces exercices – sans retenue – , nous ne savons pas quelle est la technique attendue. En revanche, il est clair qu'il est possible de travailler au niveau des unités et convertir au moment le plus opportun dans l'unité demandée. Par exemple, 40 g et 50 g, sont 4 dag et 5 dag qui font 9 dag. Pour 7 hm + 50 m, les chiffres non nuls représentant des unités différentes, il suffit de repérer 7 hm et 5 dam et de recomposer le nombre en mètre en juxtaposant les chiffres et en adjoignant « 0 » pour occuper la place manquante des mètres.

Pour les nombres de deux chiffres, Mortreux propose par exemple (leçon « de quarante à soixante ») :

> Exercices oraux. – 1 – Combien font d'unités : 4 dizaines de bûchettes et 5 bûchettes ? 5 dizaines ? 4 dizaines et 9 unités ? 3 unités et 5 dizaines ?
>
> (…)
>
> 3. – Combien y a-t-il d'assiettes dans 40 assiettes et 10 assiettes ? dans 50 assiettes et 6 assiettes ? dans 40 assiettes et 5 assiettes ? dans 5 piles de 10 assiettes et 8 assiettes ?

Dans ces exercices, il nous semble qu'il ne s'agit surtout pas de « poser des opérations ». Le but est probablement d'apprendre aux élèves à utiliser les noms des unités comme référents pour la numération et le calcul et comme c'est indiqué dans la préface : « d'[habituer] à voir sous les chiffres la quantité qu'ils représentent ». Les questions de l'exercice 3 doivent probablement être traitées avec les techniques : 40 assiettes et 10 assiettes sont 4 dizaines et 1 dizaines, soit 5 dizaines d'assiettes ; 50 assiettes et 6 assiettes sont 5 dizaines et 6 unités soit 56 assiettes. Il est intéressant de voir comment le « calcul » sur les petits nombres (nécessaire pour regrouper les dizaines entre elles) est mêlé aux tâches de reconnaissance de la position des unités. Dans Mortreux, pour les nombres de trois chiffres, on ne retrouve pas cette diversité. Néanmoins, dans les exercices écrits, on a :

48. – Écrire les résultats des opérations suivantes :

300 + 100 +50 =	300 – 100 =	4 + 90 + 500 =
400 + 30 + 5 =	900 – 10 =	340 + 10 + 100 =

La technique est indiquée pour : 900 – 10 dans le livre du maître, il s'agit de 90 d – 1 d = 89 d ou 890. On peut donc supposer qu'il faut se référer aux unités de la numération, dans les exercices, plus simples, de la série.

Dans Mortreux CE dont la première édition précède 1923, nous n'avons pas repéré d'exercices du même type dans l'étude du système métrique. On y trouve des calculs à effectuer, qui comportent des retenues mêlées à des conversions et dont il nous semble qu'ils sont plutôt là pour exercer conjointement techniques opératoires et conversions. Ils mobilisent par ailleurs souvent les nombres décimaux. Par exemple, le livre du maître précise les réponses en italique d'un tel exercice :

[Exercice écrit] 1031. – En prenant le mètre pour unité, combien font :

48 m + 4 hm + 0 hm,8 =	8 hm – 450 m =
R. 48 m + 400 m + 80 m = 528 m.	*R. 800 m – 450 m = 350 m.*

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Chez Dumarqué qui est plus récent que Mortreux, le premier sous-type est prescrit sous une forme minimale (avec l'addition seulement) et nous n'avons pas repéré le deuxième. En revanche, on trouve la forme « avec retenue ». Par exemple :

> Effectuer les opérations suivantes après avoir converti en grammes :
> 780. 2 hg. 6 dag. + 9 hg. 5 dag. 2 g. = …
> 783. 7 hg. 9 dag. 1 g. – 4 hg. 9 dag. 9 g = … (leçon « l'hectogramme »)
> (…)
> 876. 5 kg. 7 dag. 9 g × 6 = … ; 7 kg. 8 hg. 4 dag. 2 g .× 3 = … (leçon « le kilogramme »)

On peut remarquer que dans la leçon sur l'hectogramme, les nombres qu'on obtient au résultat peuvent avoir quatre chiffres. Toutefois ce n'est pas en contradiction avec la progression en numération. Seule la longueur est étudiée en parallèle avec la numération. La masse est étudiée après les nombres de 5 chiffres et la capacité après ceux de 6 chiffres.

Les deux sous-types de tâches de calcul sans retenue combinent deux technologies. Il faut d'abord être capable d'identifier à quelle unité est rattaché un chiffre donné (relation entre unité et position), puis effectuer les opérations *ad hoc* sur chaque chiffre relativement à l'unité qu'il représente en utilisant « on compte par dizaines (centaines, etc.) comme on compte par unités ». Pour l'addition et la soustraction, il s'agit d'opérer sur les chiffres qui représentent la même unité. Remarquons aussi que ces technologies permettent de calculer des divisions et multiplications avec des besoins trophiques assez faibles et peut-être ainsi de travailler le sens de ces opérations avec des nombres assez grands (mais peu de chiffres significatifs).

- Décomposer, recomposer un nombre

Technique pour le type de tâches « décomposer recomposer »

Décomposer un nombre écrit en chiffres, recomposer un nombre en fonction de la valeur des chiffres sont deux tâches essentielles dans l'étude de la numération de position. Elles interviennent comme nous l'avons dit dans le traitement de notre première tâche emblématique mais elles ont assurément une fonction technologique : dès lors qu'on veut interpréter les chiffres d'un nombre on est confronté à ce type de tâches. La technologie utilisée est toujours la même (mais elle est très souvent combinée à d'autres). C'est celle que nous avons indiquée en premier, la mise en relation de la position et des unités de la numération : dans un nombre, à partir de la droite, le premier chiffre est celui qui représente les unités, le deuxième les dizaines, le troisième les centaines, le quatrième les unités de mille. Le chiffre 0 ne représente pas d'unité il marque un rang.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Étude du type de tâches « décomposer recomposer »

Avec Harlé, nous avons vu que la tâche « décomposer – recomposer » n'existe pas avec l'ostensif, 675=600+70+5, au début du 20ème siècle. Nous avons vu qu'elle n'existe pas non plus avec cet ostensif dans notre étude du système métrique à partir des années 30 (chapitre 3). Nous ne l'avons pas trouvée non plus avec cet ostensif dans des manuels plus tardifs mais antérieurs à la réforme (ou alors de façon extrêmement marginale et jamais comme seul ostensif pour le type de tâches). Avec cet ostensif, elle est en revanche souvent utilisée pour la technologie de la technique opératoire de la multiplication à plusieurs chiffres au multiplicateur, pour décomposer le multiplicateur. Avec les technologies classiques, elle peut néanmoins être justifiée pour cet ostensif : à partir de 675, on obtient 6 centaines 7 dizaines 5 unités (1ère technologie) puis en utilisant de nouveau la 1ère technologie mais en sens inverse pour chaque « chiffre », 6 centaines s'écrit avec 6 en troisième position et des zéros pour occuper les places manquantes, etc., on obtient la décomposition 600+70+5.

Nous allons donner des exemples de tâches pour ce type de tâches. En fait, il se manifeste dans une assez grande variété de tâches dont toutes visent manifestement à travailler la relation entre position et unités de la numération. On remarque aussi la diversité dans les formulations. Notre repérage n'est pas exhaustif et certaines tâches sont peut-être plus rares que d'autres. Par ailleurs, nous n'avons indiqué que quelques tâches qui impliquent les unités métriques mais on voit bien que nombre de celles exprimées pour les unités de la numération peuvent avoir une correspondance en unités métriques.

- On donne les nombres : 1428, 1610, 1643, 1705, 2033, 3732, 4793, 5914, 8198. Indiquer le chiffre des mille, le chiffre des centaines, le chiffre des dizaines, le chiffre des unités de chacun de ces nombres. (Dumarqué, p. 53)
- Combien d'unités dans 1000 fr. et 3 fr. ? 3 mille et 5 centaines ? 7000 et 4 dizaines ?[68]
- Décomposer en centaines, dizaines et unités les nombres suivants : 123 mètres ; 190 fr. ; 110 ; 109 ; 158. Signalons que dans Mortreux, la réponse attendue pour 109 est 1 c 0 d 9 u et pour 123 mètres 1 c 2 d 3 u mais ce n'est pas le cas pour tous les manuels ni dans la théorie. Avec les technologies de (Reynaud, 1821), 109 se décompose en 1 c 9 u
- Décomposer en leurs unités les nombres suivants : 6378. (…) (Boucheny, p. 75)

[68] Nous verrons que cette question a pu être considérée comme ambiguë. Nous pensons qu'avant la réforme, il faut répondre : 1003, 3500 et 7040, et non 3, 0 et 0.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

- Écrire en chiffres les nombres : 3 dizaines ; - 3 centaines ; - 3 mille ; - 7 dizaines 8 unités ; - (…) ; - 6 mille 7 dizaines. (Dumarqué, p. 68, « révision trimestrielle)
- 1 hl 2 dal 5 l = … l ; 1 hl 6 l=…l ; 180 l = … hl … dal (Denise CE1, l'hectolitre p. 66)
- Comment fait-on pour que les chiffres 1, 2, 3, … représentent des centaines ? R. : On écrit 2 zéros à la droite de chacun de ces chiffres.
- Combien de zéros faut-il écrire à droite du chiffre 4 pour que celui-ci représente des dizaines ? des mille ? des centaines ? (Dumarqué, p. 50)
- Dans un nombre entier quel rang occupent : 1° les dizaines ? 2° les mille ? 3° les unités ? 4° les centaines ? (Minet, p. 117)
- Quelles sont les plus hautes unités d'un nombre de 4 chiffres ? (Boucheny, p. 178)
- Le mètre étant pris pour unité : 1° À quel rang s'écrivent les décamètres les hectomètres ? les kilomètres ? 2° Que représente le chiffre des unités de mille ? des dizaines ? des centaines ?
- Dans l'écriture d'un nombre que représente le 1er chiffre à droite ? le 4^{e} ? (Boucheny, p. 178)
- Dans le nombre 7385 que représente le 7 ? le 5 ? le 3 ? le 8 ? (Boucheny, p. 92)
- Quelles sont les valeurs du chiffre 7 dans les nombres 70 ; 307 ; 749 ?

Techniques opératoires

Nous excluons de ce paragraphe le manuel Châtelet 1932. En effet, il est manifestement précurseur pour certains éléments. En ce qui concerne les techniques opératoires notamment, il donne en général plusieurs technologies pour chacune d'elles : ainsi pour la division par exemple, on trouve une approche par la division des unités successives et une autre en faisant des soustractions successives.

Il nous semble que les autres manuels, publiés pour la première fois à partir des années 1930, sont relativement homogènes du point de vue des techniques opératoires. Les technologies pour justifier les techniques opératoires ne sont pas toujours indiquées. Néanmoins quand elles le sont, il s'agit toujours de technologies en unités de la numération ou métriques. La multiplication à plusieurs chiffres constitue une exception car on utilise presque toujours comme décomposition du multiplicateur une décomposition chiffrée du type : 345=300+40+5 dans sa justification.

Le cas de la division est intéressant. Dans leur rapport sur les conférences pédagogiques, cité par Butlen (1985), les inspecteurs généraux préconisent en 1928 d'utiliser les soustractions successives comme approche pour la technique opératoire :

> La méthode que nous allons rappeler en quelques mots est due à M. Gal. Diviser 7.328 par 13, c'est retrancher successivement 13 de 7.328 jusqu'à ce qu'on soit arrêté dans cette suite de soustractions, laquelle sera fastidieuse. Il y aura donc intérêt à faire ces soustractions « par paquets » (…) (cité par Butlen, 1985, annexe 4, p. 4)

Cette recommandation n'a manifestement pas été suivie avant 1970. Peut-on voir là la volonté des auteurs de manuels de préserver l'écologie de la numération ? En effet, la technologie par divisions successives des unités est sans doute un moment important pour travailler une nouvelle fois la propriété forte de la numération. Se priver de cette technologie impliquerait de se passer d'une nouvelle rencontre avec ce savoir.

Peut-être faut-il aussi signaler que cette approche technologique modifie profondément la technique opératoire, en particulier, quand le diviseur a plusieurs chiffres

3.3. Conclusions sur l'étude de l'enseignement ancien

▪ Le rôle du traité dans la structuration écologique

Thème

Il nous semble qu'on peut dire que jusqu'à Châtelet 1932, la théorie (présentée dans le traité de Reynaud) pilote le plan d'étude de la numération et les discours technologiques sont directement tirés de la théorie. Ces discours technologiques sont aussi convertibles en morceaux de techniques. Plus précisément, pour traiter une tâche, on peut élaborer une technique en la décomposant en sous-tâches, chacune de ces sous-tâches pouvant être traitée par un des discours technologiques élémentaires.

Nous avons identifié cinq types de tâches qui sont représentés par des tâches emblématiques et un type de tâches technologique. Ces types de tâches semblent permettre de décrire l'enseignement de la numération de position.

De plus, si nous complétons cette étude de la numération de position par nos résultats quant à celle du système métrique (chapitre 3) il semble advenir qu'on a en fait une grande organisation mathématique, qui agglomère la numération, le système métrique, les pratiques sociales de mesurage, et qui est pilotée par la théorie de la numération de position.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Variations

À partir de Châtelet 1932, la situation est plus floue quant aux technologies. Toutefois, le plan d'étude est maintenu même si les leçons du type « entre deux centaines » sont remodelées.

Les modifications que Châtelet 1932 propose semblent être de deux ordres. Elle semblent se traduire d'abord, de façon visible, par une tentative de prendre davantage en compte des pratiques de référence pour la vie courante (discours sur la numération orale par rapport au mesurage en mètres et centimètres, description d'une technique de dénombrement, par exemple) qui se traduisent par un éloignement par rapport au plan imposé par la théorie. Dans un deuxième temps, on constate aussi qu'il y a des modifications par rapport aux ostensifs et aux discours. Les discours positionnels, par exemple, sont minorés même s'ils ne disparaissent pas complètement. Il faudrait étudier spécifiquement ce manuel en y cherchant une logique qui lui est propre, ce que nous n'avons pas eu le temps de faire.

- La valence instrumentale de la numération en unités

Nous avons montré que la valence instrumentale de l'ostensif numération en unités est supérieure, à besoins trophiques identiques, à celles des numérations orale et positionnelle. Cet ostensif n'est pas très utilisé dans la vie courante. Il apparaît nécessaire, et peut-être indispensable, dans les technologies de la numération de position puisqu'il permet de les formuler avec de faibles besoins trophiques, en utilisant des mots et peu de calcul (du comptage avec les nombres de un chiffre principalement).

Il a sans doute des qualités sémiotiques particulières : il relève de la « langue naturelle » sans faire partie du langage ordinaire, il est convertible dans la numération chiffrée et dans la numération orale par des techniques régulières pour le premier, avec des exceptions bien délimitées pour le deuxième. Les traitements internes à ce registre :

- ne nécessitent pas de symbolisme opératoire,
- peuvent être plus élaborés que dans le registre de la numération orale.

- L'OM et la numération en unités

Dans les technologies que nous avons identifiées, la numération en unités joue un rôle central. Les technologies 1 et 3 permettent de convertir la numération en unités en numération positionnelle d'une part, la numération en unités en numération orale d'autre part (et réciproquement). Notre étude précédente sur le système métrique (chapitre 3) avait montré que la numération en unité était un médiateur entre la numération positionnelle et les unités

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

métriques. Cet ostensif joue donc un rôle central du point de vue de l'écologie des technologies et de leur formulation. Il permet d'harmoniser les praxéologies.

Les types de tâches que nous avons identifiés se déclinent notamment dans la numération en unités alors que les tâches emblématiques relevant de pratiques de la vie courante généralement pas. Il nous semble qu'autour d'une tâche emblématique, les types de tâches sont en fait très diversifiés de façon à faire fonctionner la technologie. La numération en unités est un moyen apparemment puissant pour permettre ces variations.

Il nous semble remarquable que la numération en unités, cet ostensif « à tout faire » et omniprésent, n'existe que très marginalement dans la vie courante.

- Retour sur Liping Ma

Cette dernière étude de l'enseignement ancien complétée par celle sur les opérations, en particulier les étapes dans l'apprentissage des algorithmes, nous renvoie au texte de Liping Ma que nous avons cité relatif à la valeur de la position vue par un enseignant chinois. En effet, cet enseignant voit des étapes dans cette étude, étapes qui sont notamment structurées par l'étude des techniques opératoires. À chaque phase d'une technique opératoire, il explicite sa relation avec la numération de position et notamment l'importance des relations entre unités. L'étude de ces relations entre unités est très structurée à la période classique, les tâches de calcul en relation avec la numération le sont aussi même si la structuration est moins nette. Par suite, nous ne pouvons nous empêcher de voir des relations entre les praxéologies mathématiques que nous trouvons dans les deux champs.

Nous voyons aussi une relation dans la capacité des enseignants chinois à mettre en relation un calcul et une situation (capacité peu développée chez les enseignants américains que Ma étudie en parallèle) et notre mise en évidence des leviers pour l'enseignement des opérations à la période classique. Liping Ma demande de raconter ou de proposer une bonne histoire ou un bon modèle pour l'expression $1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$. Pour la période classique, nous n'avons pas étudié le CM et le CS où les fractions sont étudiées. Toutefois, il nous semble que ce que nous avons vu sur la diversité des situations rencontrées et sur les discours explicatifs dans l'étude des opérations pour le CE est susceptible de créer des conditions favorables à la mise en relation de calculs et de contextes. Peut-être est-il nécessaire de revenir à notre chapitre 2. Une intention des programmes de 1970 était de prendre de la distance par rapport aux problèmes suggérés par la vie courante.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Une différence importante, en revanche entre les contextes d'enseignement, nous semble être la place laissée au symbolisme. En Chine, le symbolisme semble être introduit progressivement et mis en relation étroite avec les registres d'expression étudiés précédemment. Dans la période classique nous ne trouvons pas de trace des symbolismes du type : utilisation des lettres, ni même utilisation des parenthèses. Il est généralement admis que la réforme des mathématiques modernes a massivement introduit du symbolisme dans l'enseignement primaire.

- Une étude complémentaire sur l'influence de Châtelet et de son livre

Nous avons évoqué l'intérêt d'une étude complémentaire sur la logique interne du manuel de Châtelet. Plus généralement, une étude spécifique quant au rôle joué par ce manuel et son auteur dans l'histoire de l'enseignement des mathématiques serait sans doute intéressante. Châtelet (1883-1960) a été co-directeur de la revue « L'enseignement mathématique » de la CIEM de 1955 à 1960 et le site internet de la « cité scolaire Albert Châtelet » de Douai indique « En janvier 1937, Jean Zay, Ministre de l'Éducation Nationale du gouvernement de Front Populaire, l'appelle aux fonctions de directeur de l'Enseignement du second degré. A ce poste, il participe activement à la préparation d'une réforme de l'enseignement et à la rédaction des « programmes, horaires et instructions » »[69]. Par ailleurs, Châtelet est un mathématicien de renom et un contemporain de Lebesgue (1875-1941) et ce dernier a été directeur de la revue de la CIEM à partir de 1939. Et nous avons indiqué qu'il y avait des ressemblances troublantes entre le livre de Lebesgue et le programme de 1945 ainsi que de nombreux éléments communs entre les programmes de 1938 pour le cours supérieur et ceux de 1945.

3.4. Quels sont les changements pour la période actuelle ? D'où viennent ils ?

- L'apparition d'un nouvel ostensif

La conception du nombre au moment de la contre-réforme

Nous avons évoqué ce qui nous semble être la « conception du nombre » d'Harlé. Nous avons dit que cette conception n'était probablement pas celle qui était en vigueur au moment de

[69] http://pagesperso-orange.fr/lyceechatelet.douai/citescolr/albertchat.htm

l'élaboration des traités, ni jusqu'à la réforme compte-tenu de la stabilité relative de l'enseignement de la numération. Par ailleurs, nous avons dit qu'Harlé ne reconnaît pas les nombres quand ils sont écrits dans les unités de la numération. Ce constat nous amène à formuler une hypothèse.

Il est probable qu'à un moment, qui reste à déterminer, la numération en unités ait été péjorée. Finalement, la conception du nombre d'Harlé serait conforme au rapport institutionnel de son époque, c'est-à-dire celle de la contre-réforme. Il pourrait ne pas y avoir de numération en unités dans l'étude de la numération à cette époque. D'après ce que dit Harlé, cette numération pourrait avoir été plus ou moins remplacée par les écritures chiffrées des puissances de dix (ECPD).

L'ostensif ECPD dans l'étude ancienne du système métrique

Pour étayer un peu plus cette hypothèse, nous reprenons ce que nous avons écrit à propos des ostensifs dans l'étude du système métrique au moment de la période classique : les écritures chiffrées des puissances dix n'y apparaissent que très marginalement.

Conclusion

Il nous semble que l'ostensif ECPD existe dans la période classique mais qu'il existe au même titre que les autres écritures chiffrées. Il ne fait pas l'objet d'un travail systématique en numération même si on l'y rencontre forcément lors de l'évocation de pratiques sociales dans les problèmes de la « vie courante » notamment.

Cette conclusion nous amène à de nouvelles hypothèses que nous déclinons en questions pour étudier les manuels à partir de la réforme.

- Hypothèse 1 (la numération en unités *versus* les écritures additives)

Notre retour sur le travail d'Harlé nous conduit à formuler l'hypothèse de la péjoration de la numération en unités conjointement à la valorisation des « écritures ».

Harlé qui regarde des livres anciens (et dont la thèse date de 1984) ne voit pas de nombres dans la numération en unités. Peut-on dire que son rapport personnel à l'objet numération de position est conforme au rapport institutionnel de la contre-réforme ? Une éventuelle « interdiction » de la numération en unités pourrait s'être rapidement naturalisée. À quel moment une telle interdiction se serait-elle installée ? au moment de la réforme ou après ?

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Dans toutes les tâches de numération comportant de la numération en unités, les « écritures additives » pourraient l'avoir remplacée. Nous avons dit que l'étude la suite algorithmique ne peut être justifiée complètement qu'avec des besoins trophiques relativement élevés. Existe-t-il des tâches incompatibles avec « les écritures » ? Le cas échéant, que deviennent-elles ?

Questions pour étudier les manuels

Pour nous, ces questions se posent au moment de la réforme des maths modernes (1970), au moment de la « contre-réforme » (1980), au début des années 2000.

Étude des numérations écrite et orale, des techniques opératoires

Pour l'étude de la numération (écrite et orale) et des techniques opératoires, peut-on effectivement repérer l'exclusion de la numération en unités et la valorisation des écritures dans les manuels ? à quelles dates ? Si on considère la numération en unités comme un ostensif, peut-on repérer des tâches attachées à cet ostensif qui disparaissent ? des tâches attachées aux écritures qui apparaissent ? Y a-t-il des conséquences au niveau des techniques et des technologies ? Perçoit-on des modifications au niveau théorique ?

Deux aspects de la « valeur de la position »

Si, dans les manuels, les noms des unités de la numération sont toujours là, observe-t-on le phénomène identifié par Liping Ma, à propos du « décalage » dans la multiplication avec plusieurs chiffres au multiplicateur (123×645) ? Deux professeurs font une proposition pour remédier à l'erreur qui consiste à ne pas décaler les chiffres. Nous rapportons les propos du second (nous traduisons) : « Je reviendrais à la valeur de la position et leur dirais [aux élèves] que quand on multiplie par les unités, c'est aligné avec les nombres au-dessus. Et quand ils se déplacent au chiffre suivant, qui est celui des dizaines, ça s'aligne avec les dizaines. Et ensuite le nombre suivant sera aligné avec les centaines et ainsi de suite. ». Liping Ma commente : [Ces] descriptions [de l'algorithme de la technique opératoire de la multiplication] sont deux exemples supplémentaires de la façon dont un terme conceptuel peut être utilisé d'une façon procédurale. Le terme « valeur de la position » n'est pas présenté aux élèves comme un concept mathématique mais comme une étiquette pour les colonnes dans lesquelles ils doivent mettre les chiffres. ». (Ma, 1999, p. 34)

Selon nous, ce phénomène peut être interprété de deux façons :

- Soit c'est la conséquence de choix institutionnels qui auraient consisté à péjorer les unités de la numération : les écritures chiffrées sont des objets premiers dans lesquels

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

les noms des unités permettent de se repérer. Ils indiquent des positions : à la place de « deuxième position », on dit « dizaine » mais ne représentent pas des quantités ;

- Soit c'est une conséquence de la pauvreté des concepts chez les enseignants (interprétation retenue par Liping Ma). Cette pauvreté peut aussi être la conséquence de choix institutionnels, les précédents ou d'autres.

- Hypothèse 2 (les bases)

Une hypothèse complémentaire quant aux changements dans l'étude de la numération est que l'introduction des bases a bouleversé les types de tâches prescrites au delà de la *généralisation du principe de la numération* (comprendre le principe itératif des groupements était un objectif important du programme de 1970). Des tâches anciennes, mais cruciales, auraient disparu en 1970 parce qu'incompatibles avec les bases. Pour des raisons diverses elles ne seraient pas réapparues ensuite lors du rétablissement exclusif de la base dix.

Par exemple, à propos de la numération orale « en bases », les instructions de 1970 excluent que 24 se lise vingt-quatre, 24 doit se lire « deux, quatre ». On aurait pu faire un autre choix : par exemple, en base cinq, « 2 cinq et 4 ». On voit de suite que si un nom pour le premier groupement apparaît assez naturellement, ceux des suivants semblent plus problématiques. Néanmoins, de telles désignations auraient pu constituer une numération en unités congruente avec la numération orale. Le choix qui est fait réduit la numération orale « en bases » à la juxtaposition des chiffres qui devient alors paradoxalement une numération positionnelle.

Ensuite, le travail « en bases » est susceptible d'exclure l'étude de tous les problèmes de la « vie courante », ceux de numération notamment. Pourtant, nous l'avons vu dans notre chapitre 3 à propos des styles, ces problèmes occupent des niches importantes dans l'organisation mathématique classique, puis au chapitre 5 à propos des ruptures dans les techniques des élèves entre exercices en contexte et hors contexte.

Que devient, en bases, l'exercice de conversion « Combien de dizaines dans trois centaines ? » Comment le formule-t-on ? Le propose-t-on ? Se réfère-t-on à des objets ? Faut-il dire : « combien y a-t-il de groupes d'ordre 1 dans trois groupes d'ordre 2 ? » ou « combien de groupes de taille *un, zéro* en base cinq dans un groupe de taille *trois, zéro, zéro* en base cinq ? » Faut-il écrire : « Combien de fois $(10)_5$ dans $(300)_5$? » ou « complète : $(10)_5 \times \ldots = (300)_5$ ». Il nous semble qu'ici l'absence de numération orale (qui participe de l'absence de références à la vie courante) ou de numération en unités fait perdre une bonne partie de son intérêt à cet exercice. Avec une numération orale minimale on pourrait par exemple avoir

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

« combien y a-t-il de « cinq » dans trois « gros » ? ». Les instructions de 1970 n'envisagent pas cela.

Questions pour étudier la numération au moment de la réforme des mathématiques modernes

Dans quelle mesure l'introduction des bases perturbe-t-elle le travail en numération ? Introduit-on de nouvelles tâches et pourquoi ? Comment les anciennes tâches résistent-elles ?

Quelles traces de la « vie courante » repère-t-on dans les manuels dans l'étude de la numération en bases, de la numération en base dix ?

L'étude des manuels anciens montre que de nombreuses tâches, de conversion notamment, impliquent de façon assez subtile les trois registres : écriture chiffrée, numération orale et numération en unités. Comment ces tâches résistent-elles en bases ? Les conversions résistent-elles lorsqu'il s'agit d'étudier la base dix ?

Que deviennent les technologies pour les techniques opératoires ? Sont-elles élaborées en bases ? avec quel degré de généralité ? La numération en unités joue-t-elle un rôle ?

- Hypothèse 3 (nombre de)

Les enseignants étudiés par (Parouty, 2005) considèrent que la tâche « nombre de » est difficile. Parouty leur propose des problèmes de numération en contexte pour leurs élèves, les enseignants les mettent en œuvre et Parouty constate que les élèves progressent. On peut supposer que ceci signifie que le type de tâches « nombre de » vit mal. Pourquoi en serait-il ainsi ?

Dans la praxéologie que nous avons mise en évidence pour la période classique, le « nombre de » n'est pas un type de tâches. Il fait partie d'un type de tâches très structuré, les conversions. Il en est un cas particulier. (Rappelons toutefois que nous n'avons pas étudié de manuels du CM et qu'il pourrait en aller différemment. En particulier la propriété forte de la numération pourrait être davantage mise en évidence.)

À notre connaissance, les conversions dans l'étude actuelle de la numération sont rares. D'une certaine façon, l'existence même du type de tâches « nombre de » pourrait être une des raisons de sa difficulté à exister, non pas parce que les tâches qu'il contient n'existaient pas avant mais parce qu'elles étaient insérées dans des chaînes trophiques qui auraient été détruites.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Peut-on trouver des raisons à l'affaiblissement du type de tâches « conversion » ? Peut-on trouver des raisons à la naissance du type de tâches « nombre de » ? On peut avancer les hypothèses suivantes en guise d'explication :

- la réforme des mathématiques modernes pourrait avoir mis à mal le type de tâches conversions (cf. supra),
- le « nombre de » et, plus généralement, le type de tâches « conversion » mobilisent explicitement les unités de la numération dans leur formulation et sont donc fragilisés si ces unités sont péjorées,
- le « nombre de » vit parce que c'est un type de tâches emblématique de la numération (au sens d'Artaud, 1997) mais il est isolé.

Questions pour étudier l'évolution de la tâche « nombre de »

Dans quelles chaînes trophiques cette tâche se trouve-t-elle à partir de la réforme ? avec quels ostensifs ? Les techniques et technologies pour étudier cette tâche évoluent-elles au fil du temps ?

En 1970, dans le programme, cette tâche apparaît explicitement et est prise dans une progression pour l'apprentissage des décimaux (par changement d'unité). Hypothèse à éprouver : les technologies pour les techniques opératoires ne sont pas brutalement modifiées en 1970 mais elles sont « simplifiées » car mises en place « en bases ». Par ailleurs, si ce n'était sa justification pour l'étude des décimaux, la tâche pourrait peut-être disparaître « en base » tant elle paraît incongrue, voire impossible sans numération en unités ou orale. Nous avons déjà évoqué cela dans notre hypothèse précédente, à propos des « bases ».

Dans l'étude des décimaux, elle est préconisée. Cela suffit-il à la faire vivre ?

> « Afin de bien comprendre la signification de la virgule, on peut reprendre l'exercice de groupement du paragraphe 2.2 dans une numération où le groupement de base est le groupement par quatre.
> - Lorsque l'enfant est choisi pour unité, la population de la classe s'exprime par l'écriture 123.
> - Lorsque le « groupe » (quatre enfants) est choisi pour unité, la population de la classe s'exprime par l'écriture 12,3.
> - Lorsque le « grand groupe » (seize enfants) est choisi pour unité, la population de la classe s'exprime par l'écriture 1,23. » (instructions de 1970, §7.1 Nombres décimaux – Définition et écriture)

Depuis 1980, cette tâche apparaît dans les instructions. Hypothèse à éprouver : elle est prise comme une tâche pour elle-même, pas dans une progression, ni pour étudier un autre objet (contrairement, par exemple, à ce qu'on voit chez les enseignants chinois à propos du

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

renforcement de la numération de position dans l'étude de la multiplication). Quel est le rôle des conversions entre unités de la numération aujourd'hui ?

4. Le temps de la réforme

Nous nous attachons maintenant à la réforme. Essentiellement, nous voulons voir si de nouveaux types de tâches émergent, si certains disparaissent et pourquoi, et si des changements théoriques se font jour. Nous utilisons pour cela des manuels scolaires et livres du maître. Nous avons aussi étudié quelques documents publiés par l'APMEP.

Pour cette période, nous avons étudié de façon approfondie deux manuels de CE2 très franchement réformateurs (Eiller, 1972, lde ; 1974 ldm), (Such, 1977, lde, ldm). Nous avons aussi consulté Denise & Polle (1972) (pour le livre de l'élève les niveaux CE1 et CE2, le livre du maître pour le CE2 seulement) qui est assez nettement réformateur. Néanmoins, certains manuels de l'époque, comme Goergler (1973), sont plus nuancés. Ce manuel est nuancé en ce sens qu'il maintient des tâches anciennes au côté de nouvelles qu'il introduit. Par manque de temps, nous ne l'avons pas inclus dans notre étude car nous avons essentiellement cherché l'émergence de phénomènes plus que le maintien d'anciens.

Nous avons également étudié les livres pour l'élève et le maître pour le niveau CE1 de Such et Eiller, nous y ferons parfois référence.

4.1. Un changement théorique ?

A partir de la fin des années 60, nous voyons apparaître des éléments théoriques dans certains documents. On ne peut pas dire qu'elle soit nouvelle dans la mesure où elle existe dans (Reynaud, 1821) avec le travail en base. Il nous semble que selon les documents elle a des statuts différents. Ces éléments théoriques reposent sur la décomposition polynomiale d'un entier dans une base.

▪ Une nouvelle théorie ?

Dans le dictionnaire de l'APMEP (1967), la fiche « numération » est organisée comme suit :

- 1. Représentation parlée des naturels
- 2. Représentation écrite des naturels
    - 2.1 Introduction
        - numération non positionnelle (associée à la numération orale) : une telle numération implique un grand nombre de symboles
        - écriture de position et décomposition polynomiale :

Aujourd'hui ce qu'on entend par écriture de position représente un gain considérable de simplicité. Cette écriture exige seulement un nombre fini de symboles, ou *chiffres*, représentant les entiers depuis zéro (inclus) jusqu'à la base (exclue). L'introduction réitérée de symboles nouveaux est épargnée grâce à cette propriété fondamentale qu'une fois choisie la base K, tout naturel peut être mis de façon unique sous forme d'une combinaison linéaire de puissances de K, d'exposants naturels, dont les coefficients sont strictement inférieurs à K. (APMEP, 1967, numération)

- 2.2 conventions de l'écriture de position

2.2.1 Représentant chaque coefficient par un chiffre, on représente le naturel par la suite de ses coefficients, rangés selon l'ordre croissant des exposants correspondants, depuis l'exposant nul inclus, de la droite vers la gauche.

2.2.2 Si les coefficients à la gauche d'un coefficient nul ne sont pas tous nuls, ce coefficient nul doit être écrit ; dans le cas contraire les coefficients nuls ne doivent pas être écrits : toutefois le naturel zéro s'écrit 0.

2.2.3 Par dérogation aux règles générales d'écriture des suites, on n'écrit pas les virgules qui séparent les coefficients.

- 3. Représentation décimale, octale, binaire, etc.

Cette rubrique s'intéresse essentiellement aux usages sociaux des différentes bases : dix pour la vie courante, deux et huit « pour la construction des calculatrices ». La question de l'oral en bases est résolue de la manière suivante :

À la lecture on devrait en toute rigueur énoncer les chiffres de la suite suivis de l'indication de la base ; par exemple, pour le premier nombre ci-dessus : « deux, cinq, quatre, octal ». Dans la pratique toutefois – et pourvu que la base soit inférieure à dix – on lit souvent suivant les habitudes acquises en se bornant à ajouter l'indication de la base : « deux cent cinquante quatre, octal ».

La suite de la fiche est relative aux nombres non entiers. Nous n'y faisons pas davantage référence.

Il nous semble qu'on retrouve un plan du même type dès la première édition de la collection Math et Calcul (Eiller, CE1 1973 ; CE2 1974). Un premier paragraphe s'intéresse aux numérations non positionnelles qui n'inclut pas la numération orale mais évoque la numération égyptienne. Dans un deuxième paragraphe intitulé « Les numérations de position », on trouve un rapide historique de la numération positionnelle décimale des entiers, suivi par les « règles d'une numération de position » qui inclut des codages « en base » de groupements d'objets dans des tableaux dont les libellés des colonnes sont les dessins des différents groupements d'objets. Ce deuxième paragraphe comporte ensuite des « fondements mathématiques » où est énoncé le théorème de décomposition polynomiale, viennent ensuite une présentation des systèmes binaire, octal, décimal et duodécimal, puis des éléments sur le changement de base.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Nous donnons un extrait de ces « fondements mathématiques »[70] :

> « 1 Théorème
>
> Si $a\in$N et a>1, pour tout entier naturel N, il existe un développement unique de la forme
>
> $N=r_n a^n+r_{n-1}a^{n-1}+\ldots+r_2a^2+r_1a^1+r_0a^0$ ($a^0=1$)
>
> avec $r_0\in$N ; $r_1\in$N ; $r_n\in$N
>
> et $0\leq r_0<a$; $0\leq r_1<a$; … ; $r_n\neq 0$
>
> 2 Commentaires
>
> La démonstration de ce théorème important repose sur un processus algorithmique qui consiste :
> - à effectuer la division euclidienne de N par a
> - puis la division euclidienne par a du quotient obtenu. Et ainsi de suite…
>
> (…)
>
> 3 Numération de base a
>
> (…)
>
> Le nombre N dont le développement dans la base a est :
>
> $N=r_n a^n+r_{n-1}a^{n-1}+\ldots+r_2a^2+r_1a^1+r_0a^0$ ($a^0=1$)
>
> est représenté par le symbole[71]
>
> $(r_{n\ldots}r_1r_0)_a$
>
> (…)
>
> Ainsi, en base trois, le nombre
>
> $x=2.3^4+1.3^3+2.3^2+r1.3^1+1.3^0$ s'écrit $(21211)_3$
>
> (…)
>
> Quel que soit le nombre a, pris pour base, le nombre a admet pour développement : $a=1.a+0$
>
> et s'écrit donc $a=(10)_a$.
>
> De même, les puissances de a sont représentées par le chiffre 1 à gauche suivi d'un nombre de 0 égal à l'exposant, et ceci quelle que soit la base a :
>
> Ainsi $a^2=1.a^2+0.a^1+0$ s'écrit $a^2=(100)_a$ et $a^3=(1000)_a$ etc. » (Eiller, ldm CE1, 1973, pp. 131-132)

Malgré des formalismes différents, ces deux présentations nous semblent avoir deux points communs importants : le théorème de décomposition polynomiale ne vient justifier que la numération de position et, par suite, la numération orale et les numérations non positionnelles ne sont pas justifiées.

---

[70] Signalons que, pour les « indications théoriques », le livre du maître de Math et Calcul (Eiller) évolue peu entre 1970 et 1990 et que de nombreuses parties sont communes aux niveaux CE1, CE2 et CM1 (et peut-être aux autres que nous n'avons pas consultés).

[71] Eiller utilise la notation « surlignée » pour les écritures chiffrées dans les différentes bases.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

- Une reprise de la théorie classique adaptée aux bases ?

La situation est différente dans la brochure MOTS III (APMEP, 1976) au mot Numération. On y retrouve des éléments du dictionnaire mais avec un autre plan qui est cette fois :

1) introduction,
2) codage des naturels et base de numération,
3) codages oraux,
4) codages écrits,
5) quelques commentaires.

Le deuxième paragraphe présente en fait le problème général du codage en base d'un entier. On se réfère au dénombrement d'une collection d'objets.

> « Le seul procédé de codage connu qui ait permis une économie substantielle de langage (sans excepter le langage des calculatrices les plus modernes) n'est autre que le procédé familier des « petits paquets ».
>
> Concrètement, on se fixe un certain naturel A, plus grand que *un* appelé base ; toute collection de A-objets est considérée comme une nouvelle « unité » qu'on peut appeler A-unité ou, plus couramment, unité du *second ordre* (paire, triade, dizaine, douzaine, … peu importe). Pour dénombrer une collection donnée, on groupe A par A ses objets, et éventuellement on compte les objets restants (leur nombre étant évidemment plus petit que A). Tout naturellement, le procédé s'étend au décompte des A-unités : dès que leur nombre atteint A, on considère leur réunion comme une nouvelle sorte d'unité, une A^2-unité, ou, plus couramment, unité du troisième ordre (« quatuor », neuvaine, centaine, grosse, … selon que A est deux, trois, dix, douze, …) et ainsi de suite. (…)
>
> Abstraitement, le naturel A est appelé base de la numération ainsi obtenue ; le procédé ci-dessus est décrit par une succession de divisions euclidiennes par la base : à la première étape le nombre des paquets et le nombre d'objets non groupés sont respectivement le quotient et le reste.
>
> (…)
>
> Le point essentiel est qu'une fois choisie la base A, la décomposition d'un naturel en « unités » des divers ordres est unique sous réserve que le nombre des « unités » de chaque ordre soit plus petit que A. » (p. 4)

Les paragraphes suivants relatifs aux codages oraux (numération orale) et codages écrits (numérations non positionnelles, positionnelles en diverses bases) s'appuient sur le développement théorique précédent et nous semblent donc peu différents de ce qu'on peut trouver dans la théorie classique. Les « quelques commentaires » comportent des éléments sur les changements de base, c'est à cet endroit qu'apparaît le développement exponentiel d'un entier et il est présenté comme un élément rattaché aux points précédents.

Nous nous proposons maintenant de pointer quelques différences entre cette théorie et la théorie classique. La théorie classique se référait uniquement à la base dix, pour la construction de la suite des nombres alors qu'ici le nombre *A* semble être variable. Ici, on évoque la division euclidienne, elle n'est pas présente à cet endroit là chez Reynaud et elle n'y est pas nécessaire pour construire la suite complète. On voit en fait que dans MOTS, contrairement à ce que fait Reynaud et à ce qu'on voit dans les livres anciens, on ne construit pas une unité puis les multiples de cette unité (jusqu'à 9) auxquels on ajoute les nombres déjà construits. Le procédé de Reynaud permet, sur le plan théorique, de « boucher les trous » entre deux multiples d'une unité, il semble ici être remplacé par l'existence et l'unicité de la division euclidienne. Dans MOTS, on écrit :

> Pour dénombrer une collection donnée, on groupe A par A ses objets, et éventuellement on compte les objets restants (leur nombre étant évidemment plus petit que A). (APMEP, 1976)

Et Reynaud n'indique pas qu'on groupe tous les objets d'un rang donné. Arrivé à dix unités d'un certain rang, on forme une unité plus grosse et un chiffre donné n'est pas vu comme un reste de division euclidienne. Dans la théorie classique, on obtient les chiffres du nombre de « gauche à droite » (et donc l'ordre de grandeur du nombre en même temps que le premier chiffre obtenu) ; avec la division euclidienne, on obtient les chiffres de droite à gauche.

4.2. Types de tâches et technologies

Nous nous proposons maintenant d'étudier les types de tâches et technologies pour la période de la réforme. Dans quelle mesure les uns et les autres sont-ils modifiés ? Nous avons cherché des indices de modifications des techniques et technologies dans les manuels parus dans les années 1970. Nous présentons des éléments plus ou moins généraux sur les variations au sein des types de tâches et nous indiquons les technologies qui nous sont accessibles.

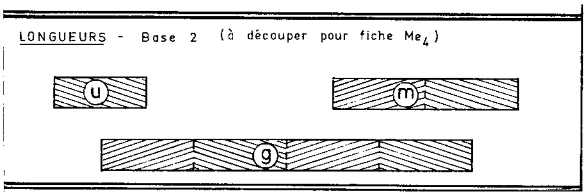
À part l'arrivée du changement de base, nous n'avons pas repéré de nouveau type de tâches. Toutefois les bases impliquent des bouleversements importants dans ceux qui existent : l'organisation mathématique est modifiée. En particulier, les niveaux tâches et techniques le sont nécessairement car les tâches en bases n'existaient pas avant.

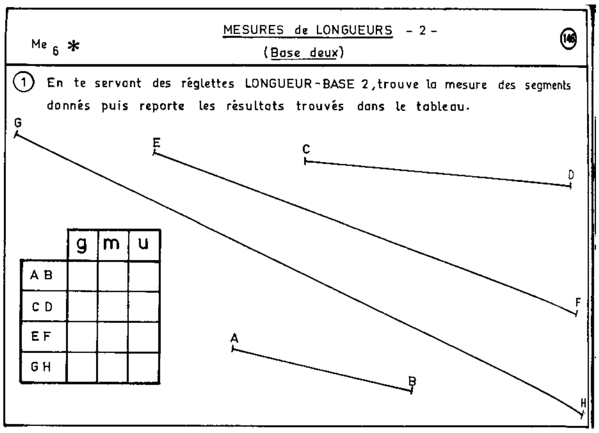
- Dénombrer

Principalement, ce type de tâches se présente « en bases » avec des collections discrètes : réelles puis dessinées, il est souvent intitulé : codage et, réciproquement, décodage. Eiller fait vivre ce type de tâches avec l'étude du système métrique, c'est à dire qu'on a, par exemple, l'étude des mesures de longueur en bases deux, trois et dix. Nous interprétons cela comme une tentative de faire vivre l'ancienne OM globale en bases.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008





(Eiller 1972, CE2, lde)

Chez Eiller et Such, on trouve d'abord la forme suivante pour ce type de tâches en bases : le maître frappe des coups, l'élève marque une croix (ou bien on a une collection de croix), il s'agit de trouver le nombre de croix. Plusieurs matériels sont envisagés pour représenter le nombre mais il semble que le point de départ est commun : on pose un cube sur chaque croix, puis on travaille avec le matériel selon ses spécificités et la base choisie. À cette époque de nombreux matériels pédagogiques apparaissent dans les livres (dans celui du maître en particulier). Dans nos manuels, c'est à cette période que nous voyons apparaître pour la première fois la distinction entre « échanges » et « groupements » dans l'étude de la numération. Eiller et Such les distinguent dans l'étude de la numération mais les distinctions ne sont pas vraiment identiques.

À l'écrit, Eiller propose deux représentations des échanges (la première en barrant des jetons et en les remplaçant par d'autres d'un type différent, la seconde en arbre), Such n'en propose aucune. Un des objectifs de Such consiste à montrer que le nombre ne dépend pas du matériel utilisé, elle utilise les mots « grouper » et « échanger » selon les matériels :

- étant donnée une base, on entoure les croix avec des feutres de couleurs différentes selon l'ordre du groupement quand on code une collection ; les petits cubes se groupent en s'emboîtant pour former des barres, les barres se juxtaposent pour former des plaques, les plaques s'empilent pour former des gros cubes), etc.,
- le matériel multibase – dans différentes bases – s'échange : des cubes contre une réglette, des réglettes contre un carré, etc. ; les jetons de couleur s'échangent aussi, pour une base donnée, selon une règle dépendant de leur couleur : 3 bleus contre 1 rouge, 3 rouges contre 1 jaune, etc.

Nous n’avons pas consulté le livre du maître de Denise & Polle (CE1, 1971). Dans le livre de l’élève seule une sorte de matériel multibase est représentée ainsi que la monnaie, de même au CE2. Il n’y a pas d’allusion aux échanges et groupements au CE2. Dans Eiller, toute pratique sociale relative au travail de ce premier type de tâches a disparu, y compris la monnaie. Such conserve la monnaie pour les nombres de 2 et 3 chiffres (en 1970, il n’y plus de billets de 1000 F).

Cette tâche se décline aussi sous une forme nouvelle : il s’agit, pour de petits nombres, d’écrire le nombre d’objets sous une forme additive. On a deux ou trois petits tas d’objets (moins de dix objets par tas) et il s’agit d’écrire que le nombre d’objets est la somme du nombre d’objets de chacun des tas (le calcul n’étant pas toujours demandé). Dans Eiller comme dans Such, elle est présente de façon précoce, avant le travail en bases.

Chez Eiller, on voit apparaître, pour le travail en base dix, l’abaque à tiges. Lorsque l’abaque a deux tiges, on demande aux élèves de créer une collection équivalente à ce que représente l’abaque (Eiller CE2, ldm, p. 122). Quand l’abaque a quatre tiges, on donne des règles d’échanges entre « tiges » mais on n’évoque pas une éventuelle collection (Eiller CE2, ldm, pp. 123-124). On travaille directement sur le matériel. Le matériel se met à représenter le nombre et non plus une grandeur qu’on aurait dénombrée (ou mesurée), même si on peut en inférer une. Il nous semble que l’apparition de ce phénomène est remarquable. Il n’apparaît qu’en base dix, probablement parce que les collections seraient trop grosses pour être manipulées, mais il créée une rupture avec les autres tâches dans lesquelles le matériel réfère toujours à une collection.

- Dire un nombre écrit en chiffres

A l’époque de la réforme, ce type de tâches est limité à la base dix. Il peut arriver en fait qu’il se présente pour les nombres « en bases » mais il s’agit alors d’égrener les noms des chiffres (puisqu’au cours élémentaire, en tout cas, il n’est jamais question de base plus grande que dix on utilise les noms usuels des chiffres). On égrène de gauche à droite les chiffres (comme quand on lit les nombres). Nous signalons néanmoins que cette numération orale est une numération de position dans laquelle les ordres les plus petits sont donnés en dernier. Il faut reprendre les chiffres dans l’ordre inverse de celui qui est énoncé pour attribuer à chaque chiffre la valeur qui est la sienne.

Signalons l’évolution du commentaire du livre du maître d’Eiller entre le CE1 paru en 1973 et le CE2 paru en 1974 :

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

> « Ainsi , dans l'écriture 231 (base dix),
> - 1 représente le chiffre des unités
> - 3 représente le chiffre des dizaines
> - 2 représente le chiffre des centaines.
>
> Le symbole 231 ne se lit « deux cent trente et un » qu'en base dix.
>
> En base quatre, on a l'habitude de lire : *deux-trois-un*, base quatre et d'écrire : $(231)_4$ ou $\underline{231}_4$ ou encore (231) base quatre.
>
> Sans doute serait-il préférable de dire : « deux objets de rang deux ; trois objets de rang un ; un objet de rang zéro ». Mais une telle dénomination n'est guère élégante, et elle est surtout trop longue. »

Un an plus tard, en 1974, pour le niveau CE2, la dernière phrase a disparu. Le paragraphe concernant la désignation des rangs en base a donc été coupé. Peut-être s'agit-il d'un assujettissement aux instructions officielles. Cette désignation correspond pourtant à la numération en unités, sans qu'on ait de nom pour les unités.

Tous nos manuels proposent de lire et écrire des nombres en base dix. Dans le livre du maître, Such s'appuie nettement sur la technologie classique qui fait appel à la numération en unités. Eiller n'indique rien de spécifique à ce propos, néanmoins, il est assez clair que le commentaire que nous venons de signaler est le signe de la même technologie. Quant à Denise & Polle (ldm CE2, 1972, p. 3), il indique :

> « Au C.P., compte tenu des différentes bases employées, la lecture d'un nombre de 2 chiffres en base dix se fait d'abord de façon simplifiée (et très suffisante) : 8 dizaines pour 80. A partir du C.E.1 on introduit les appellations traditionnelles, plus commodes dès qu'il y a 3 chiffres. Les seules difficultés apparaissent pour les nombres inférieurs à 100, ensuite la logique reprend ses droits. Il s'agit surtout bien sûr de 70, 80, 90. Si cela n'a déjà été fait on pourra signaler : septante, octante ou huitante, nonante. »

Il nous semble que ce petit texte véhicule clairement l'idée que la numération orale dérive de la numération en unités (appelée ici *numération simplifiée*), il s'agit donc de la technologie classique. Elle n'est visiblement pas mise en cause.

Dans nos trois manuels, on voit que la technologie pour la numération orale est celle de l'OM classique, même s'il est clair qu'une difficulté du travail avec les bases est que l'oral n'y vit pas. On peut notamment penser que dans l'OM classique la numération orale joue un rôle dans les conversions notamment.

- La suite écrite et l'ordre

Eiller et Such font écrire la suite des nombres en base. Si la conclusion de l'activité amène notamment à une technique relative à la régularité des suites chiffrées en base : « la suite des chiffres de chaque type de groupement forme un algorithme répétitif » (Such, ldm, p. 35), la technologie utilisée est très nettement constituée par un travail de codage des groupes d'objets. Il s'agit de dessiner des croix et de coder le nombre de croix au fur et à mesure, en

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

base trois, dans un tableau dont les libellés de colonnes sont : gr 3, gr 2, gr 1, Unités. On écrit en parallèle les noms des nombres en base trois : zéro, un, deux, un zéro, un un, un deux, etc.… On retrouve donc la technologie classique, qui s'appuie sur les objets, sans passer par les unités de la numération en base dix, mais les « gr » sont censés jouer ce rôle. D'ailleurs on ne demande pas d'écrire avec la numération positionnelle, on reste dans le tableau, on y écrit d'ailleurs les zéros :

Base trois	gr 3	gr 2	gr 1	Unités	Lecture du nombre
				0	zéro
×				1	un
×				2	deux

Dessinons une autre croix. La base étant trois, il est nécessaire de faire un groupement. Que va-t-on inscrire?

1 dans la colonne des « gr 1 » et 0 dans la colonne des unités, et ainsi de suite...

(Such CE2, ldm, p. 34-35)

Base trois	gr 3	gr 2	gr 1	Unités	Lecture du nombre
				0	zéro
				1	un
				2	deux
			1	0	un zéro
			1	1	un un
			1	2	un deux
			2	0	deux zéro
			2	1	deux un
			2	2	deux deux
×		1	0	0	un zéro zéro
×		1	0	1	un zéro un
		1	0	2	un zéro deux

N.B. — Expliciter la lecture : un zéro un, c'est-à-dire : un groupement 2, zéro groupement 1, une unité.

Le type de tâches existe donc en base mais son pas est toujours 1.

Au moment de la réforme, il peut arriver que la comparaison soit proposée en bases. On demande aussi de comparer des collections (mais rarement pour les nombres de 3 chiffres ou plus). Chez Eiller, on retrouve en bases quand il s'agit de comparer des nombres, ce que nous avons dit pour la base dix et la tâche dénombrer. On travaille directement avec l'abaque sans reconstituer la collection. (Eiller CE2, ldm, p. 132)

- Les conversions

Nous allons voir que la question des conversions, homogène dans la période classique, se scinde en plusieurs problématiques avec l'apparition des bases. Nous en avons repéré trois :

- la manipulation en bases,
- les unités de la numération et les techniques opératoires en base dix,
- le « nombre de » (ou la propriété de la troncature).

Pour la période des maths modernes, nous n'avons pas étudié les conversions dans le système métrique.

En bases, les manipulations pour comprendre les conversions

Au moment de la réforme, la question des relations entre unités se pose dans toutes les bases. Paradoxalement, elle est alors totalement simplifiée puisque deux groupements consécutifs sont dans le rapport de la base (un groupement d'ordre n = a groupements d'ordre n-1). Les

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

relations en base sont énoncées en tant que règles d'actions à propos des différents matériels : « grouper ces cubes par quatre en formant des baguettes, … », « pour chaque groupe de quatre cubes faire l'échange contre une baguette de même longueur… », « entourer quatre groupements rouges à l'aide d'un feutre bleu… » (Such, ldm, p. 22). Dans toutes ses éditions le livre du maître de Math et Calcul (Eiller) parle de « la règle des groupements (ou des échanges) successifs et obligatoires ». En base dix, les relations entre unités se formulent avec des mots différents selon l'ordre considéré (par exemple, une dizaine=dix unités et une centaine = dix dizaines) ; « en bases », il n'y a que le « numéro » de l'ordre qui change. Les relations entre unités sont explicitées dans le livre de l'élève lorsqu'il y a une leçon. A défaut, elles le sont dans le livre du maître. Dans l'ensemble, en bases, les tâches de conversion sont prises en charge par les manipulations et les dessins. Dans Eiller, Such et Denise & Polle, nous n'avons pas repéré de conversions dans le registre des unités de la numération, en base dix donc, pour les leçons de numération.

En base dix, parfois la numération en unités, parfois la numération positionnelle pour comprendre les techniques opératoires

En fait, les unités de la numération apparaissent quelquefois avec les techniques opératoires, toujours dans le livre du maître (sans reprise dans celui de l'élève). Par exemple, voici le début de la leçon pour l'étude de la « multiplication en base dix » dans le livre du maître de Such après que la technique a été étudiée en bases :

> I. Calculer
>
> 1° 2×2 2×3 3×2 4×2 3×3
>
> 2° 2×5 6×2 7×3 8×4 9×4
>
> Dans tous les cas, expliciter le résultat obtenu en demandant de donner le nombre d'unités et de dizaines.
>
> 3° 2 fois 5 dizaines : 10 dizaines ou 1 centaine
>
> 3 fois 6 dizaines : 18 dizaines ou 1 centaine 8 dizaines

Le livre du maître détaille ensuite la technologie en base dix.

> II. Faire des multiplications en suivant la même démarche que pour les multiplications en différentes bases (sans le matériel).
>
> 1° Commencer par une seule retenue. 223×4
>
> Lire :
>
> 4 fois (2 centaines, 2 dizaines, 3 unités),
>
> 4 fois 3 unités : 12 unités : 1 dizaine 2 unités (…)
>
> 2° 758×3
>
> Lire :

3 fois 8 unités : 24 unités : 2 dizaines 4 unités.

3 fois 5 dizaines : 15 dizaines : 1 centaine 5 dizaines.

3 fois 7 centaines : 21 centaines : 2 mille 1 centaine.

	m	c	d	u
×3		7	5	8
			2	4
		1	5	
	2	1		
	2	2	7	4

Accélération de la présentation :

3 fois 8 unités : 24 unités : 2 dizaines 4 unités, 4 unités que je marque et 2 dizaines que je retiens.

3 fois 5 dizaines : 15 dizaines : 5 dizaines que j'ajoute aux 2 retenues soit 7 dizaines et 1 centaine que je retiens.

3 fois 7 centaines : 21 centaines : 1 centaine que j'ajoute à celle retenue soit 2 centaines et 2 mille.

3° Faire d'autres exercices semblables.

4° Se passer du tableau.

Dans Such, la technologie de la « multiplication en base dix » repose donc explicitement sur les conversions. On remarque néanmoins l'absence de symboles opératoires dans le registre de la numération en unités : on demande de « lire » et non d'écrire, on écrit les mots « fois », « ajoute » et le signe « : » pour ×, + et =. Sans doute s'agit-il de ne pas corrompre le langage mathématique par le langage usuel, c'est ainsi que « 5 dizaines×2=10 dizaines=1 centaine » apparaît proscrit. On remarque aussi qu'il s'agit de « suivre la même démarche que pour les multiplications en différentes bases (sans le matériel) ». Ceci est assez significatif pour notre propos : en bases, le matériel prend en charge les conversions. (En bases, pour la multiplication, le manuel préconise de faire d'abord les opérations sur le matériel puis de « refaire des opérations en essayant de se passer du matériel, les manipulations et échanges étant expliqués et non réalisés. ») Lorsqu'on utilise le registre symbolique de la numération en unités, c'est qu'on travaille en base dix et qu'il n'y a pas de matériel à évoquer.

Pour la technique opératoire de l'addition et de la multiplication, Eiller évite le recours à la numération en unités, nous allons voir comment ; pour celle de la soustraction, on retrouve un phénomène du genre de celui repéré dans Such.

Commençons par la technique opératoire de l'addition. Dans la partie « indications théoriques », à destination exclusive du maître donc, on a d'abord un exemple avec du

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

matériel (en base six), cet exemple est « traduit » dans le registre symbolique avec la notation exponentielle (des puissances de 6) et des factorisations pour faire apparaître la « retenue » :

D Techniques opératoires

① ***Remarques préliminaires***

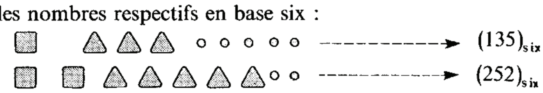
Nous avons défini l'addition *sans recourir à une technique de calcul.* Sur le plan mathématique, il est d'ailleurs souvent aussi intéressant d'utiliser des écritures du type 413 + 378 que celle de la somme effectuée 791 (base dix). Mais, dans la vie courante, il est bien sûr indispensable, dans la plupart des cas, de connaître le « total » sous forme « condensée ». A cet égard, un des intérêts majeurs d'une numération de position est de permettre de calculer assez aisément des sommes ou des produits, par exemple. Mais il ne faudrait pas que les procédés de calcul, en général assez faciles, cachent la réalité mathématique sous-jacente.

Dans le cas particulier de l'addition, nous allons voir, sur un exemple, qu'une pratique réputée très simple repose en fait sur des notions très « élaborées ».

② ***Exemple***

◇ Nous allons opérer en base six et adopter les règles d'échange suivantes :

Considérons les deux ensembles suivants dont nous « codons » les nombres respectifs en base six :



On réunit ces deux ensembles. Peut-on écrire le nombre total sous la forme (387) ?

Évidemment non, les règles de la numération en base six nous obligeant à faire les échanges convenables, nous obtenons alors le « résultat » suivant :

dont le code correspondant est $(431)_{six}$

D'où : $(135)_{six} + (252)_{six} = (431)_{six}$

◇ Traduisons maintenant la situation sur le plan mathématique :

On a : $(135)_{six} = 1 \times 6^2 + 3 \times 6^1 + 5 \times 6^0$

$(252)_{six} = 2 \times 6^2 + 5 \times 6^1 + 2 \times 6^0$

et : $(135)_{six} + (252)_{six} = (1 + 2) \times 6^2 + (3 + 5) \times 6^1 + (5 + 2) \times 6^0$

$= 3 \times 6^2 + (6 + 2) \times 6^1 + (6 + 1) \times 6^0$

$= \underbrace{3 \times 6^2 + (1 \times 6^2)} + \underbrace{(2 \times 6^1) + (1 \times 6^1)} + \underbrace{(1 \times 6^0)}$

$= \mathbf{4} \times 6^2 + \mathbf{3} \times 6^1 + \mathbf{1} \times 6^0$

Ce qui s'écrit en condensé : $(135)_{six} + (252)_{six} = (431)_{six}$

On pressent que les besoins trophiques ne sont pas accessible au CE2. Peut-être est-ce pour cette raison qu'on peut lire en commentaire de ce développement :

> Dans ce calcul, on a utilisé non seulement l'addition dans ℕ mais également la multiplication et l'exponentiation. De plus, on s'est servi de l'associativité de l'addition et surtout de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Et tout cela pour trouver un résultat obtenu très « simplement » grâce au procédé des échanges successifs (c'est-à-dire de la numération de position).

Dans la partie « applications pédagogiques », à destination du maître mais pour qu'il l'utilise dans sa classe, on propose d'abord des opérations en bases, avec le matériel, puis la question de la retenue est reprise en base dix, sous l'intitulé « explication numérique du mécanisme de la retenue » :

Soit, par exemple, à calculer 436+297

Dans un premier stade on peut écrire :

436	=	400	+	30	+	6
297	=	200	+	90	+	7
436+297	=	600	+	120	+	13

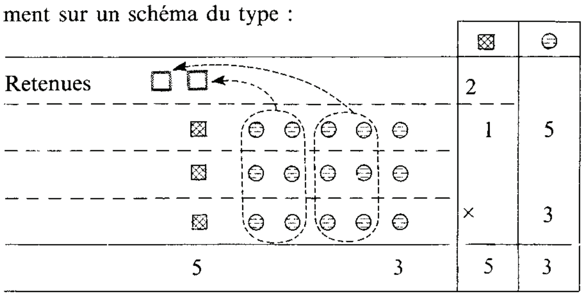
$$
\begin{array}{llrll}
\text{puis :} & & 436 & & \\
& + & 297 & & \\
\hline
& & \boxed{1}3 & \leftarrow & (6+7) \\
& + & \boxed{1}20 & \leftarrow & (30+90) \\
& + & 600 & \leftarrow & (400+200) \\
\hline
& & 733 & &
\end{array}
$$

Les chiffres entourés correspondent aux différentes retenues. On aura intérêt à faire effectuer un certain nombre d'additions de cette manière.

On voit qu'on ne fait pas appel à la notation exponentielle. Et manifestement, on se refuse à évoquer les unités de la numération. On est donc ramené à un calcul avec des écritures chiffrées, la retenue étant constituée par une partie des chiffres significatifs du nombre. Il nous semble toutefois que cette explication n'est guère satisfaisante car on indique que 30+90=120, or cette addition, comme 6+7 d'ailleurs, mobilise aussi une retenue. Le problème vient du fait que, pour « justifier » la retenue, on a besoin de compter chaque type d'unités. Ceci est réalisable avec les objets, avec la numération en unités et avec les exponentielles. Avec les écritures chiffrées (cf. la valence instrumentale de la numération en unités), si on veut dire avec des mots ce qui se passe par rapport aux objets on est ramené à utiliser la numération en unités, sinon on utilise un algorithme de calcul positionnel (on doit aussi utiliser des mots d'ailleurs si on veut le décrire mais ces mots peuvent référer à une position). La démarche est sensiblement identique pour la technique opératoire de la multiplication où on assiste là aussi à une rupture entre la manipulation en bases et les tâches proposées dans le livre du maître pour la base dix. En bases, on fait des additions itérées sur du matériel, en base dix on fait des décompositions avec des écritures chiffrées sans utiliser les unités de la numération.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

◇ Traduire les différentes opérations effectuées précédemment sur un schéma du type :



■ Faire calculer de la même manière : 123 × 4

Remarque : Au cours élémentaire 2, on peut effectuer directement ce type de calcul en utilisant une table de Pythagore préalablement construite.

En base dix

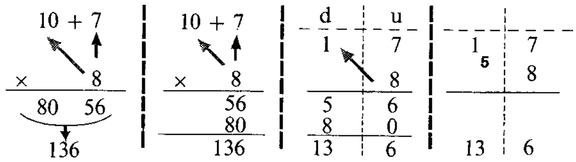
La technique des additions successives peut évidemment être utilisée bien que son intérêt ne soit pas toujours évident.

Technique usuelle

Pour assurer une bonne compréhension de cette technique, il nous semble indispensable d'envisager un certain nombre de démarches mettant en évidence l'utilisation des propriétés de la multiplication.

Rappel de la multiplication par un nombre d'un chiffre

■ Sur un exemple (17 × 8) nous proposons une progression indiquant les démarches successives :



■ Lorsque le multiplicande comprend plus de deux chiffres, on peut envisager une progression analogue à celle décrite ci-dessus. On pourra adopter la disposition ci-contre.

1 2 4	
× 7	
2 8	(7 × 4)
+ 1 4 0	(7 × 20)
+ 7 0 0	(7 × 100)
8 6 8	

(Eiller CE2 1974, ldm, p. 176-177)

Pour la soustraction, on voit apparaître dans les applications pédagogiques une « chanson » pour la technique opératoire. Il faut calculer 63-35.

> On *énonce*
> - 3 moins 5, « ça ne va pas »
> - je « donne » : 10 unités au premier nombre, 1 dizaine au second.
> - 13 moins 5 égale 8. 6 moins (3+1) égale 2.

Il nous semble que ces éléments sous-entendent qu'au mieux les conversions en numération en unités peuvent être utilisées à l'oral. Ils montrent aussi qu'il est difficile de s'en passer dans les techniques opératoires mais Eiller essaie.

Le nombre de

Venons-en à notre type de tâches « nombre de ». Dans (Denise et Polle, CE2), dès 1972, on trouve un exercice explicitement sur le thème *chiffre des* / *nombre de* pour les nombres de trois chiffres en base dix (appuyé par une représentation de matériel multibase). Il y aussi un problème de nombre de francs à quatre chiffres à faire en billets de 100 F à partir de 1977.

Dans (Eiller, 1974), la part réservée au travail en base dix est extrêmement réduite. Le livre du maître précise qu'il ne développe pas de leçon contrairement à ce qu'il fait pour les bases (cette remarque peut aussi être interprétée comme le signe que les enseignants savent ce qu'ils doivent faire quand ils travaillent en base dix). Il préconise quelques types de tâches (c'est nous qui soulignons) :

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

> « Nous ne développerons pas ici une leçon sur la base dix. Nous donnerons essentiellement des indications pédagogiques et des séries d'exercices relatifs à cette base. À cet égard, on proposera :
> - des exercices de codage (oral, littéral, chiffré), ceux-ci visant à familiariser les élèves avec les puissances successives de 10 qui ont ici l'avantage de porter un nom : dizaine, centaine, mille…
> - des exercices de décodage qui ont pour but de faire analyser par les élèves l'écriture d'un nombre donné en base dix et en particulier de leur faire préciser le rôle joué par chacun des chiffres. Ces exercices viseront également à faire constituer des collections d'objets dont le nombre est codé en base dix. À cet égard, il convient de souligner les difficultés éprouvées par les enfants, d'une part, pour *dénombrer* correctement une collection comprenant plus d'une centaine d'objets et, d'autre part, pour *imaginer* ce que « représente » un nombre supérieur à 1000.
> - Quelques exercices concernant la numérotation (aspect ordinal du nombre) et la comparaison de nombres. Ces deux rubriques seront développées d'une manière plus approfondie dans la seconde partie de ce chapitre. »

Vers la fin des « exercices de dénombrement et de codage » (uniquement dans le livre du maître, p. 123), sous l'intitulé « Autre exercice », on a à deux reprises, pour les nombres de 0 à 1 000, puis de 0 à 10 000, un unique exercice relatif à notre type de tâches :

« Compléter le tableau suivant :

Nombre d'objets donnés	Nombres d'objets par groupe	Nombre de groupes obtenus	Reste
254	10	….	…
362	100	….	…
….	10	17	3
….	100	4	75
…/..			

»

Précisons que ce type d'exercice n'est pas proposé en bases. A priori, il est nécessaire pour l'approche des décimaux préconisée par le programme, mais nous ne le voyons pas au CE2.

Ce que nous retenons de cette période est, au CE2, la prise en charge quasi-exclusive des conversions par la manipulation, essentiellement dans les tâches de codage et décodage et leur absence dans le registre de la numération en unités. Ceci reste vrai pour l'étude des techniques opératoires, malgré quelques occurrences des conversions de la numération en base dix pour les retenues. À ce propos nous citons un extrait du livre du maître de (Denise et Polle, CE2, 1972) :

> « Les numérations non décimales, abordées au C.P., ont été largement utilisées au C.E.1 pour découvrir les techniques opératoires et bien comprendre les mécanismes en constatant qu'ils sont indépendants de la base choisie. »

Le but est donc bien de montrer la généralité des techniques opératoires, généralité qui est indépendante de la base choisie. D'une certaine façon, la généricité du travail en base s'oppose à la spécificité des unités de la numération en base dix.

Enfin, le type de tâches « nombre de » semble apparaître discrètement. Peut-être l'est-il davantage au CM que nous n'avons pas étudié. Chez (Denise et Polle), nous voyons la « dialectique » *nombre de / chiffre des*.

A ce propos signalons cet extrait de la Brochure MOTS III (APMEP, 1976, pp. 2-3). A la fin de l'introduction du mot NUMERATION, la brochure propose des « questions d'autocontrôle » (pour que les lecteurs auto-évaluent leurs connaissances). Parmi elles :

> Voici l'écriture 345 (en base dix). Quel est le chiffre des dizaines ? Quel est le nombre de dizaines du naturel ainsi représenté ?

La réponse est proposée quelques lignes plus loin :

> Chiffre des dizaines : 4. Nombre de dizaines : 34 (trente quatre). La question « Combien d'unités dans 345 ? » est ambiguë ; on devrait répondre : « trois cent quarante cinq » et non pas « Cinq ». (Le nombre des unités est trois cent quarante cinq ; le chiffre des unités est 5).

Les brochures MOTS de l'APMEP sont souvent citées dans les travaux de didactique comme une manifestation importante de l'activité de la noosphère au moment de la réforme. Ces « réflexions sur quelques mots-clés » (à l'usage des instituteurs et des professeurs ou pour l'école élémentaire selon le tome) sont pleines de préconisations et de condamnations sur les usages de la langue en mathématiques :

> Il ne s'agit pas non plus d'une codification autoritaire du vocabulaire : l'APMEP ne le peut pas et ne le veut pas. Comme dans le Dictionnaire de l'APMEP, nous nous sommes néanmoins enhardis à suggérer une certaine harmonisation, à exprimer notre penchant ou notre aversion pour certains termes. Nous souhaitons ouvrir ainsi le débat avec nos lecteurs. (APMEP, 1976, préface)

Faisant suite ou accompagnant la série de fiches « la mathématique parlée par ceux qui l'enseignent » (le « dictionnaire ») publiée par l'APMEP à partir de 1967, on peut supposer qu'elles ont eu un effet normalisateur relativement important. Faut-il voir, dans les quelques lignes publiées en 1976 la condamnation de la numération en unités, en même temps que son remplacement par la dialectique *nombre de / chiffre des* ? En effet, on énonce que la question « combien d'unités dans 345 ? » est ambiguë. Toute la numération en unités ne serait-elle pas condamnée puisqu'elle est quelquefois ambiguë, crime de la pire espèce en mathématique moderne ? Cette courte digression sur *nombre de, chiffre des* n'apparaît pas dans la fiche du dictionnaire de l'APMEP dédiée à la Numération parue en 1967 dont nous avons déjà parlé. Toutefois, ce n'est probablement pas la première fois que cette question est évoquée dans la noosphère puisque Denise & Polle (1972) utilise ces formulations et ne propose pas de conversions en unités de la numération. On peut sans doute interpréter les évolutions que nous avons signalées pour la fin de la période classique quant au type de tâches conversions, en particulier celles du manuel (Denise) dont les auteurs sont H. Denise et Rosier, comme les

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

prémisses de cette disparition (les auteurs Denise et Polle 1972 sont en fait H. et J. Denise et R. Polle).

Retenons que dans nos manuels, il semble qu'on a perdu les conversions en unités de la numération ce qui implique aussi la perte de leur diversité.

- Le calcul

Notre étude ne nous a pas permis de repérer des éléments relatifs au calcul autres que les algorithmes des opérations posées. La situation est en effet complexe à analyser car s'il semble qu'il y a peu de calcul explicitement en lien avec la numération, on trouve nombre de leçons sur les « opérateurs » qui comprennent du calcul. Nous n'avons pas davantage étudié cette question.

- Un type de tâches conjoncturel : le changement de base

Le changement de base n'est pas une pratique de la vie courante. Nous le considérons néanmoins comme un type de tâches emblématique de la numération de position. Même si notre étude n'est pas très précise sur ce point, il semble que sa durée de vie, dans l'institution école primaire, est assez courte : une dizaine d'année, la décennie 1970. Nous considérons qu'il est emblématique de la numération de position : la question de savoir si deux nombres écrits dans deux bases différentes sont égaux semble en effet se poser assez naturellement dès lors qu'on travaille dans plusieurs bases. Signalons que ce type de tâches n'apparaît pas explicitement dans les programmes. C'est un type de tâches collatéral du travail en base.

Nous indiquons l'organisation didactique qui accompagne ce type de tâches.

Nous avons repéré des tâches de changement de base au CE2 dans (Eiller, 1974) et (Such, 1977, lde, p. 71). Denise & Polle (1972) n'en propose apparemment pas à ce niveau. Dans les deux manuels qui en proposent, une organisation mathématique (OM) est mise en place dès le début de l'année pour traiter cette tâche. Il s'agit d'abord, d'après une collection d'objets répartie en plusieurs « paquets », d'écrire la somme qui donne le nombre d'objets (éventuellement plusieurs sommes pour la même collection décomposée de plusieurs façons) – cette tâche a déjà été évoquée. Eiller demande en outre d'associer des produits à des collections d'objets organisées en « paquets » égaux. Ensuite, on code dans des petites bases le nombre d'une collection d'objets en utilisant les groupements (ou échanges) successifs. Such propose de coder une même collection dans différentes bases ou de comparer des nombres écrits dans différentes bases après décodage et réalisation de deux collections par

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

correspondance terme à terme. Enfin, on relie les deux tâches : étant donné un nombre écrit en base, on demande de l'écrire en base dix. Cette tâche peut être médiatisée (dans Eiller) à l'aide d'un « tableau de numération » d'un type particulier. Les libellés des colonnes sont des dessins d'objets. Ce tableau permet d'obtenir à partir de l'écriture chiffrée d'un nombre en base six, par un calcul, l'écriture positionnelle en base dix de ce nombre. Par exemple :

x x x x x x	x
3	5

> Les élèves pourront proposer :
>
> | | | |
> |---|---|---|
> | | (6+6+6)+5=23 | (1) |
> | ou : | (6×3)+5=23 | (2) |
> | ou encore : | (3×6)+5=23 | (3) |
>
> L'écriture (2) indique bien que l'on dispose de 3 ensembles comprenant chacun 6 éléments. On adoptera pourtant, ici, l'écriture (3) qui correspond au « développement polynomial » de l'écriture $(35)_{six}$.

C'est seulement après ce travail qu'apparaissent les sommes avec les écritures chiffrées des puissances de dix (en base dix) du type 628=6×100+2×10+8. Ces sommes qu'Harlé recherchait au début du siècle..

Dans Such (ldm, pp. 136-137), on a :

> I Travail par groupes. Donner des nombres à chaque groupe.
>
> EXEMPLE :
>
> Groupe I et groupe IV : base trois 211, 122, 221, 202
>
> Groupe II et V : base quatre 112, 101, 121, 110. (…)
>
> 1° Les groupes doivent représenter chacun des nombres donnés à l'aide du matériel. (…)
>
> 2° Les nombres proposés à tous les groupes sont-ils différents ? sont-ils égaux ? Comment le savoir ?
>
> On proposera peut-être de décoder, puis de faire une correspondance terme à terme (comme au début de l'année). Demander plutôt de comparer ces nombres sans manipulation.
>
> Les enfants seront amenés à découvrir que, par exemple :
>
> 121 en base quatre représente :
>
> 1 unité, 2 réglettes et 1 carré
>
> Or une réglette vaut quatre unités, un carré vaut quatre réglettes ou quatre fois quatre unités, ou seize unités.
>
> Remarque : seize est le carré de quatre.
>
> 121 représente (en base quatre) :
>
> 1 plus 2 fois quatre plus 1 fois le carré de quatre
>
> 1 + (4×2) + (16×1) = 1 + 8 + 16 = 25
>
> 3° Chaque groupe effectue alors ces calculs pour les quatre nombres écrits et représentés.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Comparaison au niveau de la classe.

Les quatre nombres étaient : 22, 17, 25, 20 (base dix).

II En base dix que signifie l'écriture 345 ?

5 unités 4 dizaines 3 centaines

donc

5 + 4 fois dix + 3 fois cent (lire)

5 + (10×4) + (100×3) (écrire)

Que représente une centaine ? Dix dizaines ou le carré de dix. Décomposer ainsi individuellement ou par groupes, divers nombres à 3 chiffres en choisissant des cas où figurent un ou deux zéros.

Dans le livre de l'élève (p. 71), les indications sont plus sommaires et on travaille d'abord en base dix :

3. En base dix : 1246 = (1×1000) + (2× .) + (4 × .) + 6

= 1000 + . + . + .

Complète puis décompose de la même manière :

3504 ; 2892 ; 7220 ; 5281 (…)

4. Écris en base dix les nombres donnés dans les bases suivantes :

base cinq	base quatre	base deux
43 ; 204 ; 3210 (…)	120 ; 3000 ; 2133 (…)	111 ; 1010 ; 1101 (…)

Remarquons que, dans le livre du maître de Such à propos de la base dix, la décomposition utilisant les produits avec les puissances de dix fait suite à l'expression du nombre dans la numération en unités. On a donc l'ordre suivant : écriture chiffrée qui s'interprète en numération en unités qui se traduit par un calcul (qu'il ne s'agit pas d'effectuer). On est donc assez proche de l'OM classique.

4.3. Apparitions – disparitions

- À propos des pratiques sociales.

Comme nous le pressentions, les exercices qui impliquent des pratiques sociales en base sont rarissimes dans les manuels et ceux qu'on trouve nous paraissent un peu ridicules mais il faut bien avoir en tête la complexité de la tâche assignée aux auteurs de manuels. On trouve par exemple dans le livre du maître de Such (Groupements en base. Codage et décodage, p. 33) :

IV Problèmes

a) Pierre dit « J'ai 1 3 2 billes ».

Jean dit « J'ai 1 3 2 billes ».

Ont-il autant de billes ? Pourquoi ?

b) Pierre dit « J'ai 1 3 2 billes en base quatre ».

Jean dit « J'ai 1 3 2 billes en base trois ».

Ont-il autant de billes ? Pourquoi ?

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

c) Pierre dit « J'ai 1 3 2 billes en base quatre ».

Jean dit « J'ai 1 3 2 billes en base quatre ».

Ont-il autant de billes ?

Conclusion.

Dans les livres de CE2 on trouve quelques exercices en base dix qui impliquent des pratiques sociales, plus courantes : « études de situations » (Such), « problèmes et schémas » (Eiller) et « problèmes » (Denise & Polle). Les indications pour l'étude sont en général très sommaires (voire inexistantes). Signalons aussi que Such propose un problème avec des liasses de 10 billets de 100 F dont une partie se prête tout à fait à un traitement par la numération, avec comme seule indication pour le maître :

> **Additions, soustractions et multiplications. Messages. Études de situations**
>
> Révision des techniques opératoires étudiées.
>
> Messages ou problèmes choisis dans le livre de l'élève.

Denise & Polle (CE2, lde, p. 35, cahier 1) propose au moins un exercice de numération : « L'école a reçu 3 paquets de 1000 feuilles et 7 paquets de 100 Feuilles ». La consigne générale est :

> « Pour chaque énoncé écris une solution avec une ou plusieurs additions : commence par dire ce que tu peux calculer, quand ce n'est pas demandé »

et le livre du maître ajoute :

> Des énoncés apparaissent, un peu plus fréquemment qu'au CE1 : chacun présente, en termes simples, une situation qui sera mathématisée. (…) C'est le domaine d'application des opérations mettant en évidence l'intérêt des techniques étudiées.

On ne voit pas de rubrique spécifique relative aux problèmes de numération, même si on en trouve quelques uns.

- Échanges et groupements

Dans nos manuels, c'est à cette période que nous voyons apparaître pour la première fois la distinction entre « échanges » et « groupements » dans l'étude de la numération. Plus précisément, nous avons trouvé l'évocation d'échanges dans Marijon 1947 mais il s'agissait de résoudre des problèmes de valeurs marchandes dans lesquels on échangeait un certain nombre d'unités d'une marchandise à un certain prix contre un autre type de marchandise à un autre prix en un autre nombre.

Il nous semble important de préciser que, pour nous, lorsqu'on parle d'échange, il ne peut s'agir que de la grandeur « valeur », la monnaie constituant un matériel emblématique de cette grandeur. Il nous semble que pour les grandeurs « matérielles » : que ce soit des collections discrètes, la longueur, la masse ou la capacité, il n'y a pas d'échange car il n'y a pas de « valeur ». 1 décamètre ne s'échange pas contre dix mètres, un décamètre c'est dix mètres. Un décamètre et dix mètres ont la même longueur mais il y a plusieurs façons d'exprimer cette longueur, plusieurs unités sont possibles. Il y a aussi plusieurs façons de fabriquer un représentant de cette longueur : prendre une ficelle d'un mètre, mettre bout à bout dix morceaux d'un mètre, quoi qu'il en soit, la longueur est la même. La question de l'échange apparaît quand la grandeur est la « valeur » et que cette valeur est représentée par un matériel, c'est-à-dire au niveau des objets, alors que la valeur n'est pas une grandeur accessible avec nos sens.

- La décomposition polynomiale

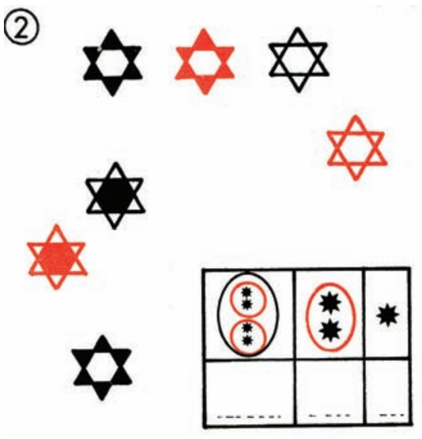
La décomposition polynomiale apparaît mais elle a le statut que nous avons indiqué à propos du changement de bases. En effet, dans les livres pour l'élève, nous la rencontrons seulement avec les tâches relatives au changement de base que nous avons évoquées précédemment. Nous avons d'ailleurs indiqué que dans Such c'est la décomposition polynomiale qui découle de la numération en unités et non l'inverse. Dans Eiller, la situation semble un peu différente car le livre du maître propose une théorie de la numération tirée des décompositions polynomiales mais qui n'inclut pas la numération orale.

- Ostensifs

Nous avons indiqué que la tâche « dénombrer » est essentiellement travaillée en base par des activités de codage et décodage. Cette tâche fait apparaître un ostensif qui n'est pas nouveau mais semble devenir indispensable. Il s'agit du tableau de numération, c'est un intermédiaire entre les objets et l'écriture chiffrée du nombre. Les noms des unités de la numération n'étant pas disponibles en base, il semble qu'on essaie de trouver des solutions.

En base, Eiller fait coder des collections et poser des opérations dans des tableaux dont les libellés des colonnes sont les dessins des objets alors que pour la base dix, on retrouve centaines, dizaines et unités.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008



Eiller, CE1, ldе

Such fait travailler avec plusieurs matériels simultanément pour pouvoir proposer un tableau indépendant du matériel. Il s'agit d'écrire, en bases, le nombre de coups que le maître a frappés dans ses mains. (ldm, p. 23)

> Choisir une base commune à toute la classe (exemple ; quatre).
>
> Donner les consignes [de groupement ou d'échange selon le matériel] à chaque groupe (…)
>
> Chaque groupe suit les consignes qui le concernent et le responsable du groupe donne le résultat.
>
> Par exemple :
>
> 1 jeton jaune, 2 jetons rouges, 3 jetons bleus
>
> 1 carré, 2 baguettes, 3 unités (…)
>
> 1 groupement bleu, 2 groupements rouges, 3 croix isolées.
>
> Les résultat ne seront peut-être pas tous écrits dans cet ordre. Les analyser et arriver à l'idée d'un tableau identique pour tous dans lequel on inscrit ce résultat.
>
> *EXEMPLE* :

gr. 2	gr. 1	unités

> (gr. = groupement)

De façon assez systématique Such travaille d'abord avec le matériel, en bases, puis on évoque le matériel (avec les mots « réglettes », « carrés », etc.), puis

> « Lorsque les enfants commencent à se débarrasser du matériel, on passe à la base dix.
>
> Donner alors des opérations en base dix et bien expliquer la technique. » (ldm, p. 81, technique opératoire de la soustraction)

Il n'y a pas d'indication supplémentaire sur la technique en base dix.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

- Décomposer, recomposer un nombre

Le type de tâches « recomposer, décomposer » un nombre n'apparaît pas dans les manuels que nous avons consultés. On trouve seulement la relation entre objets et tableau et le tableau donne directement l'écriture chiffrée du nombre. L'ostensif numération en unités est évoqué dans le livre du maître d'Eiller pour décomposer recomposer un nombre mais on ne le voit pas dans les pages du livre de l'élève. On voit apparaître pour les technologies de la technique opératoire de la multiplication en base dix notamment une décomposition avec les écritures chiffrées du multiplicande.

- Naturalisation de la numération orale

À propos de la numération orale, nous identifions un phénomène. Comme on le voit par exemple dans Such (CE1, ldm), dans la brochure MOTS III, la numération orale est considérée comme la langue de communication.

> « Par exemple travaillons en base quatre et dessinons vingt-deux croix, soit 112. » (Such, ldm CE1, p. 73)
>
> « *Neuf* existe-t-il en base *sept* ? (…) S'il s'agit du nombre neuf, la réponse est *oui* : le nombre *neuf* existe indépendamment de son écriture : et on peut le représenter dans n'importe quel système de numération.
>
> S'il s'agit du chiffre « neuf », la réponse est *non*. » (brochure MOTS III, pp. 8-9)

On voit que quatre, vingt-deux, neuf et sept sont utilisés pour présenter le travail à faire, poser les questions. Que penser de « le nombre *neuf* existe indépendamment de son écriture » ? Si on écrit neuf autrement que neuf, neuf existera-t-il encore ? La numération orale utilisée est spécifique de la base dix. Ce phénomène, qui rend les énoncés paradoxaux, est évoqué dès le début du MOT « numération » :

> « […] au cours de [la construction expérimentale de l'ensemble N] certains naturels ont reçu un nom (zéro, un…, douze …) ou ont été représentés par un graphisme conventionnel (17, 23, 8…) ; mais à aucun moment les conventions de cette langue, parlée ou écrite, n'ont été explicitées. »

Aussi, bien que justifiée à certains moments sur le plan théorique, la numération orale (voire la numération chiffrée en base dix pour les petits nombres) semble à d'autres moments transcender le principe qu'une numération est relative à une base, elle est presque naturalisée.

4.4. Conclusions

En fait, il nous semble que les technologies de l'OM classique sont maintenues dans les tâches « dénombrer », la suite écrite, les noms des nombres… Pour les techniques opératoires,

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Eiller veut y échapper mais ce n'est pas très satisfaisant. Il se réfère plutôt à la décomposition polynomiale qui n'est pas facile à utiliser en primaire.

Dans le même temps, on note une forte perte d'influence de la numération en unités pour plusieurs raisons sans doute, notamment :

- il peut y avoir une perte de légitimité « mathématique » (elle semble être réservée à l'oral « langue courante », elle est « ambiguë »),
- elle n'existe qu'en base dix alors que la plus grande partie de l'étude des nombres et des opérations se fait en bases ceci implique que les niches où elle peut intervenir sont réduites, c'est un problème de chaîne trophique,
- les programmes de 1970 s'inscrivent dans un renouvellement des théories de l'apprentissage de référence, on peut supposer qu'il y a parfois une croyance dans la toute puissance des manipulations qui sont possibles dans les petites bases et difficiles en base dix (à cause de la taille des collections), mais qui sont possibles aussi dans le système métrique pour les grandes « collections » (ou les grandeurs mesurées par des nombres de 3 chiffres ou plus) mais il y a une péjoration du continu dans le programme,
- il y a des tentatives de trouver une numération en unités pour les bases mais elles semblent peu viables (en plus, elles ne sont pas uniformisées : groupement d'ordre n, objet de rang n. Sans compter que le premier chiffre est désigné dans Such par les « unités » et dans Eiller par les « objets de rang 0 ». Eiller parle de groupements du 1er ordre, d'ordre 2 mais il semble que ce soit pour désigner les « groupements » par opposition aux échanges pour lesquels il n'utilise pas de mot : on n'a pas les *échanges du 1er ou 2ème ordre*)
- utiliser les unités de la numération suppose de montrer la spécificité de la base dix, c'est à l'opposé des buts poursuivis par la réforme.

Les conversions sont très maltraitées : la problématique est « saucissonnée ».

- Pour « comprendre l'écriture des nombres », on utilise les manipulations en base et les relations entre les unités se réalisent sur ces manipulations.
- Quand il s'agit de résoudre des problèmes de conversions, c'est en fait le « nombre de » qui est utilisé avec la propriété de la troncature. Dans nos manuels elle n'est pas toujours travaillée. Si elle est travaillée, c'est en base dix et elle peut n'être pas mise en avant.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

- Dans les techniques opératoires, on observe une certaine présence des unités de la numération. Parfois elles sont « remplacées » par les écritures avec « zéros ».

Enfin, nous avons noté une très grande faiblesse des manipulations dans le registre symbolique, en particulier le type de tâches « décomposer – recomposer » semble avoir plus ou moins disparu.

On peut penser qu'on est en présence d'une très grande diversité de pratiques et que notre étude est trop sommaire pour qu'on s'en fasse une idée précise. Dans l'ensemble on a quand même le sentiment que les bases viennent pour éclairer la base dix et que sur le fond il n'y a pas de changement technologique ni théorique. Cependant l'organisation mathématique est bouleversée, au niveau des tâches notamment. À plusieurs reprises, quand on lit les livres du maître, il semble clair que : en base dix, les enseignants savent faire et que les bases servent à bien montrer le mécanisme de la base dix. D'une certaine façon, on continue à faire comme avant mais on ajoute « les bases ».

5. ERMEL et la contre réforme

5.1. Introduction

Nous poursuivons notre avancée dans le temps. Dans cette partie nous voulons mettre en évidence une nouvelle théorie qui aurait émergé au moment de la contre réforme (nous l'appelons théorie rénovée). Dans la partie suivante nous étudions les niveaux inférieurs des praxéologies dans des manuels de la contre-réforme à aujourd'hui, dont nous nous demandons dans quelle mesure elles sont le produit de la théorie rénovée.

▪ Recréer une organisation mathématique pour l'étude de la numération après la réforme ?

Notre étude de la numération au temps de la réforme montre la quasi-disparition des tâches dans le registre symbolique pour l'étude de la numération : en bases, tout se fait sur les objets. Ceci semble avoir pour conséquence la disparition du type de tâches technologique « décomposer – recomposer » un nombre.

Disons rapidement qu'avec les programmes de 1980, le travail en bases est cantonné à la seule numération et au seul début de l'école primaire. Les techniques opératoires ne sont plus censées être étudiées en bases. Perret (1985) qui étudie le système éducatif suisse au moment de la réforme montre qu'une des conséquences du travail en base est que les écritures chiffrées sont interprétées en termes de procédures : grouper, dégrouper.[72] On peut supposer que l'absence de numération en unités, qui se manifeste notamment par l'absence de notre type de tâches technologique, ne fait qu'amplifier ce phénomène (voire en est responsable).

Nous avons dit qu'Harlé cherche des écritures chiffrées des puissances de dix (ECPD) et qu'il n'en trouve pas dans les manuels anciens. Nous en avons vu quelques unes au moment de la réforme mais pas pour l'étude de la numération où nous avons surtout constaté l'absence de travail dans un registre symbolique. Pour la première fois, dans des instructions officielles, en 1980, on voit apparaître des décompositions qui utilisent les ECPD alors qu'il s'agit de travailler la numération de position. La numération en unités est présente avec le « nombre de ». Ci-après l'extrait des instructions officielles du CM.

2.1.2 **Désignations écrites :**

L'objectif du cycle moyen est d'assurer chez les enfants une bonne maîtrise du fonctionnement de notre système de numération (positionnel, à base dix). Pour cela, le maître proposera :

Des exercices fréquents de changements et d'utilisation de différentes écritures liées :

Au codage décimal des nombres. Exemple :

$$257\,024 = 200\,000 + 50\,000 + 7\,000 + 20 + 4$$
$$= (2 \times 100\,000) + (5 \times 10\,000) + (7 \times 1\,000) + (2 \times 10) + 4$$
$$= (2 \times 10^5) + (5 \times 10^4) + (7 \times 10^3) + (2 \times 10) + 4 ;$$

A des questions du type : *« combien de dizaines, de centaines, dans un nombre donné ?* Exemple : *dans 7 024, il y a 70 centaines car 7 024 = (70 × 100) + 24.*

Des activités conduisant à confronter notre système de numération à d'autres systèmes (numération romaine, numérations complexes, etc.).

Il n'y a pas de mention de la numération en unités au CE. On trouve en revanche les ECPD (cf. extrait ci-dessous).

On privilégiera tout particulièrement en vue de l'élaboration de techniques opératoires, et en liaison avec la numération, les expressions du type :

$30\,000 + 2\,000 + 300 + 40 + 7$

$(32 \times 1\,000) + (3 \times 100) + 40 + 7$ (lien avec la numération orale), et éventuellement :

$(3 \times 10^4) + (2 \times 10^3) + (3 \times 10^2) + (4 \times 10) + 7.$

L'obtention de plusieurs écritures pour un même nombre permet de renforcer l'utilisation du signe « égal » (placé entre deux désignations différentes d'un même nombre). A partir de telles écritures on peut toujours

Ces modifications d'ostensifs sont-elles la manifestation de changements théoriques ? de changements dans les niveaux T, τ et θ seulement ? Lesquels ?

[72] Ajoutons que Perret préconisait dans les conclusions de son étude la suppression du travail en bases pour les petites classes et son maintien en fin de scolarité primaire, comme pour faire un pas de côté relativement au travail en base dix déjà effectué.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Par ailleurs, peut-être faut-il évoquer, avec le recul annoncé des bases, la nécessité éventuelle de recréer une topogenèse (Chevallard, 1991). En effet, le travail en bases occupait sans doute une grande partie du temps de la classe et il faut penser à donner du travail aux professeurs.

Dans cette partie, nous essayons de décrire les niveaux théoriques et technologiques de ce que nous identifions comme une nouvelle organisation mathématique. Ce n'est que dans la dernière partie de ce chapitre que nous regarderons les niveaux techniques et types de tâches dans les praxéologies mises en œuvre à partir de la contre-réforme et jusqu'à aujourd'hui.

- Méthode

Sur le plan méthodologique nous n'avons pas fait de recherche bibliographique sur les écrits de cette période (en dehors des textes de l'APMEP que nous avons déjà cités). Neyret (1995) indique que, pour ce qui concerne les décimaux et les fractions, divers documents dont certains sont produits par l'APMEP ont pu constituer un traité pour la période de la réforme des mathématiques modernes. Il pointe, en 1995, la nécessité d'un traité actualisé pour harmoniser les décimaux et les fractions entre le primaire et le secondaire.

Nous utilisons un texte qui a été diffusé de façon assez massive (dans les institutions de formation au moins) et a peut-être rempli une fonction qui a des points communs avec celle du traité. Il est visiblement assez proche des instructions de 1980 même si tout ne coïncide pas. C'est une publication de l'INRP (institut national de recherche pédagogique, actuellement établissement public à caractère administratif placé sous tutelle du ministère de l'éducation nationale) et il est préfacé par le « doyen de l'Inspection Générale de la formation des maîtres », ce qui constitue une certaine caution institutionnelle. Nous proposons donc une analyse de la numération telle qu'elle est proposée dans un des tomes de la collection ERMEL parue à la fin des années 70 et au début des années 80. Pour les raisons déjà signalées, nous choisissons le cours élémentaire, nous nous limitons à ce qui concerne la numération qu'on trouve dans le tome 2 (ERMEL CE, 1978), nous n'étudions pas le calcul mental qui se trouve dans le tome 1. Il y a des éléments théoriques communs aux deux niveaux du CE puis des activités pour chacun d'entre eux, nous ferons principalement référence au CE2 mais pas uniquement. Nous étudions les éléments de théorie et les praxéologies tels qu'ils sont proposés dans ce manuel.[73]

[73] Signalons qu'il est tout à fait possible que des travaux de l'APMEP ou des IREM en particulier aient proposé des praxéologies pour l'étude des entiers. Nous avons notamment consulté les « aides pédagogiques de l'APMEP », brochures dans lesquelles nous n'avons pas trouvé d'éléments spécifiques de cette question.

Nous donnons ci-après le premier objectif assigné à l'étude de « la numération au cycle élémentaire » :

> Le point fondamental est de familiariser les enfants au travail direct sur les écritures. En effet, on voit souvent des enfants chez qui la virtuosité à manipuler et représenter masque une réelle méconnaissance des règles de fonctionnement des écritures : ils se trouvent en difficulté dès que le recours à un matériel est impossible. Tout exercice permettant de faire jouer les règles de la numération de position et de les rendre explicites constitue donc une aide efficace dans ce sens. Le cycle élémentaire nous paraît être un moment privilégié pour mettre les enfants en mesure de faire, dans le domaine numérique, une série d'investigations leur permettant de voir « comment ça marche », « comment c'est fabriqué » - condition indispensable pour qu'ils puissent donner un sens aux écritures et raisonner directement sur elles. » (p. 17)

Il nous semble qu'ERMEL ne dit pas autre chose que Perret dans la première partie de cet extrait. Il semble nécessaire de recréer une organisation didactique qui prenne en charge un registre symbolique.

5.2. Eléments de théorie

Nous commençons par présenter le plan d'ERMEL relatif à la numération. Ensuite, nous interprétons cette présentation en termes de théorie et de transposition de la théorie. Nous donnons en annexe l'ensemble des pages concernées par les éléments théoriques.

▪ Le plan relatif à l'étude de la numération

Extraits et résumé

Le développement théorique d'ERMEL (pp. 9-16) est intitulé : « Les caractéristiques des différentes numérations ». Il est organisé comme suit.

Un premier paragraphe introductif, I.1 base de numération, propose deux constructions. La première est une « construction algorithmique (…) pour désigner sans ambiguïté chaque naturel » :

> Par exemple, la suite d'écritures construites à l'aide de trois signes a, b et c (a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc, aaa, aab, aac, aba, abb, etc.) n'est autre qu'un système de numération en base trois, où a « désigne le nombre un », b deux, c trois, aa quatre, ab cinq, ac six, …cc, douze, aaa treize ».

La deuxième est une « construction par groupements successifs ».

> « En revanche si l'on retient la même règle, à tous les niveaux on groupe par a (tout objet d'espèce n est un groupe de a objets d'espèce n-1), alors a s'appelle la base du système de numération. (…)
>
> *L'information recueillie et à transmettre* se présente alors sous la forme : « Dans la collection, il y a x objets isolés (ou non groupés, on dit encore unités), y objets de première espèce, z objets de deuxième espèce, t objets de troisième espèce… etc. »
>
> Nous verrons en I.3 quelles solutions ont été retenues pour transmettre une telle information, mais auparavant nous allons en I.2 dans un court développement

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

> mathématique montrer en quoi cette information est pertinente et non ambiguë. Cela suppose que nous rappelions ce qu'est la notation exponentielle et ses propriétés : en effet, le nombre d'éléments des objets de première, deuxième, nième espèce s'exprime mathématiquement par une écriture exponentielle ».

Vient ensuite le « développement mathématique » (I.2) qui est organisé comme suit :

> I.2 Notation exponentielle et décomposition canonique d'un naturel
>
> I.2.1 Notation exponentielle
> - I.2.1.1 Définition
> - I.2.1.2 Règles de calcul
>
> (…) donc $a^p \times a^q = a^{p+q}$
>
> Exemple :
>
> $10^2 \times 10^3 = 10^5$ (100×1000=100000)
>
> (…) $(a^p)^q = a^{pq}$
>
> Exemple :
>
> $(10^2)^3 = 10^6$ $(100)^3 = 100 \times 100 \times 100 = 1000000$

On relie ensuite objets et écriture exponentielle :

> Application : une base étant choisie, on définit une loi de groupement qui est dite exponentielle : en effet, les objets de deuxième espèce sont eux, constitués de a objets de première espèce soit de a×a ($=a^2$) objets initiaux. Les objets de quatrième espèce sont constitués de $a \times a^3$ ($=a^4$) objets initiaux. Les objets de nième espèce sont constitués de $a \times a^{n-1}$ ($=a^n$) objets initiaux.
>
> L'information : x objets isolés, y objets de première espèce, z objets de deuxième espèce, t objets de troisième espèce… se traduit alors mathématiquement par ce qu'on appelle la décomposition polynomiale du nombre (d'éléments de la collection) selon les puissances de la base, à savoir : $x+(y \times a)+(z \times a^2)+(z \times a^3)=\ldots$
>
> x unités, y éléments de première espèce, z éléments de deuxième espèce, t éléments de troisième espèce, avec x, y, z et t nécessairement inférieurs à a.
>
> Mais cette information n'a de sens que si, pour une collection donnée, donc pour un nombre donné, cette décomposition existe nécessairement et est unique.
>
> Nous allons démontrer que quel que soit un naturel n « il existe une décomposition canonique unique de ce naturel selon les puissances d'un nombre donné (a>1) »
>
> I.2.2 Décomposition d'un entier naturel n selon les puissances de la base a.

Le théorème de décomposition d'un naturel selon les puissances de la base est ensuite prouvé par récurrence (non formalisée) et écrit dans un formalisme proche de celui d'(Eiller, 1972).

Après ces deux premiers paragraphes, un troisième est intitulé « Classification des différents systèmes de numération ». Il s'intéresse aux numérations qualifiées de numération d'addition (numérations anciennes : égyptienne, romaine), aux numérations « hybrides » dont le seul exemple est la numération orale et enfin aux numérations de position. Toutes ces numérations s'appuient sur le développement du 1.2. La numération orale est reprise dans un nouveau paragraphe I.4 qui s'appuie aussi sur ce point.

La théorie savante et commentaires

Il nous semble percevoir qu'on veut utiliser la théorie savante de la décomposition polynomiale d'un entier, $x+(y\times a)+(z\times a^2)+(z\times a^3)$, pour fonder la numération.

Cette théorie est savante de plusieurs points de vue :

- il nous semble qu'elle relève effectivement du savoir savant utilisé actuellement ordinairement pour parler de la numération de position en mathématiques,
- elle est aussi savante au sens où, utilisée telle quelle, elle crée des besoins trophiques qu'il est *a priori* difficile de satisfaire à l'école primaire, d'autant qu'ils sont nécessaires dès le CP. Citons déjà : multiplication ou notation exponentielle, addition, écriture parenthésée ou priorité de la multiplication sur l'addition, coefficients d'un développement polynomial. En outre, elle ne prend pas en charge la numération orale de façon « naturelle ». On peut dire que c'est une théorie savante et qu'elle n'est donc pas faite *a priori* pour l'école primaire.

C'est un savoir savant du premier type.

Une différence avec les textes antérieurs nous semble être qu'ici c'est ce développement exponentiel d'un entier dans une base qui fonde « mathématiquement » toutes les numérations qu'elles soient anciennes, orale, d'addition, positionnelle, etc. En effet, nous avons vu que la théorie de la brochure MOTS faisait appel à la numération en unités et que la fiche numération du dictionnaire ne prenait pas en charge la numération orale. Ici, l'intention est de prendre ce dernier aspect en charge.

Après cette brève présentation, nous revenons à des points particuliers pour aborder des questions plus fines de transposition.

Comment fait-on dans la pratique ? Comment fait-on pour étudier nos types de tâches ? Nous essayons maintenant de montrer le travail de transposition didactique. Dans un premier temps nous interprétons les choix d'ERMEL pour montrer comment certaines questions didactiques sont résolues. Dans un deuxième temps, nous présentons un point qui nous semble rester aveugle.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

5.3. Premiers problèmes de transposition

- Une rupture avec le passé et avec la réforme

La numérotation des chiffres de l'écriture positionnelle d'un entier

Dans la présentation d'ERMEL les objets de première espèce ou encore de premier ordre sont ceux qui s'appelaient unités du deuxième ordre dans l'OM classique. Cette modification n'est pas introduite par ERMEL, on la trouve déjà au moment de la réforme, il est probable qu'elle est utilisée au moins pour coïncider avec l'écriture exponentielle et peut-être aussi pour marquer la rupture avec l'ancien temps. Il nous semble qu'elle empêche toute numérotation des chiffres dans l'écriture positionnelle, l'usage étant de commencer à 1 dans une numérotation.

Toutefois, dans la pratique de l'école primaire la référence aux puissances de la base ne peut être que limitée, en effet les puissances 0 et 1 sont encore plus difficiles à attraper que les puissances supérieures ou égale à deux, elles ne sont d'ailleurs pas explicitées dans les décompositions (dans l'introduction sur la notation exponentielle, ERMEL rappelle seulement que $a^1=a$).

Le point de vue algorithmique

Signalons que le paragraphe introductif d'ERMEL relatif à la construction algorithmique comporte une erreur. S'il est vrai que la construction présentée peut être interprétée comme un codage en base trois, elle ne correspond pas au codage positionnel ordinaire mais à un codage sans zéro qu'on trouve d'ailleurs pour la base dix en page 15 du livre[74]. En effet, si a, b et c sont les signes d'une numération de position avec zéro, aucun de ces signes ne représente la base. Si a est le zéro, b est le plus petit élément (non nul) et c le suivant de b, il faudrait écrire pour obtenir une suite qui correspond à la notation positionnelle ordinaire (en commençant par le plus petit élément non nul) : b, c, ba, bb, bc, ca, cb, cc, baa, bab, bac, bba, bbb, bbc, bca, bcb, bcc, caa, cab, cac, cba, cbb, cbc, cca, ccb, ccc, baaa, etc.

Par ailleurs, il ne nous semble pas que l'articulation entre les deux points de vue aille de soi. L'erreur que nous relevons peut être un signe de cette absence d'évidence.

Nous avons vu que l'écriture des suites chiffrées est une tâche qui existe dans la période classique et qu'elle est résolue par le passage par la numération en unités. Ici on semble

[74] On peut trouver un développement assez complet sur ce système de numération dans (Cuppens, 2001)

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

vouloir s'en passer. Peut-être faut-il aussi voir dans l'approche d'ERMEL qui s'appuie sur le caractère algorithmique des suites numériques la volonté d'aller contre une pratique introduite par la réforme qui « interdisait » aux jeunes élèves de CP de « compter » avant la fin de l'année sous prétexte qu'ils n'avaient pas construit tout ce qui était nécessaire pour la « compréhension » de la numération de position alors que des travaux constataient qu'ils étaient tout à fait capables de « compter » (Bessot & Comiti, 1982).

- L'écriture chiffrée des puissances de dix : une question difficile ?

Rappelons le développement d'Eiller (1973) qui est, à notre connaissance, conforme à la pratique des mathématiques savantes :

> « Quel que soit le nombre a, pris pour base, le nombre a admet pour développement : a=1.a+0
>
> et s'écrit donc $a=(10)_a$.
>
> De même, les puissances de a sont représentées par le chiffre 1 à gauche suivi d'un nombre de 0 égal à l'exposant, et ceci quelle que soit la base a :
>
> Ainsi $a^2=1.a^2+0.a^1+0$ s'écrit $a^2=(100)_a$ et $a^3=(1000)_a$ etc. » (Eiller 1973)

Il nous semble que ce point de la théorie est particulièrement difficile pour de jeunes élèves. En effet, on voit que pour obtenir l'écriture chiffrée des unités de la numération, on a besoin des éléments les plus délicats de la décomposition polynomiale : exhiber 0 comme coefficient des puissances non représentées dans la décomposition (propriété d'élément absorbant de la multiplication), exhiber 1 comme coefficient de la puissance de la base à laquelle le nombre est égal (propriété d'élément neutre de la multiplication).

Dès le début du développement mathématique d'ERMEL, avant le théorème de décomposition et avant la définition de l'écriture positionnelle, on a :

> (…) donc $a^p \times a^q = a^{p+q}$
>
> Exemple :
>
> $10^2 \times 10^3 = 10^5$ (100×1000=100000)
>
> (…) $(a^p)^q = a^{pq}$
>
> Exemple :
>
> $(10^2)^3 = 10^6$ $(100)^3 = 100 \times 100 \times 100 = 1000000$

Ainsi, les écritures chiffrées des puissances de la base sont introduites avant la « décomposition d'un entier naturel n selon les puissances de la base a » et la numération de position. Dans ces deux derniers paragraphes, on ne fait d'ailleurs pas allusion à l'écriture chiffrée des puissances de la base. L'affirmation relative à ces écritures chiffrées dans le paragraphe introductif est peut-être une façon de masquer un point théorique délicat et de

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

proposer une solution pédagogique pour le dépasser. Peut-être faut-il voir là un début de naturalisation des écritures chiffrées des puissances de dix.

- Le type de tâches « dénombrer »

Nous nous intéressons au type de tâches dénombrer. Cette question est prise en charge très tôt dans le développement d'ERMEL, dans le paragraphe introductif avec les groupements successifs, puis reprise en introduction de la classification des différentes numérations :

> « Revenons maintenant au problème de la transmission de l'information qui se présentait sous la forme : x unités, y objets de première espèce, z objets de deuxième espèce… ce que nous avons traduit par l'écriture : $x+(y\times a)+(z\times a^2\ldots)+\ldots$ dont nous venons de montrer l'existence et l'unicité. Comment écrire, ou exprimer oralement, ou figurer, une telle information ? Trois types de solutions (concernant les numérations écrites) ont été retenus : ces solutions ont donné naissance respectivement aux numération d'addition, aux numérations hybrides et aux numérations de position. »

Ce type de tâches est considéré comme générateur des différentes questions relatives à la numération. Ceci signifie notamment qu'on prend en charge le passage des objets aux nombres : on ne reste pas dans la sphère des mathématiques savantes.

Ce type de tâches est traité pour plusieurs numérations. Le point de départ est la théorie savante et le développement polynomial d'un entier. Comment cela est-il transposé ? Pour le savoir il faut examiner les trois paragraphes suivants : numérations d'addition, hybrides et de position. Nous regroupons les deux premiers.

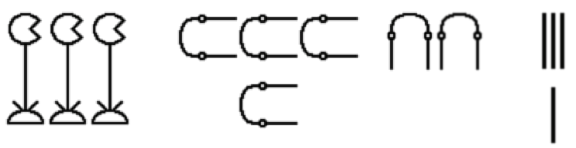
- La numération orale et les numérations d'addition : un appui sur les ECPD

L'étude des numérations d'addition et hybride reposent sur un même principe de transposition : après l'écriture exponentielle, on supprime les puissances et on les remplace par les écritures chiffrées des puissances de dix (pp. 12-13).

> « *La règle de juxtaposition des signes dans l'écriture d'un nombre traduit essentiellement l'addition de leurs valeurs. Par exemple* : le nombre que nous écrivons 3424 et qui donnerait lieu à l'information « trois objets de troisième espèce, quatre objets de deuxième espèce, deux objets de première espèce et quatre unités » ou à la décomposition polynomiale $(3\times10^3)+(4\times10^2)+(2\times10)+4$, s'écrirait dans un tel système et avec nos signes :

1000 1000 1000 100 100 100 100 10 10 1 1 1 1

et s'écrit en écriture hiéroglyphique :



en chiffres romains MMM CCCC XX IIII

De même, on a le traitement suivant pour la numération orale :

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Dans un tel système 3424 qui s'écrit encore $(3\times10^3)+(4\times10^2)+(2\times10)+4$ s'écrirait avec nos symboles :

	3	1000	4	100	2	10	4
ou	trois	mille	quatre	cent	deux	dix	quatre

Ici la juxtaposition des symboles suppose (selon les cas) la multiplication ou l'addition de leurs valeurs, d'où le terme « *hybride* ».

Par exemple 3 100 (« trois cents ») suppose une multiplication (3×100) alors que 100 3 (« cent trois ») suppose une addition (100+3).

On voit donc le travail de transposition : il faut résoudre en particulier le problème de la numération orale et il faut abaisser les besoins trophiques. Comme on ne peut pas utiliser, directement la théorie, notamment l'écriture exponentielle et ses coefficients et qu'on ne veut pas non plus utiliser la numération en unités, on prend des objets premiers qui sont les écritures chiffrées des puissances de dix et on calcule avec.

- La numération de position : quelle théorie de référence ? quelle transposition ?

Deux approches et rôle du zéro

Le paragraphe sur la numération de position est en deux parties. On a d'abord un paragraphe sans titre qui commence suit.

> « Les seuls chiffres retenus désignent les coefficients des puissances de la base. (c'est-à-dire les nombres inférieurs à la base a : 1, 2, 3, 4, … a-1 et aussi 0) Le nombre ayant donné lieu à la décomposition $x+(y\times a)+(z\times a^2)+(t\times a^3)$ va pouvoir s'écrire dans de tels systèmes xyzt ou tzyx. En effet, dès lors que l'on choisit de ne pas écrire les puissances de la base la position des chiffres n'est pas indifférente et il faut convenir d'un ordre (3424 ne désigne pas le même nombre que 4234). Cette convention étant établie, *c'est la position d'un chiffre qui définit la puissance de la base dont il est le coefficient*. D'où le nom de numération de position. (…). »

On est ici dans la théorie savante. Les chiffres sont les coefficients des puissances de la base dans le développement polynomial du nombre entier. Dans la théorie savante, le zéro apparaît « naturellement » avec la décomposition polynomiale étant établies l'existence et l'unicité de cette décomposition. C'est alors un zéro qui est un coefficient numérique et non un marqueur pour une espèce absente.

Après la première partie, il y a une deuxième partie intitulée « le rôle du zéro ». Étrangement, c'est ce deuxième point de vue, le « zéro » marqueur de position qui est adopté dans le paragraphe « le rôle du zéro ».

> Dans le cas particulier où, après dénombrement par constitution de groupements successifs, il n'apparaît pas d'objets d'une certaine espèce (alors que figurent des objets d'espèce supérieure) il convient de noter cette absence au niveau de l'écriture ; cela pour éviter un décalage des chiffres qui entraînerait une modification du sens de cette écriture.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

> Ceci n'était pas nécessaire dans les numérations décrites en I.3.1 et I.3.2, où l'on omettait tout simplement de parler ou d'écrire les signes correspondant aux espèces manquantes.
>
> Les solutions retenues pour noter l'absence de certaines espèces en numération de position furent un espacement (…), ; un point (…). Le statut du point est analogue à celui du zéro, il signale la position d'une espèce d'objets absente ».

Nous pensons que ce dernier paragraphe est très proche de la théorie classique et qu'il n'y a pas besoin de décomposition polynomiale.

Étrangement, dans ce paragraphe sur la « numération de position » les ECPD ne sont pas évoquées alors qu'elles le sont dans les autres.

On ne dit pas notamment que le nombre d'éléments du « paquet d'ordre n » s'écrit 1 suivi de n zéros. Ceci constituerait une troisième approche et permettrait d'expliciter, en un sens, les autres numérations. Nous y reviendrons.

Quel lien entre les ECPD et la notation exponentielle ?

Dans le paragraphe (antérieur) relatif à la notation exponentielle, on avait :

> Exemple :
>
> $(10^2)^3=10^6$ $(100)^3=100\times100\times100=1000000$
>
> En utilisant cette notation nous pouvons écrire : 3424=3000+400+20+4, ce qui est une première forme de décomposition du nombre.
>
> Nous pouvons aussi écrire : $3424=(3\times10^3)+(4\times10^2)+(2\times10)+4$, ce qui est une deuxième forme de décomposition, appelée décomposition polynomiale. Notons que 3424, qui est l'écriture du nombre dans notre système de numération, ne retient de la décomposition polynomiale que les coefficients des puissances de la base.

Ce paragraphe nous semble un peu énigmatique car il n'est précédé que de la définition exponentielle. Nous ne voyons pas comment on passe de la notation exponentielle à l'égalité : 3424=3000+400+20+4, ni à la décomposition polynomiale. Néanmoins, il semble qu'il y a une intention de relier les ostensifs exponentiels et les ECPD.

Conclusion

Cette question sur la définition de la numération de position nous semble importante car nous voyons dans ce qui est proposé une ambiguïté susceptible d'avoir des effets non contrôlés. Nous présenterons à la fin de ce paragraphe une ébauche de formalisation sur les places possibles des ECPD dans une théorie de la numération de position. Dans l'immédiat, nous présentons la façon dont on aboutit aux ECPD dans ERMEL, ECPD qui même s'ils sont des objets premiers, ne sont pas introduites dès le début de la progression.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

- L'OM pour aboutir aux ECPD

Nous ne présentons pas l'organisation mathématique d'ERMEL. Elle est d'un grande complexité et demande la mise en relation de tous les domaines. Par ailleurs, elle ne nous semble pas essentielle pour comprendre la situation actuelle. Nous indiquons seulement l'émergence des ECPD.

Contrairement à ce que peut laisser penser notre développement théorique précédent, dans les niveaux bas de la praxéologie les ECPD ne sont pas introduites immédiatement. C'est le travail en bases qui fonde l'écriture chiffrée, en bases (par une théorie qui n'est pas précisée spécifiquement). Les ECPD n'apparaissent qu'à la fin du travail en bases comme nous allons le voir.

Au CE1 on travaille beaucoup sur des réductions et allongements d'écritures. Elles s'effectuent par un calcul qui ne repose pas sur l'étude de la numération positionnelle mais qui l'utilise : « on propose aux enfants de nombreux exercices où il s'agit, en s'aidant du répertoire et de résultats déjà mémorisés, de réduire ou d'allonger des écritures ». On travaille toujours en base dix pour ces allongements et réductions qui reposent plus ou moins sur les « savoirs préalables des élèves ».

On poursuit par du codage et du décodage de collections en bases. On fait des changements de base : le but est d'utiliser les savoirs sur les « écritures » pour effectuer ces changements de base.

> « Ex : des nombres étant donnés, $(12)_{\text{cinq}}$, $(201)_{\text{trois}}$, $(23)_{\text{quatre}}$. Les enfants doivent dessiner l'abaque et trouver l'écriture habituelle du nombre.
>
> Certains enfants pourront revenir aux jetons de couleur pour effectuer les échanges et retrouver le nombre de jetons jaunes.
>
> Il est possible que, dès maintenant, certains enfants puissent imaginer les échanges et écrire directement :
>
> $(12)_{\text{cinq}}=5+2$
>
> $(23)_{\text{quatre}}=4+4+3$
>
> et peut-être même
>
> $(201)_{\text{trois}}=9+9+1$
>
> On les encouragera à utiliser ce mode de résolution. » (pp. 84-85)

Dans l'activité suivante, fait des échanges dix contre un, on a donc deux écritures pour le même nombre : l'écriture « savante » en base dix et l'écriture « profane » obtenue par calcul ou comptage (implicitement en base dix). Et,

> « On constatera sur plusieurs exemples l'analogie de l'écriture habituelle (obtenue par réduction de la somme) et l'écriture avec la règle dix contre un $17=(17)_{\text{dix}}$. »

Au CE2, on reprend globalement les exercices du CE1 mais on approfondit le travail en base dix. On reprend d'abord les exercices de codages et décodages d'une collection dans différentes bases sur un abaque, de là on tire l'écriture chiffrée du nombre en bases. Vient ensuite un paragraphe : « numération et décomposition additive » dont le but est :

> Lier l'écriture usuelle d'un nombre à la décomposition additive correspondante (exemple : 429 = 400+20+ 9). À ce sujet, nous considérons d'une part des activités de changement d'écritures en base dix et d'autre part des activités de passage d'une base donnée à la base dix.

On cherche donc à écrire en base dix un nombre écrit dans une autre base. Le but étant de passer par une écriture additive. Par exemple, $(2101)_3$ se décode : 27+27+9+1, c'est à dire en utilisant une écriture additive. On en tire, par un calcul naturalisé (ou non théorisé), l'écriture chiffrée en base dix de $(2101)_3$: $(2101)_3 = 64$. Vient ensuite (nous soulignons) :

> Cas de l'écriture décimale :
>
> <u>Il ne s'agit pas d'exercices de décodage, mais d'exercices de changement d'écriture.</u>
>
> 1243=1000+100+100+10+10+10+10+3
>
> soit 1243=1000+200+40+3
> - l'écriture décimale étant donnée, écrire la décomposition comme ci-dessus
> - la décomposition étant donnée, trouver l'écriture décimale.
>
> *Exemples* :
>
> 2000+400+70+9
>
> 600+3000+8+40
>
> (l'activité peut aussi être conduite en calcul mental).
> - recherche d'autres écritures voisines :
>
> 1283=1200+83
>
> 1283=1000+283
>
> 1283=1000+280+3 etc.
>
> recherche du signe le plus court pour 1500+2000+780+14
> - de tels exercices seront repris avec des nombres très variés : 70034, 20205, 108752, 603,… (p. 184)

On retrouve l'esprit de la progression de la réforme pour le changement de base, mais on voit que ces changements de base jouent un rôle très différent, ils sont inclus dans une nouvelle OM : ils sont au départ de celle de la numération de position en base dix. D'une certaine façon, les valeurs des groupements en bases exprimés en base dix (1, 3, 9, 27 pour la base trois par exemple) remplacent les unités de la numération et constituent un artefact qui est remplacé ensuite lorsqu'on est en base dix par les ECPD naturalisées pour obtenir les décompositions additives.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Il nous semble que le changement de base permet de « remplacer » les unités de la numération. Une question naïve est : quand on n'aura plus les bases, comment fera-t-on pour introduire la numération positionnelle ?

Commentaire sur la place de la théorie et sur celles des connaissances sociales des élèves

Il nous semble qu'on comprend mieux ici pourquoi on conserve le développement polynomial dans la théorie et qu'on ne garde pas seulement les ECPD : il apparaît nécessaire pour introduire les changements de base.

Par ailleurs, nous trouvons tout à fait frappante la place faite aux connaissances naturalisées des élèves. On les conforte, on les entraîne. Il y a véritablement deux sortes de nombres dans les tâches des élèves : les nombres « profanes » (avec lesquels on fait de petits calculs) et les nombres « savants » (qu'on écrit en bases). On montre que les deux univers se correspondent mais on n'explicite pas cette correspondance, nous semble-t-il : on « constate » qu'on a les mêmes écritures. Pour faire le lien, il nous semble qu'il faudrait montrer que les règles de calcul utilisées avec les nombres profanes sont des règles savantes et nous ne voyons pas cela.

- Premières conclusions

Nous retenons d'abord qu'il est possible que certains choix viennent en réaction à la réforme et qu'ils sont aussi sous-tendus par l'« impossibilité » de revenir en arrière, à l'état d'avant la réforme. Ceci nous semble particulièrement visible dans la place donnée à l'algorithme de l'écriture chiffrée ainsi qu'à la redéfinition de la numération des positions dans l'écriture chiffrée.

De ces premières analyses de la transposition, nous retenons ensuite qu'on semble vouloir faire des chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et des écritures chiffrées des puissances de dix, des objets premiers, sur lesquels on calcule pour obtenir les écritures chiffrées des nombres : ceci est bien visible pour la numération orale où ces chiffres et écritures sont mis en relation avec les noms des nombres et pour les numérations d'addition.

Toutefois, il nous semble que la définition même de la numération de position pose problème car on n'assiste pas au même travail de transposition : elle n'est pas définie à partir des écritures chiffrées des puissances de dix mais à partir des coefficients du développement polynomial avec une référence à l'OM classique pour le zéro qui représente l'espèce absente.

Ainsi, si toutes les tâches relatives à l'oral, aux numérations additives et hybrides semblent être obtenues par une mise en relation entre les objets et un calcul sur les ECPD, la situation

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

nous semble beaucoup moins claire pour la numération de position. On ne sait pas si pour obtenir l'écriture chiffrée du nombre à partir des objets, il faut utiliser les ECPD ou un discours positionnel qui serait proche de l'OM classique.

Enfin, les écritures naturalisées des puissances de la base pour les petites bases apparaissent comme un substitut pour les unités de la numération.

5.4. La transposition de la numération de position

Nous revenons aux questions théoriques que nous avons soulevées quant à la définition de la numération de position. La situation est en fait paradoxale. Globalement dans la transposition de la théorie, on décide de s'appuyer sur les écritures chiffrées des puissances de dix (ECPD) mais apparemment on n'utilise pas ces ECPD pour obtenir l'écriture chiffrée d'un nombre à partir d'une collection. Il nous semble que ce problème se pose notamment parce que plusieurs statuts sont proposés pour le zéro.

Sur le plan théorique, pour obtenir la notation positionnelle, on peut définir des règles de calculs sur les ECPD (avec des règles positionnelles de calcul). En fait cela revient à dire que la numération positionnelle est une numération hybride, puisque si on considère que les objets premiers sont 1, 2… 9, 10, 100, 1000, c'est bien par du calcul d'addition et de multiplication qu'on obtient la notation positionnelle.

On peut donner directement, à partir de la formation des « objets de différentes espèces », l'écriture chiffrée (à l'aide d'un tableau ou des positions relatives unités). Et cela revient à utiliser l'OM classique en se passant des mots de la numération en unités.

Nous nous proposons de détailler cette question.

- #### Une théorie rénovée

Nous proposons maintenant une théorie de la numération si les écritures chiffrées des puissances de dix sont des objets premiers en relation avec les « objets de nième espèce de la numération »

Étant admis qu'on considère les chiffres ordinaires et les écritures chiffrées des puissances de dix, les noms (numération orale) de ces types d'objets comme des objets premiers, comment met-on en relation les ECPD et les objets ? comment calcule-t-on ? comment compte-t-on à l'écrit, à l'oral ? quelles sont les règles utilisées ?

Nous nous proposons maintenant de reconstruire une théorie de la numération en ECPD. Nous nous appuyons sur la théorie classique formulée notamment avec la numération en unités pour élaborer les technologies d'une théorie en ECPD. Ce n'est peut-être pas la seule façon de faire mais nous pensons qu'elle est assez efficace pour notre travail.

Fondamentalement, la technologie 1 classique « Dans l'écriture d'un nombre, à partir de la droite, le chiffre des unités est en première position, le chiffre des dizaines est en deuxième, etc. » (θ1c) devient : l'unité d'ordre n s'écrit avec 1 suivi de n zéros (θ1f). Ceci correspond à la mise en relation entre ECPD et objets. Toutefois, cet énoncé n'est pas équivalent à θ1c pour deux raisons : θ1c concerne plusieurs chiffres à la fois et tous ces chiffres ne valent pas 1. Il faut donc résoudre ces deux problèmes.

Nous commençons par le deuxième, il s'agit de prendre en charge le cas de p ($p<10$) objets d'ordre n : le nombre doit s'écrire p suivi de n zéros. Résoudre ce problème revient en fait à énoncer θ2c : on compte par unité d'ordre n comme on compte par unités. Nous voyons trois solutions :

- on peut dire : p objets d'ordre n s'écrivent p suivi de n zéros (cette proposition dispense du calcul sur les nombres de plusieurs chiffres) θ1r1,
- on peut considérer que c'est la multiplication qui prend en charge cette écriture et il faut dire : pour multiplier un nombre de la forme 10..0 (1 suivi de n zéros) par un nombre inférieur à 9, on écrit n zéros derrière le nombre inférieur à 9 (cette formulation élève les besoins trophiques en introduisant le symbolisme pour la multiplication) θ1r2.
- on peut considérer que c'est l'addition qui prend en charge cette question. S'il s'agit de calculer par exemple 100+100, il nous semble qu'il faut énoncer des règles de calcul qui sont nécessairement spatiales : pour ajouter des nombres de la forme 10..0 de même longueur, on additionne (ou on compte les 1) θ1r3 (cette proposition est intermédiaire). Cette règle est spatiale car on parle de la longueur, il nous semble qu'il est équivalent de dire qu'on aligne les chiffres les uns sous les autres et qu'on fait la somme des chiffres dans chaque colonne (étant admis qu'ajouter 0 ne change pas le nombre) θ1r4. Nous pensons qu'il est difficile de ne pas la voir comme une règle de calcul.[75]

[75] Il nous semble que c'est à ce moment que 0 doit devenir un nombre, l'élément neutre pour l'addition.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Nous appelons ECPDG (ECPD généralisées) les écritures qu'on obtient à ce stade : il s'agit des nombres de la forme X0..0.

Vient ensuite la deuxième partie de θ1c, il s'agit de former des nombres à plusieurs chiffres non nuls à partir d'une somme d'ECPDG. Bien sûr, on peut énoncer une règle, sans calcul, du type θ1c par exemple : pour ajouter des nombres de 1 chiffre suivi de zéros de longueurs toutes différentes, on compte la longueur de chaque ECPDG et on forme la somme en juxtaposant les chiffres non nuls en prenant soin de mettre le signe « 0 » quand la longueur n'est pas représentée dans la somme (par exemple, s'il n'y a pas d'unité du $3^{ème}$ ordre, alors il n'y a pas d'ECPDG de longueur 3 et on met 0 à la troisième place à partir de la droite). θ1p1

Il nous semble cependant qu'une règle positionnelle de calcul peut intervenir plus naturellement, comme pour θ1r4. Aussi, une formulation possible nous semble être : pour ajouter des nombres de 1 chiffre suivi de zéros de longueurs toutes différentes, on aligne les chiffres à partir de la droite, les uns sous les autres et on fait les sommes par colonne. θ1p2

Pour l'instant nous laissons θ3c (relation entre oral et écrit) de côté. Nous arrivons à θ4c : « une unité d'ordre n+1 vaut dix unités d'ordre n ». Pour cette technologie nous voyons deux possibilités :

- soit l'utilisation de la multiplication : pour multiplier par 10 on écrit un zéro à droite θ4m1,
- soit 90..0+10..0=100..0 (ce qui inclut 9+1=10) θ4m2. De même que nous avons interprété θ1r3 et θ1p2 comme des règles positionnelles de calcul, nous pensons qu'on peut interpréter cette technologie comme une règle positionnelle de calcul. Elle deviendra la « retenue ».

La relation entre les unités est fondamentale, θ4m2 n'utilise pas la multiplication ce qui abaisse ses besoins trophiques. Ceci se fait au prix de l'impossibilité de distinguer deux énoncés : dix dizaine et une centaine. En effet, dans 100 on peut aussi bien lire 10 dizaines que 1 centaine et que 100 unités : on ne peut pas distinguer les trois. C'est ce que nous avons dit à propos de la valence instrumentale de la numération en unités. Cette particularité est une propriété essentielle de la numération positionnelle mais elle ne permet pas en fait de formuler, sans calcul, de nombreuses technologies de la numération de position, toutes celles qui mettent en relation des ordres d'unités. Fondamentalement, on ne peut exprimer la relation entre unités de la numération dans le registre des écritures chiffrées si on ne dispose pas de la multiplication. Si on n'a pas non plus celui de la numération en unités, on ne peut donc pas la

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

formuler. C'est peut-être ce qui explique son absence dans les manuels que nous avons consultés. En fait, elle pourrait être formulée avec un registre intermédiaire, avec des mots et des « paquets de 10, 100, 1000, etc. ». Il faudrait développer cet aspect pour approfondir notre étude.

Ce que nous retenons de cette proposition théorique c'est qu'on peut définir une théorie de la numération de position en s'appuyant sur des règles positionnelles de calcul (mais il y a des variations qui permettent de s'en éloigner). Ces règles positionnelles de calcul ne sont pas obligatoires mais elles sont tentantes car au fond c'est toujours de la même règle qu'il s'agit : la règle de la technique opératoire de l'addition. On aligne les chiffres à droite, on fait la somme par colonne, quand on arrive à 9 on écrit 1 dans la colonne juste à gauche.

Pour θ3c, ERMEL propose de mettre en relation les mots nombres et leurs écritures chiffrées. Ceci revient grossièrement à calculer avec les chiffres et les ECPD pour obtenir les écritures chiffres des nombres, à partir d'un nom de nombre on obtient effectivement son écriture chiffrée. Le problème est que cette technologie ne donne pas directement l'écriture chiffrée du nombre, cette écriture chiffrée s'obtient après un calcul, nous semble-t-il.

- Une autre théorie de la numération si la notation positionnelle est un objet premier en relation avec les objets

Nous avons vu qu'on pouvait considérer le problème d'une autre façon. Un autre choix cohérent peut être d'introduire directement la notation positionnelle en relation avec les objets et d'écrire dans un tableau (ou de droite à gauche) en complétant par des zéros les cases vides à droite du chiffre le plus à gauche, chaque case correspondant à la taille d'une unité de la numération. Ce choix n'est autre le choix de l'OM classique dans lequel on supprime un intermédiaire, la numération en unités, en le remplaçant par des colonnes de tableau (ou des positions relatives, sans tableau). Si on fait ce choix et si on ne dispose pas de la numération en unités, on peut définir les règles de calcul à partir du tableau.

Dans cette perspective, les ECPD ne sont pas des objets premiers. Elles ne constituent pas alors un registre intermédiaire entre les objets et les écritures chiffrées. Les ECPD sont obtenues comme les autres écritures chiffrées, en remplissant le tableau et en écrivant des zéros dans les colonnes vides à droite du chiffre le plus à gauche.

En fait cette option correspond au choix de 1970, à condition de travailler en base dix, quand on n'a pas de mot pour dire les unités de la numération, mais seulement un tableau. Il ne résout pas le problème de l'absence de travail dans le registre symbolique repéré en 1970, car il fournit bien un registre symbolique pour l'étude des nombres, celui des écritures chiffrés, mais ce travail n'est possible qu'après l'obtention de la notation positionnelle et non en amont contrairement au registre de la numération en unités. C'est l'OM classique dans laquelle on se passe de la numération en unités.

- Conclusion sur les théories

Sur les théories

Ce dernier développement théorique nous est propre, il suppose qu'on travaille au départ sur des collections d'objets et qu'on veuille en donner le nombre. Nous n'excluons pas qu'il existe dans d'autres travaux.

Du point de vue technologique (et logique), ces deux choix donnent des statuts opposés aux ECPD : dans le premier cas, le calcul sur ces écritures chiffrées permet d'obtenir la notation positionnelle des autres nombres que les ECPD (ou que les ECPDG si on veut se passer de la multiplication), dans l'autre cas c'est la notation positionnelle qui justifie le calcul sur les écritures chiffrées dont celui sur les ECPD.

Cette théorie ne prend pas en charge, directement, la numération orale même si elle permet d'obtenir les écritures chiffrées des nombres à partir de leur nom en mettant en correspondance les ECPDG et les mots nombres.

Dans la théorie rénovée, outre les noms des ECPD pour la numération orale, des règles de calcul, positionnelles, sur les ECPD permettent à la théorie de fonctionner. Les unités de la numération ne sont pas une nécessité, elle n'apparaissent pas naturellement, elles n'apparaissent pas dans ERMEL. Dans cette théorie rénovée, on peut donc définir la numération de position à partir de règles positionnelles de calcul (d'addition essentiellement). Ce sont les mêmes règles (plus ou moins généralisées) qui servent à décrire l'algorithme de calcul.

Si on exclut la relation avec les objets, la théorie rénovée est interne à un registre alors que la théorie classique nécessite des changements de registres. Les noms des unités de la numération peuvent être introduits *a posteriori* dans la théorie rénovée pour désigner les rangs des chiffres dans l'écriture d'un nombre (par exemple plutôt que de parler du troisième chiffre, on peut parler du chiffre des centaines) mais contrairement à la numération en unités ces noms ne sont pas nécessaires pour faire fonctionner la théorie rénovée.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Sur la transposition de la théorie savante

Il semble assez clair que, sur le plan effectif, dans ERMEL CE, on ne vise pas à mettre en œuvre la théorie savante de la décomposition polynomiale mais une transposition de cette « théorie savante ». Il nous semble que nous avons montré que la transposition de la théorie savante peut être interprétée en une autre théorie, aux besoins trophiques beaucoup plus raisonnables pour l'école primaire. Toutefois, apparemment, il y a au moins une question importante non résolue dans ERMEL, celle de la définition de la numération positionnelle. Quel est le rôle du zéro : un marqueur pour les « espèces absentes » ou un marqueur de la longueur du nombre ? Ceci permet en fait de définir deux approches théories différentes, nous appelons théorie rénovée celle dans laquelle le zéro marque la longueur du nombre.

5.5. Conclusion sur la contre-réforme dans ERMEL

Nous retenons la complexité de la progression pour aboutir à la notation positionnelle en base dix qui passe par les petites bases (en remplacement de la numération en unités) pour les abandonner. Se pose ensuite la question de ce qu'on fera quand on n'aura ni les bases ni la numération en unités.

Dans ERMEL, à part une mention à propos de l'oral (à destination du maître), l'ostensif numération en unités est absent des thèmes numération et addition au CE (les seuls que nous ayons regardés). Ceci confirme donc notre hypothèse quant à son abandon que nous supposions d'après les propos d'Harlé.

Nous retenons aussi un trou théorique laissé par une ambiguïté dans la technologie de la notation positionnelle dans la théorie transposée. Nous pensons avoir montré qu'il est bien possible d'écrire une théorie de la numération en se passant de la numération en unités et en les remplaçant par les ECPD, toutefois une telle théorie peut être interprétée comme une théorie du calcul avec des règles positionnelles. Si on décide de se passer d'un registre dans la langue intermédiaire entre objets et ECPD (qui reste à définir et à étudier), sauf à utiliser les multiplications, elle ne permet pas d'exprimer les relations entre unités.

Dans ERMEL, nous pensons donc que la question du choix théorique n'est pas tranchée ce qui donne un statut étrange, selon nous, au calcul sur les écritures ou à la notion de justification (ou preuve) en mathématiques : les écritures auxquelles il semble qu'on veuille donner un statut technologique ne permettent pas de justifier le théorème principal de la théorie, à savoir l'écriture positionnelle des nombres.

Étant donné le peu de place laissée aux unités de la numération, comment les tâches de conversions peuvent-elles être traitées ?

6. Praxéologies à l'œuvre à partir de la contre réforme

6.1. Introduction

- Questions

La mise à jour de la théorie rénovée, du faible rôle de la numération en unités dans cette théorie, des questions non résolues dans ERMEL CE 1978 sur la numération de position, nous amène à quelques questions pour une étude de manuels récents. Nous cherchons à mettre en évidence les praxéologies à l'œuvre aujourd'hui.

Nous limitons notre étude à la recherche des manifestations des technologies élémentaires de la numération de position que nous avons intitulées θ*i*c pour la période classique, θ*i*x*j* pour la contre-réforme dans la résolution de nos types de tâches.

Nous avons vu que les technologies en ECPD ne permettent pas de produire directement les noms des nombres (il faut calculer), quelles praxéologies observe-t-on autour de la numération orale ? Dans la théorie rénovée, on peut se passer de la numération en unités, quelle est la place de cette numération dans les manuels récents ? En particulier quel rôle joue-t-elle dans la tâche « décomposer – recomposer » ? Quelle sont sa technologie, sa technique, ses ostensifs ?

Nous avons vu que dans l'OM classique, la technique de la tâche « dénombrer » est réglée (comme les autres tâches d'ailleurs) par les technologies élémentaires, quelles techniques sont proposées aux élèves pour la tâche « dénombrer » dans les manuels récents ? Cette question se pose de plusieurs points de vue : celui des ostensifs, celui de la technique et des technologies élémentaires qui la justifient compte tenu notamment du fait que nous considérons que cette question n'est pas résolue dans un manuel qui peut constituer une référence institutionnelle.

Qu'en est-il du type de tâches conversion ? Nous l'avons laissé explosé en plusieurs pôles au moment de la réforme. Est-il possible qu'il se reconstitue malgré la péjoration probable de la numération en unités ?

En filigrane, nous avons une question : l'organisation mathématique ancienne survit-elle ? Cohabite-t-elle avec l'OM rénovée ? Si oui, comment ?

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

- Méthodologie

Nous n'avons pas repéré d'éléments théoriques nouveaux dans les manuels parus après ERMEL 1978. En particulier (ERMEL, CE1, 1995) et (ERMEL, CE2, 2001) n'en contiennent apparemment pas.

L'analyse des manuels scolaires actuels nous semble plus complexe que celle des manuels anciens pour plusieurs raisons. De façon générale, les résumés de leçons sont souvent peu développés. Par suite, les techniques et technologies sont parfois difficiles à identifier. Peut-être est-ce aussi le signe de la manifestation des points aveugles que nous avons relevés dans l'étude théorique de la transposition des années 80. Par ailleurs, l'organisation mathématique qui consistait à étudier les nombres de un, deux, trois, puis quatre chiffres est plus ou moins bouleversée ce qui ne facilite pas notre étude. Enfin, l'organisation didactique est souvent longuement évoquée dans les livres pour le maître, ce qui les rend assez touffus. Nous la prenons en compte essentiellement pour identifier les sources de légitimité du savoir. Organisations mathématique et didactique sont souvent imbriquées et nous tentons de dénouer les fils car nous recherchons l'organisation mathématique.

Les questions qui se posent à nous sont donc les suivantes. À partir de la contre-réforme, les types de tâches que nous avons repérés existent-ils, si oui avec quels ostensifs ? Comment sont-ils traités ? Quelle est la place de la théorie rénovée dans les praxéologies à l'œuvre à partir de la contre-réforme ? Observe-t-on un conflit entre l'OM classique et l'OM rénovée ? Observe-t-on des modifications sensibles au fil du temps ? Quelle est la place de la numération en unités ou des unités de la numération ?

- Manuels scolaires

Pour cette dernière période nous avons retenu plusieurs manuels scolaires. Quand nous le pouvons nous comparons des éditions successives. Toutefois, ce sont principalement des manuels publiés après 1995.

Nous donnons d'abord la liste de nos manuels. Nous précisons, dans l'ordre, l'abréviation qui les désignera dans la suite, leur titre, les niveaux que nous avons utilisés (presque toujours le CE2) et les années de publication des éditions que nous avons utilisées. Si nous avons utilisé le livre du maître en plus de celui de l'élève, nous notons ldm. Si nous avons utilisé seulement le livre de l'élève, nous notons lde.

<table>
<tr><td rowspan="2">ERMEL</td><td rowspan="2">ERMEL CE</td><td rowspan="2">1978</td><td>ERMEL CE2</td><td>2001</td></tr>
<tr><td>ERMEL CE1</td><td>1995</td></tr>
</table>

Eiller	Math et Calcul CE2 ldm	1979	Math et Calcul CE2 ldm	1987		
Peltier	Nouvel objectif calcul CE2 ldm	1995	Euro Maths CE2 ldm partiel	2003 2003		
JAM	J’apprends les maths CE2 ldm	1996	J’apprends les maths CE2 ldm	2003		
ME	Math Elem CE2 ldm	1996	Nouveau Math Elem CE2 lde	2001		
PCM	Pour comprendre les mathématiques CE2 lde	1996	Pour comprendre les mathématiques CE2 lde	2002	Pour comprendre les mathématiques CE2 ldm	2004
Maths+	Maths + CE2	2002				

Dans la suite du texte, pour les références on désignera par lde ce qui se rapporte au livre de l’élève par ldm ce qui se rapport à celui du maître.

ERMEL est un livre pour le maître. L’édition de 2001 pour le CE2 ne diffère que très peu de l’édition de 1995 pour le même niveau (c’est l’édition en euros), nous considérons donc que ERMEL CE2 2001 est la suite de ERMEL CE1 1995. En revanche, l’édition de 1978 a été complètement remaniée entre 1978 et 1995. ERMEL est réalisé par une équipe de l’INRP.

Eiller (1979) est la suite de la série (Eiller) du début des années 1970 que nous avons étudiée pour la réforme. Le nom de la collection n’a d’ailleurs pas changé, l’équipe des auteurs est restée stable. Il y a des remaniements importants entre la série du début des années 1970 et celle de la fin. Ils sont nettement moins importants entre la fin des années 1970 et la fin des années 1980. Un des auteurs de Math et Calcul, Roger Ravenel, est membre de l’équipe ERMEL (CE, 1978). La collection Math et Calcul est considérée comme un best-seller pour les années 80.

Nouvel objectif calcul 1995 devient Euro Maths en 2003. Pour des raisons matérielles nous n’avons eu accès que partiellement au livre du maître d’Euro Maths. Ce manuel peut sans doute être vu comme une émanation de la noosphère. Ses auteurs Peltier, Vergnes et Clavié sont formateurs d’enseignants, didacticiens pour les deux premiers et membre de l’équipe ERMEL (CE, 1978) pour le troisième.

La collection J’apprends les maths semble émerger au début des années 1990, en cycle 2 (1ère et 2ème primaire). D’après le catalogue de la BNF, notre édition de 1996 est la première pour le CE2. Cette collection est un best-seller actuellement. L’équipe des auteurs est dirigée par Rémi Brissiaud, ancien professeur de mathématiques en école normale, professeur d’IUFM. Apparemment Brissiaud a été membre de l’équipe ERMEL de 1977 à 1982, mais son nom n’apparaît pas dans la liste des contributeurs du CE en 1978.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Le manuel Math Elem dont la première édition date de 1996, est réalisé par un inspecteur de l'éducation nationale, un conseiller pédagogique et un professeur des écoles.

Les auteurs de Maths + sont pour l'un d'entre eux, conseiller pédagogique (c'est à dire maître formateur attaché à une inspection de circonscription), et pour les quatre autres, professeurs des écoles. Nous n'avons malheureusement pas consulté le guide du maître.

La première édition du manuel « Pour comprendre les mathématiques » date apparemment de 1996. L'équipe qui a réalisé les différentes éditions est constituée par : trois directeurs d'école, un maître formateur, un professeur d'IUFM, un professeur agrégé.

6.2. Le type de tâches rattaché à lire écrire les nombres

A partir de la contre-réforme, cette tâche est principalement déclinée sous deux formes : à partir de l'écriture chiffrée d'un nombre, donner sa désignation orale et la tâche inverse. On observe toutefois quelques autres manifestations du type de tâches. Que peut-on dire des techniques et technologies relatives à la numération orale à partir de la contre réforme ?

Nous avons identifié plusieurs pôles autour de ce type de tâches. Ils se répartissent entre deux tâches : la tâche emblématique et une tâche que nous appelons technologique. Pour la tâche emblématique nous identifions plusieurs techniques.

▪ La tâche technologique pour la technologie rénovée de l'oral

Les instructions de 1980 proposent des tâches qui visent à élucider les « règles de la numération orale ». ERMEL 1978, Peltier (1995, 2003) en proposent (et eux seuls). Nous rapportons le préambule de (Peltier, 2003) quant à cette étude (nous soulignons) :

> Rappelons que la numération orale est une numération décimale hybride, c'est à dire :
> - il existe des mots pour désigner les chiffres de 0 à 9, mais il existe en plus des mots pour désigner les différentes puissances de la base (dix, cent, mille, million…) ;
> - <u>la juxtaposition des mots-nombres correspond à une opération : multiplication (trois cents : 3×100), addition (soixante-dix : 60+10), alternativement l'une et l'autre (trois cent huit : 3×100+8) ;</u>
> - le mot « zéro » n'est jamais dit quand on lit un nombre autre que 0 ;
> - on trouve beaucoup d'anomalies dans le nom des nombres de la première centaine (onze, douze… vingt, trente… soixante-dix, quatre-vingts, quatre-vingt-dix…) ; (Peltier, 2003, ldm, p. 35)

Ces tâches se déroulent comme suit :

> Demander ensuite aux élèves de rechercher quelles opérations permettent d'obtenir 738 à partir de « 7 », « 100 », « 30 » et « 8 » :
> - « On obtient (7×100)+30+8=738. C'est la décomposition auditive du nombre. »
> - « On met (7×100) entre parenthèses pour montrer que les deux nombres sont reliés par la multiplication. »
> - « Les mots-nombres « sept » et « cent » sont reliés par la multiplication. »
> - « Les mots-nombres « trente » et « huit » sont reliés par l'addition. »

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Il s'agit bien de mettre en relation les ECPD et la numération orale. On utilise pour ce faire les objets premiers que sont les « mots-nombres » et les ECPD. Nous avons dit que la technologie rénovée de l'oral ne donne pas de technique pour écrire le nombre sans calcul. Ces tâches ne sont apparemment pas très répandues.

- La tâche emblématique

Tous nos manuels proposent la tâche emblématique. Mais tous ne parlent pas d'une technique ou d'une technologie pour la traiter. Nous parlons maintenant de ceux qui en parlent. Nous indiquons des discours ou des représentations sémiotiques, nous reviendrons sur le fait de savoir s'il s'agit de techniques ou technologies.

Thème : La technique ou technologie classique de l'oral

Peltier (2003) fait précéder l'étude de la tâche technologique par une autre (ce que ne fait pas (Peltier, 1995) qui se limite à un discours pour la tâche technologique) :

> Distribuer à chaque élève une bande de papier et demander à l'un d'entre eux de proposer un nom de nombre qui se dit avec quatre mots (ce nombre peut aussi être proposé par l'enseignant). Chaque élève écrit en lettres le nombre sur la bande de papier. Puis donner la consigne : « Au dessous, écrivez la valeur de chaque mot en chiffres. »
>
> Exemple :
>
> | | | | |
> |---|---|---|---|
> | sept | cent | trente | huit |
> | 7 | 100 | 30 | 8 |
>
> Poser la question : « Le nombre proposé se dit avec quatre mots. Est-ce un nombre de quatre, trois ou deux chiffres ? »
>
> Pour valider la proposition des élèves, analyser avec eux la manière de passer du nombre à son écriture en chiffres :
> - « J'entends « sept », j'écris 7. » ;
> - J'entends « cent » mais je n'écris pas « 100 » car « cent » est associé à « sept ». « sept cents » c'est 7 centaines c'est donc le chiffre « 7 » en troisième position en partant de la droite. » ;
> - « J'entends « trente », je n'écris pas 30 car je sais que « trente » c'est 3 dizaines, donc « 3 » est le chiffre qui va se placer en deuxième position en partant de la droite. » ;
> - « J'entends « huit », c'est 8 unités, j'écris « 8 » en première position en partant de la droite. » ;
> - « C'est donc un nombre de trois chiffres : 738. » (Peltier, 2003, ldm, p. 35)

Nous reconnaissons là un énoncé proche de l'OM classique. Il utilise la numération en unités.

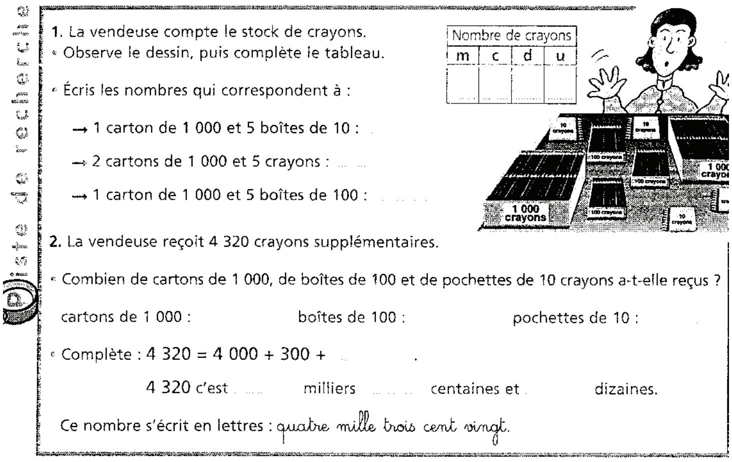
Nous n'avons pas trouvé d'explicitation de la technique pour l'oral dans JAM, néanmoins on met relation les unités de la numération et les noms des nombres.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Première variation : dans le tableau

Dans Eiller la technique n'est pas explicite. Toutefois, il semble qu'on demande de lire des nombres quand on a un tableau de numération. Aussi, rapprochons-nous la technique de ce qu'on voit dans PCM 2004 :



Piste de recherche

1. La vendeuse compte le stock de crayons.
- Observe le dessin, puis complète le tableau.

Nombre de crayons			
m	c	d	u

- Écris les nombres qui correspondent à :

→ 1 carton de 1 000 et 5 boîtes de 10 :

→ 2 cartons de 1 000 et 5 crayons :

→ 1 carton de 1 000 et 5 boîtes de 100 :

2. La vendeuse reçoit 4 320 crayons supplémentaires.
- Combien de cartons de 1 000, de boîtes de 100 et de pochettes de 10 crayons a-t-elle reçus ?

cartons de 1 000 : boîtes de 100 : pochettes de 10 :

- Complète : 4 320 = 4 000 + 300 + .

4 320 c'est milliers centaines et dizaines.

Ce nombre s'écrit en lettres : quatre mille trois cent vingt.

> Les enfants lisent la piste de recherche et observent attentivement le dessin qui matérialise les milliers, centaines, dizaines, ainsi que le tableau qui doit recevoir le nombre de crayons. Ils tracent sur leur cahier d'essais une copie du tableau de la piste. L'enseignant leur demande de lire les nombres qui correspondent à « 1 carton de 1000 et 5 boites de 10 » et « 2 cartons de 1000 et 5 crayons », puis d'écrire ces nombres dans le tableau. Lors de la mise en commun des écritures, il fait constater que :
> - 1 dans la colonne des milliers se lit *mille*,
> - 5 dans la colonne des dizaines se lit *cinquante*, 5 dans la colonne des centaines se lit *cinq cents* mais 5 dans la colonne des unités se lit *cinq*.
>
> La valeur de chaque chiffre dépend donc de sa position. (…) (PCM, 2004, ldm)

On trouve pour la numération orale ce qui nous semble être une technique, proche de la technologie classique car même si on ne « sort » pas les unités de la numération du tableau, on fait référence aux colonnes mais ces colonnes réfèrent très explicitement aux objets.

La situation est insensiblement différente de ME 1996 où on apprend à lire les nombres de quatre chiffres dans le tableau de numération, en référence aux noms des colonnes, avant de savoir ce qu'est un millier (c'est à dire 10 centaines).

Deuxième variation : une technique rénovée ?

Dans ERMEL 1978, on trouve le texte suivant. Il est précisé que ce sont des « remarques pour le maître ». Rappelons toutefois qu'ERMEL n'est pas un manuel scolaire mais un guide pédagogique, destiné au maître donc.

> « La lecture des nombres à trois chiffres suppose la connaissance du nom des nombres à deux chiffres, il suffit de prononcer avant le nom du nombre formé par les deux chiffres le nombre de centaines. 432 se lit quatre cent trente-deux. Dans ce cas, la décomposition privilégiée est (4×100)+32 ou, si la lecture des nombres à deux chiffres n'est pas assurée (4×100)+30+2.

Il y a là une sorte de découpage du nombre en trois tranches (centaines, dizaines, unités)

$789 = \underbrace{(7\times100) +}_{\text{sept cent}} \quad \underbrace{80 +}_{\text{quatre-vingt}} \quad \underbrace{9}_{\text{neuf}}$ » (ERMEL 1978, p. 193)

Ce paragraphe dont nous donnons un extrait est le seul endroit des chapitres relatifs à la numération où on nomme les unités de la numération.

Le manuel (Maths +, CE2) donne un « coup de pouce » (c'est à dire une technique ou une technologie) pour le passage de l'écriture chiffrée à l'écriture littérale :

Classe des mille			Classe des unités simples		
.	.	u	c	d	u
		2	1	5	2

2 unités de mille → 2 000 → deux mille

1 centaine → 100 → cent

5 dizaines →50 → cinquante

2 unités → 2 → deux

Le tableau avec son intitulé de colonne (ou la 4$^{\text{ème}}$ position) permet de dire que 2 se lit « 2 unités de mille » qui vaut 2000 et qui se lit deux mille, de même pour les autres chiffres. On fait appel aux ECPDG pour dire le nombre, on ne se limite pas aux noms des colonnes (comme dans PCM et ME). Il nous semble que c'est une technique rénovée : on se réfère aux ECPDG pour dire les mots nombres. Par rapport à la technologie rénovée, cette technique a l'avantage de permettre de façon assez naturelle de lire un nombre écrit en chiffres. Elle n'est pas très utile dans l'autre sens.

Pour le passage dans l'autre sens (oral vers écrit) Maths+ procède directement avec le tableau, un peu comme ME.

Il nous semble qu'ERMEL et Math+ proposent une technique pour la tâche emblématique. Cette technique réfère aux unités de la numération mais elle contient aussi des ECPDG (signalons que nous avons vu des décompositions en ECPDG dans Marijon 1947 pour l'oral des nombres de quatre chiffres).

- Conclusion

La tâche technologique n'est pas très présente dans nos manuels peut-être parce qu'elle contribue peu à la réussite à la tâche emblématique. Malgré des variations, toutes les techniques pour la tâche emblématique semblent nécessairement référer aux unités de la

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

numération, ce qui garantit peut-être leur survie au sein de l'organisation mathématique rénovée.

La modification entre (Peltier, 1995) et (Peltier, 2003) où on rajoute la technique classique entre les deux éditions nous semble pouvoir avoir deux explications complémentaires. Elle montre d'une part qu'on ressent un besoin de technique pour la tâche emblématique, d'autre part que cette technique s'exprime en faisant référence aux noms des unités de la numération (et qu'on accepte donc de les utiliser).

Ce dernier point nous semble important parce que, justement, dans la première variation de la technique, dans PCM notamment, on ne sort pas les unités de la numération du tableau. Il ne nous semble pas si évident qu'elles aient le droit d'exister. Nous y reviendrons.

On constate une relative diversité dans les praxéologies mathématiques proposées par les manuels pour la tâche emblématique.

Souvent la technique est justifiée. Toutefois selon les manuels, la justification ne repose pas sur les même éléments. Dans la praxéologie classique, on a une correspondance entre unités de la numération et numération orale : elle est aux fondements de la théorie. Là, la situation est différente, elle est plus complexe. On peut s'appuyer sur les ECPD généralisées (Maths +, ERMEL CE 1978). On peut s'appuyer implicitement sur la technologie classique (PCM ; Peltier, 2003). Dans ME, on s'appuie aussi sur la praxéologie classique mais sans avoir évoqué les groupements d'objets au préalable.

6.3. Décomposer recomposer un nombre

Nous avons vu dans la période classique que ce type de tâches se présente sous des formes très variées et qu'il met en relation unités de la numération et notation positionnelle. Nous n'avons pas trouvé (ou à titre tout à fait exceptionnel) les décompositions utilisant les ECDPG à la période classique.

Dans la période récente, la situation est très différente. Ce type de tâches se présente très souvent comme interne au registre de la notation positionnelle. Les techniques pour le traiter ne sont pas toujours explicites. Pour les identifier, nous avons souvent recours à ce qu'on dit dans le traitement du type de tâches « dénombrer » dont il constitue en général la deuxième partie du traitement comme dans l'OM classique.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Très majoritairement, dans les manuels récents, le type de tâches « décomposer, recomposer » existe sous la forme d'une décomposition (ou recomposition) d'une somme en ECDPG mais il y a d'autres possibilités que nous allons évoquer.

Quand il est formulé en ECPD, il y a souvent une inconnue quant à la résolution de ce type de tâches, inconnue que nous avons relevée dans ERMEL 1978 : comment passe-t-on de la somme en ECDP (ou en ECDPG) à l'écriture chiffrée du nombre ? Apparemment, souvent, cette question est passée sous silence, comme si la réponse allait de soi. Il devrait pourtant s'agir d'une technologie de base de la théorie de la numération de position.

Quand elle est élucidée, nous avons relevé les réponses suivantes dans les manuels :

- on calcule,
- on utilise la numération orale,
- une utilise une convention.

Nous avons rencontré des décompositions (ou recomposition) dans d'autre ostensifs : avec les unités de la numération ou avec les unités métriques (JAM), la technologie – si elle est indiquée – indique un calcul avec les ECDP ou ECDPG. Nous n'avons trouvé que PCM pour indiquer la technologie pour passer des unités de la numération aux écritures chiffrées.

Signalons qu'on trouve parfois ce type de tâches sous la forme « reconnaître le « chiffre des » » avec des présentations variées, dont des jeux de portrait. Il n'est alors pas question de calcul mais d'associer un mot à une place. Dans la théorie rénovée les noms des unités de la numération ne jouent pas le même rôle que dans la théorie classique et la contribution de cette tâche au type de tâches « décomposer recomposer » nous semble beaucoup moins clair que dans la période classique. Dans la théorie rénovée, privée des unités de la numération, cette tâche n'existe pas. On voit qu'elle résiste un peu néanmoins. Même si notre étude n'est pas suffisamment fine sur ce point, il se peut que son importance soit croissante avec le temps.

Nous donnons maintenant des extraits des manuels pour les différentes technologies identifiées.

Entre Peltier 1995 et Peltier 2003 : changement de technologie

Dans (Peltier, 1995, ldm, p. 28), après une situation de dénombrement on obtient une somme : on écrit 1000+1000+500. La technique pour trouver le nombre est à peu près explicite : sur le livre du maître les nombres sont écrits les uns en dessous des autres, les unités sous les unités, les dizaines sous les dizaines, etc. Il nous semble donc clair que c'est la technologie avec alignement des chiffres qui permet de résoudre la tâche de numération (θ1p2). L'obtention de l'écriture chiffrée nous semble être explicitement assujettie à un calcul en colonne.

Dans (Peltier, 2003), c'est aussi au cours d'une situation de dénombrement d'une grande collection que la technologie pour la tâche est indiquée :

> On obtient alors des écritures du type « 2000+400+30+7 », « 2000+30+400+7 », etc. Se pose donc la recherche de l'écriture du nombre. Demander aux élèves : « Comment écrire le nombre qui indique combien il y a d'objets ? » Chaque élève note sa proposition sur son ardoise. Écrire sur le tableau les différentes propositions. Engager une discussion pour valider ou invalider chacune d'elles, en faisant le lien entre la collection, l'écriture « 2000+400+30+7 », le nombre dit oralement et le nombre en chiffres (*le sens de l'écriture des chiffres dans un nombre, à partir des unités à droite, est une convention que les élèves doivent assimiler*). Faire la synthèse avec les élèves :
>
> « 2, écrit à gauche du nombre, vaut 2000 unités ; c'est ce que contiennent les 2 paquets de 1000 (à repérer dans la collection). ; on dit que 2 est le chiffre des mille ; » ; <u>faire écrire sur chaque paquet de 1000 le nombre d'objets en chiffres</u> ;
>
> « 4, écrit à droite du chiffre des mille, vaut 400 unités ; c'est ce que contiennent les 4 paquets de 100 (à repérer dans la collection) ; on dit que 4 est le chiffre des centaines » ; (…)
>
> (…) on dit que 7 est le chiffre des unités.

On note donc une évolution entre les deux éditions du manuel : on passe d'une réduction de la somme par calcul en colonne à une réduction par « convention de la position ». Néanmoins, dans la mesure où les élèves sont au CE2 et qu'ils ont donc déjà étudié l'addition posée, on ne voit pas trop ce qui pourrait les empêcher de poser une addition pour réduire la somme. Ce qui est conventionnel et qui n'est pas présenté comme tel est en fait l'écriture chiffrée des ECPD.

De l'écriture chiffrée aux ECPD : la calculatrice (ERMEL 2001 CE1, CE2)

Dans ERMEL 2001 CE2, la première situation est intitulée « les craies ». Il s'agit, étant donné un besoin de craies (nombre de 2 ou 3 chiffres), d'écrire la commande en étuis (de 10 craies) et en boites (de 100 craies) pour satisfaire le besoin. Les boîtes de craies sont présentées aux élèves, mais en fait ils travaillent soit sur un texte dans lequel les nombres 10 et 100 sont écrits, soit sur un dessin des boîtes et étuis, chaque boîte ou étui comportant l'indication 100 craies ou 10 craies. Il est indiqué que « aucune règle systématique n'est à tirer de cet exercice. » Néanmoins les procédures attendues sont les suivantes : « 100+100+100+100+10+10+10=430, 4 boites de cent craies et trois étuis de 10 craies » (l'écriture additive), « 4×100=400, 3×10=30, 4 boites de 100 craies et 3 étuis de 10 craies » (l'écriture multiplicative). Il nous semble très important de signaler que « Bien entendu les enfants peuvent avoir besoin de leur calculatrice, en particulier pour effectuer certaines multiplications. Ils indiquent s'ils l'ont utilisée ou non » (p. 292). Dans les extraits de

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

productions d'élèves, certains de ceux qui n'ont fait que des additions indiquent qu'ils l'ont utilisée.

Quelles sont les techniques et technologies à l'œuvre dans cette proposition ? Pour trouver la commande, les élèves doivent produire et calculer des sommes comportant des termes égaux à 10 ou 100 qui approchent au plus près (par défaut) le nombre ciblé. Ils disposent de la calculatrice. Le calcul peut donc être pris en charge « techniquement » et « technologiquement » par la calculatrice. On peut supposer que ce calcul (réalisé au besoin par la calculatrice) crée le milieu qui va permettre de rattacher les chiffres du nombre ciblé aux nombres de termes égaux à 10 ou 100 qui sont nécessaires pour écrire une somme qui approche le nombre cible.

Il nous semble que les éléments théoriques sous-jacents sont du même type que ceux de (Peltier, 2003) même si la convention n'est pas explicitée (ce qui constitue quand même une différence notable) et même si on utilise la calculatrice. Nous y reviendrons.

Des ECPD à l'écriture chiffrée : l'oral comme technologie (ME 1996)

Dans ME 1996, en leçon 32, on demande notamment aux élèves de réduire des sommes en ECPDG. Dans l'exercice 3, il faut « [écrire] les nombres qui ont été décomposés », par exemple : 4000+60+2. Le livre du maître précise :

> « Certains élèves utilisent l'addition pour faire l'exercice 3. La discussion les aidera à prendre conscience que la lecture seule permet de retrouver le nombre qui a été décomposé. » (Math Elem, CE2, livre du maître p. 64)

Signalons que ceci suppose que les nombres soient dans le « bon » ordre (ce qui est le cas dans cet exercice) ou bien d'apprendre aux élèves à les y mettre. Cette fois, ce n'est pas la technique positionnelle, ni un calcul en colonne qui doit servir à réduire les sommes en ECPDG mais la numération orale.

Précisons que conformément à ce projet, dans ce manuel, la lecture des nombres est traitée dans une leçon précédente, sans référence à des collections (nous l'avons déjà évoqué). Elle est travaillée avant les « décompositions ». On écrit les nombres dans un tableau de numération et on apprend aux élèves à les lire en utilisant une technique spatiale utilisant les noms des colonnes. Ensuite, cette technique va servir aux élèves de technologie pour produire les décompositions en somme de zéros et pour recomposer les nombres décomposés.

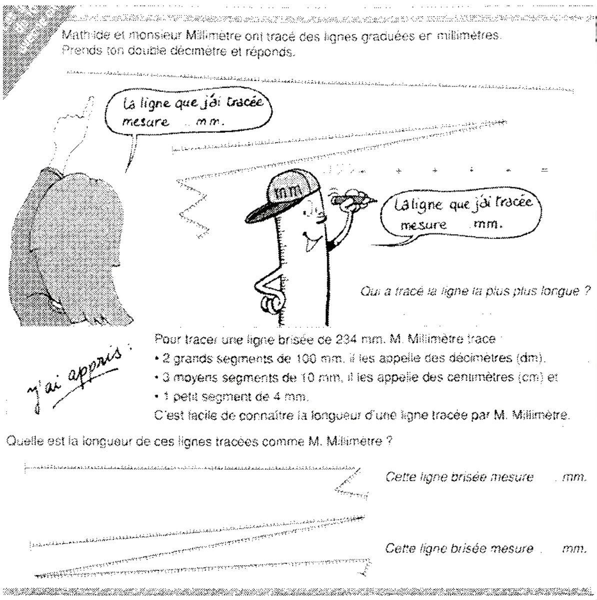
La situation semble être différente en 2001 puisqu'on étudie les groupements d'objets avant l'oral, mais nous n'avons pas le livre du maître pour le préciser.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Des unités métriques aux écritures chiffrées : les ECPD (JAM)

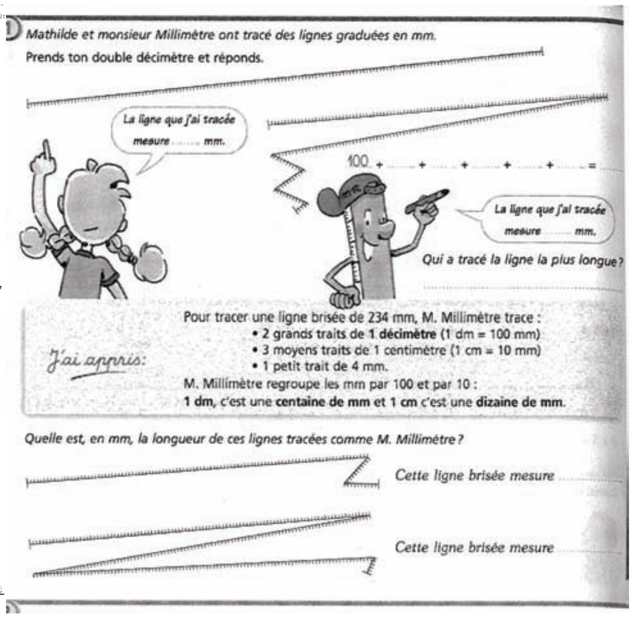
Le manuel J'apprends les maths (JAM, ldm 1996, ldm 2004) a la particularité, au CE2, par rapport aux autres manuels que nous avons consultés, pour la dernière période, de tenter d'articuler l'étude de la numération et d'une partie du système métrique (le sous-système fondé sur les multiples du millimètre).

Ci-après, nous reproduisons la leçon introductive pour le « groupement de 100 mm ». Nous avons repéré deux différences principales : avec l'apparition des centaines et des dizaines en 2003 et dans le dernier paragraphe que nous citons.


Mathilde et monsieur Millimètre ont tracé des lignes graduées en millimètres.
Prends ton double décimètre et réponds.

Pour tracer une ligne brisée de 234 mm. M. Millimètre trace :
• 2 grands segments de 100 mm. il les appelle des décimètres (dm).
• 3 moyens segments de 10 mm, il les appelle des centimètres (cm) et
• 1 petit segment de 4 mm.
C'est facile de connaître la longueur d'une ligne tracée par M. Millimètre.
Quelle est la longueur de ces lignes tracées comme M. Millimètre ?
Cette ligne brisée mesure .. mm.
Cette ligne brisée mesure .. mm.

(JAM, 1996, lde, p. 32)


Mathilde et monsieur Millimètre ont tracé des lignes graduées en mm.
Prends ton double décimètre et réponds.

Pour tracer une ligne brisée de 234 mm, M. Millimètre trace :
• 2 grands traits de **1 décimètre** (1 dm = 100 mm)
• 3 moyens traits de 1 centimètre (1 cm = 10 mm)
• 1 petit trait de 4 mm.
M. Millimètre regroupe les mm par 100 et par 10 :
1 dm, c'est une **centaine de mm** et **1 cm** c'est une **dizaine de mm**.
Quelle est, en mm, la longueur de ces lignes tracées comme M. Millimètre ?
Cette ligne brisée mesure ....
Cette ligne brisée mesure ....

(JAM, 2003, lde, p. 44)

En 1996, dans le livre du maître, le sous-titre est : 100 mm = 1 dm.

> (…) Il s'agit d'introduire un nouveau groupement des millimètres, le groupement de 100 mm qui est appelé le décimètre. (…) Mais la ligne brisée de M. Millimètre n'est pas quelconque : il l'organise en groupes de 100 mm et de 10 mm. On pourra faire un rapprochement avec les groupements des billes en boîtes de 10 et valises de 100 billes. (…) Les enfants sont invités à expliquer pourquoi leur règle s'appelle aussi un « double décimètre » et à montrer ces deux décimètres. (…)
>
> L'encadré J'ai appris peut donner lieu à un prolongement collectif : anticiper comment M. Millimètre s'y prendrait pour tracer des longueurs de 327 mm, 510 mm, 408 mm, 93 mm, etc. On peut s'appuyer sur des écritures du type :
>
> 319 mm=100 mm+100 mm+100 mm+10 mm+9 mm (…)
>
> L'activité C [tracé de lignes brisées de 203 mm, 319 mm et 230 mm] amène chaque enfant à tracer une longueur organisée en dm, cm et mm. Il doit donc prendre en charge la traduction : 319 mm=…dm,…cm…et mm. Pour aider les enfants, on pourra les inciter à se rappeler combien de millimètres il y a dans 1 dm. (ldm CE2, 1996, p. 68)

En 2003, le sous-titre est : L'équivalence 1 dm = 100 mm

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

> Mais la ligne brisée de M. Millimètre n'est pas quelconque : il l'organise en groupes de 100 mm et de 10 mm. (…) On fera le rapprochement avec les groupes de 100 et les groupes de 10 de Picbille. (…) Les enfants sont invités à expliquer pourquoi leur règle s'appelle aussi un « double décimètre » et à montrer ces 2 dm. (…)
>
> On anticipe alors comment M. Millimètre s'y prendrait pour tracer des longueurs de 329 mm, 510 mm, 408 mm, 93 mm, etc. On peut s'appuyer sur des écritures du type :
>
> 319 mm=100 mm+100 mm+100 mm+10 mm+9 mm (…)
>
> Pour aider les élèves dans la première partie de l'activité 2 [tracé de lignes brisées de 128 mm et 341 mm], on pourra les inciter à effectuer la décomposition des deux nombres en groupes de 100, groupes de 10 et unités isoles. (ldm CE2, 2003, p. 105)

Entre les deux éditions, on repère des différences dans les ostensifs. Dans le dernier paragraphe du livre du maître, les décompositions en dm, cm et mm de 1996 sont remplacées par des « groupes de 100 », « groupes de 10 ».

Dans les deux éditions, à partir de l'écriture chiffrée du nombre, il faut produire une décomposition en ECPD pour mettre en correspondance le nombre et les objets (les dm, cm et mm). On voit qu'on n'utilise pas les techniques et technologies de l'OM classique : 319 mm, c'est 3 en 3ème position donc 3 centaines de mm, 1 en deuxième position donc 1 dizaine de mm, 9 en première position donc 9 mm. Une centaine de mm c'est 1 dm ; une dizaine de mm, c'est 1 cm, donc 319 mm=3 dm 1 cm 9 mm. Pourtant dans l'édition 2003 et, seulement dans celle-ci, on précise dans le livre de l'élève : « 1 dm c'est une centaine de mm et 1 cm c'est une dizaine de mm ».

En 2003, les tâches de décomposition d'un nombre de 3 chiffres de mm en dm, cm et mm (par exemple : 237 mm = 2 dm 3 cm 7 mm) ne sont jamais prescrites dans ce livre, en tout cas, pas avant qu'on les utilise pour la technique opératoire de l'addition (JAM 2003, ldm, p. 117).

De la numération en unités à l'écriture chiffrée : les ECPD (PCM)

Dans PCM (ldm CE2, 2004, p. 39), les choses sont présentées comme suit :

> **Activité 2 (pour la classe) :** trois boîtes contenant chacune 18 étiquettes (des demi-feuilles de format A4) :
> – une boîte **c** (centaines) : 1 centaine, 2 centaines… 9 centaines et 100, 200, 300… 900.
> – une boîte **d** (dizaines) : 1 dizaine, 2 dizaines… 9 dizaines et 10, 20… 90.
> – une boîte **u** (unités) : 1 unité, 2 unités… 9 unités et 1, 2… 9.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

✦ **ACTIVITÉ 2 : LE JEU DES ÉTIQUETTES**

L'enseignant ou un enfant tire une étiquette dans chacune des boîtes marquées c (centaines), d (dizaines), u (unités) ou seulement dans deux boîtes, c et u par exemple. Il choisit les étiquettes portant soit les nombres, soit celles portant n dizaines, n centaines, n unités. Il les présente dans l'ordre, par exemple :
600, 30, 9 ; les enfants écrivent 600 + 30 + 9, puis le nombre 639 ;
7 centaines 8 unités ; ils écrivent 700 + 8, puis 708.

Un enfant lit à haute voix chacun des nombres au fur et à mesure de l'écriture.

Les tirages sont répétés en choisissant les étiquettes dans le désordre, par exemple : unités, centaines, dizaines, les enfants doivent retrouver les nombres correspondants.

La technologie pour obtenir une écriture chiffrée à partir des unités de la numération consiste donc à écrire une somme d'ECPDG. C'est cohérent avec la théorie que nous avons proposée si on introduit les unités de la numération comme intermédiaire entre les objets et les ECPD (ce que nous n'avons pas fait) : on met en relation les objets et les unités de la numération, puis on dit que 3 centaines s'écrit 300.

La situation n'est guère différente de (JAM, 1996, 2003) pour le système métrique : on doit écrire une décomposition en ECPDG, à partir des unités de la numération pour obtenir l'écriture chiffrée du nombre, 7 centaines 8 unités doit être traduit en 700+8 puis en 708.

6.4. Le type de tâches « dénombrer »

▪ Manifestation du type de tâches

Sous quelles formes ce type de tâches se présente-t-il à partir de la contre réforme pour les nombres de 3 ou 4 chiffres dans les manuels de CE2 ?

On note d'abord la disparition progressive du travail en bases (limité au CP pour le programme de 1980). On trouve des manipulations d'objets à grouper (un *tas* de trombones dont il faut dire le nombre, par exemple), des manipulations d'objets groupés, en particulier de matériel de numération structuré (multibase en base dix, notamment). Ensuite on retrouve l'évocation de pratiques de la vie courante, elles reviennent avec la suprématie de la base dix. Parmi elles, on note une forte présence de la monnaie. Dans ces pratiques sociales, les groupes d'objets sont presque exclusivement désignés par les écritures chiffrées des puissances de dix (ECPD) ou leurs multiples par un nombre de un chiffre significatif (ECPDG), par exemple 300. Nous distinguons deux sortes d'objets : les grandeurs discrètes et la « valeur ». Les grandeurs discrètes sont évoquées à travers des boîtes de 100 crayons, des paquets de 1000 journaux, etc. La « valeur » est extrêmement présente, en particulier les « points » qu'on gagne à divers jeux (quilles de 1000 points, palets de 100 points, etc.), ces points ne sont pas très différents de la monnaie lorsqu'on travaille dans une unité unique (franc ou euro). On peut d'ailleurs adjoindre à ce type d'objets des étiquettes sur les lesquelles

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

on écrit des ECPD. Il faut ajouter à cette liste, les longueurs mesurées en millimètre que nous avons trouvées comme manifestation de l'articulation entre système métrique et numération dans la seule collection J'apprends les maths (JAM, 1996, 2003).

Comme nous l'avons vu, dans la présentation d'ERMEL 1978, la technique ou la technologie pour produire l'écriture chiffrée d'un nombre à partir d'une collection organisée comporte une ambiguïté. Trouve-t-on des traces de ce phénomène dans les manuels ? Quelles sont les techniques ou technologies effectivement présentes pour ce type de tâches ?

Nous nous intéressons, pour des questions de temps, à une partie du traitement d'une tâche du type dénombrer : nous considérons que les groupes d'objets sont déjà formés, qu'on a donc des paquets de dix, cent, mille et des unités isolées en nombres inférieurs à 9. Par ailleurs, le traitement de cette tâche dans la théorie rénovée mobilise une succession d'étapes dont la première est la transformation des ECPD en ECPDG : on a 9 paquets de cent (ou 100) et on doit écrire 900. Nous avons proposé plusieurs variantes pour cette première étape, en trouve-t-on la trace dans les manuels ?

Lorsque c'est une technique en ECPD qui est proposée, nous étudierons la deuxième partie de la technique avec le type de tâches suivant : « décomposer recomposer un nombre ».

- La technique du tableau et les écritures

Eiller (1979, 1987)

Que voit-on dans les nouvelles éditions (que nous appelons deuxième et troisième) de Math et Calcul au CE2 publiées en 1979 et 1987 ? On voit des manipulations (dans le livre du maître) ou des représentations (dans le livre de l'élève) de matériel multibase qui permettent d'obtenir, à partir du tableau de numération, l'écriture chiffrée du nombre de la collection. Et puis on voit une autre approche, sans (parfois avec) tableau de numération : le calcul du nombre par les écritures. Cette tâche est largement facilitée par l'utilisation de la monnaie ou de points qu'on gagne : des puissances de dix sont écrites en chiffres sur les pièces ou billets (ou associées aux symboles qu'on gagne), par suite, il suffit d'écrire la somme correspondant à ce qui est écrit puis de « calculer » pour obtenir le nombre. Rien n'est dit sur les techniques de calcul à mettre en œuvre. Toutefois, nous en retenons que, pour la monnaie et les points, ce ne sont plus nécessairement les positions des unités de la numération qui servent à « dénombrer » (ni le tableau de numération), mais bien la réduction d'une écriture qui est une somme de puissances de dix (en nombre toujours inférieur à 9 pour chaque ordre d'unité). De plus la mise en relation des objets discrets et des nombres écrits en chiffres est extrêmement réduite.

Nuançons ces éléments. Les différences entre les deux éditions de Math et Calcul ne sont pas très nombreuses, signalons en quelques unes. La deuxième édition proposait de faire, en centimes, des valeurs représentées par des francs et des centimes puis d'écrire ces valeurs sous la forme de sommes de puissances de dix chiffrées ; dans la troisième, ces exercices sont remplacés par des points qu'on gagne, chiffrés donc, avec les zéros. Cette différence n'est pas anodine du point de vue du rôle de la position. En effet, dans l'OM classique, on a : 1 franc = 1 centaine de centimes, 10 centimes = 1 dizaine de centimes, par suite 3 francs, 40 centimes et 7 centimes s'écrivent, en centimes, avec 3 en position de centaines, 4 en position de dizaines et 7 en position d'unités ; dans l'OM rénovée, il faut écrire que 3 francs=300centimes, et faire la somme 300+40+7 pour obtenir la notation positionnelle de la valeur totale. Quand on supprime l'ostensif « franc », on supprime 3 francs et on les remplace par 300 points. Quand les valeurs de tous les « chiffres » sont données en ECPDG, l'utilisation de la technique classique qui aurait consisté à passer par la numération en unités pour obtenir l'écriture positionnelle apparaît coûteuse, on se trouve de façon « naturelle » dans un calcul et dans l'OM rénovée. Dans le même ordre d'idées, dans la deuxième édition on demandait aussi d'écrire une somme de puissances de dix chiffrées à partir du matériel multibase après avoir obtenu l'écriture chiffrée du nombre dans le tableau (ou sur un abaque), dans la troisième on ne demande plus la somme. Ce qui signifie qu'on ne passe plus du matériel à l'écriture chiffrée des puissances de dix, on s'arrête à l'écriture chiffrée du nombre. On ne travaille plus la technologie de mise en relation entre les objets et les ECPD qui passe par la mise en relation entre valeur d'un groupement d'objets et écriture du bon nombre de zéros dans l'ECPDG (ou l'ECPD) (θ1f).

Enfin, la deuxième édition proposait en début d'année, une double page en base dix dans laquelle il fallait coder des collections (représentées sous la forme de matériel multibase) dans des tableaux de numération dont les libellés des colonnes étaient les dessins du matériel pour des nombres de 4 chiffres. On reprenait ensuite les nombres de deux chiffres, puis 3, puis 4 avec les ECPD au fil de l'année. Dans l'édition suivante, cette double page, dernière manifestation des codages et décodages des maths modernes, est supprimée. Il n'est pas impossible que cette suppression ait pour conséquence, pour laisser un temps de travail acceptable aux élèves, la modification du découpage de l'étude des nombres de 4 chiffres : la

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tranche de 2000 à 10000 est remplacée par deux tranches de 2000 à 5000 et de 5000 à 10000, alors que nous n'avons pas repéré de modification dans les types de tâches étudiés.

Ces quelques modifications nous semblent montrer la réduction du travail sur la position et son remplacement par un travail dans le registre quasi unique du calcul avec, en outre, une référence aux grandeurs discrètes de plus en plus réduite.

Nous observons donc l'utilisation des deux paradigmes que nous avons décrits : le nombre s'obtient dans le tableau ou par un calcul dont les règles ne nous semblent par explicitées. L'utilisation de la numération en unités est extrêmement réduite puisque, dans le livre de l'élève, les noms des unités servent seulement à désigner les colonnes du tableau de numération. Il n'y aucune autre tâche qui y fasse référence (à l'exception d'un mot croisé sur lequel nous reviendrons).

PCM

Le manuel PCM (CE2, ldm 2004) demande de « dénombrer » alors que les groupements sont déjà faits. Il s'agit du même extrait que la numération orale :

> Les enfants lisent la piste de recherche et observent attentivement le dessin qui matérialise les milliers, centaines, dizaines, ainsi que le tableau qui doit recevoir le nombre de crayons. Ils tracent sur leur cahier d'essais une copie du tableau de la piste. L'enseignant leur demande de lire les nombres qui correspondent à « 1 carton de 1000 et 5 boites de 10 » et « 2 cartons de 1000 et 5 crayons », puis d'écrire ces nombres dans le tableau. Lors de la mise en commun des écritures, il fait constater que :
>
> - 1 dans la colonne des milliers se lit *mille*,
> - 5 dans la colonne des dizaines se lit *cinquante*, 5 dans la colonne des centaines se lit *cinq cents* mais 5 dans la colonne des unités se lit *cinq*.
>
> La valeur de chaque chiffre dépend donc de sa position. Dans les colonnes où il n'y a rien, on écrit un zéro. Pour cette écriture on revient à la décomposition canonique.
>
> $1050=(1\times1000)+(5\times10)$
>
> $1050=1000+50$.
>
> Le même procédé est mis en place pour décomposer le nombre 4320.
>
> Si la décomposition gêne certains élèves, l'enseignant peut leur demander de dessiner les boîtes.
>
> Les enfants répondent alors aux questions de leur fichier.

La technique n'est pas très claire pour trouver le nombre néanmoins on peut se demander s'il ne s'agit pas : d'abord d'inférer le nom du nombre à partir du mot-nombre 1000 – mille, on obtient ainsi la lecture du nombre, puis le tableau avec ses colonnes sert de technique pour l'écriture chiffrée. De l'oral, on déduit la valeur des chiffres en fonction de la position : cinq, cinquante, cinq cents. En revanche, il semble que la décomposition canonique doit être écrite en référence à la collection. Apparemment cette écriture doit être calculée (par des règles qui ne sont pas explicitées) et elle justifie le « zéro ».

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Il nous semble qu'on retrouve ici sensiblement la même chose que ce qu'on voit dans Math et Calcul après la réforme, et que l'ambiguïté quant au rôle des écritures chiffrées est de la même nature que l'incertitude laissée par ERMEL 1978.

- La technique en ECPD

Dans l'ensemble, quand ils proposent cette tâche les autres manuels utilisent en fait une décomposition de la tâche en deux parties : on écrit une somme en ECPDG puis on réduit cette somme. Nous avons évoqué la réduction de la somme avec le type de tâches « décomposer recomposer ». Pour la première partie, encore plus souvent que pour la deuxième, il nous semble que tout ou partie de la technique reste implicite. Rappelons qu'il faut mettre en relation objets et unités de la numération ou ECPD, puis si on est en ECPD transformer les ECPD en ECPDG. Signalons les éléments suivants.

Une multiplication

Dans la leçon 5 de Maths +, il s'agit de déterminer le nombre de pavés d'une collection organisée (représentation de matériel multibase avec indication, en numération orale, du nombre de pavés dans chaque type d'objet : une barre = dix pavés, une plaque = cent pavés, un cube = mille pavés). En marge du dessin, le manuel propose un « coup de pouce », c'est à dire une technique ou une technologie :

« Compte le nombre de pavés :

cubes		plaques		barres	
↓		↓		↓	
$\boxed{1000\times 2}$	+	$\boxed{100\times\ldots}$	+	$\boxed{10\times\ldots}$	=
↓		↓		↓	
2000	+	…	+	…	
		$\boxed{= \ldots}$			»

L'énoncé prend en charge la relation entre objets et nom des ECPD. Ensuite, on élabore une somme de produits. La façon dont on calcule les produits notamment n'est pas indiquée. Signalons que la multiplication par les puissances de dix apparaît plus tard dans ce manuel.

Signalons que l'intermédiaire du produit montre bien qu'on n'est pas dans la théorie savante, puisque dans cette théorie, ce sont les coefficients qui donnent l'écriture chiffrée du nombre.

Les suites orales et écrites

Pour le début de la tâche de dénombrement, nous pensons que techniques et technologies ne sont pas complètement explicites dans le livre du maître d'Euro Maths : « On compte les

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

paquets de mille et on écrit 2000 ». La description de la phase précédente peut laisser penser qu'on compte de mille en mille (il y a entre deux et trois mille objets) et qu'on écrit 2000, ce qui suppose une certaine correspondance entre la numération orale et la numération écrite (« deux mille s'écrit 2 suivi de trois zéros, comme mille s'écrit 1 suivi de trois zéros »). C'est l'algorithme de la suite des nombres écrite ou orale semble être utilisé.

La calculatrice

Dans ERMEL CE2 2001, avec « les craies », on a la calculatrice pour cette tâche et les écritures chiffrées sont indiquées. En fait la logique de la progression est complètement inversée par rapport à ce qu'on trouve dans (Peltier, 2003) qui a pourtant de nombreux points commun. La mise en relation avec les objets (par dénombrement) n'apparaît que dans la dernière activité de la série. Nous supposons que cela permet, en s'appuyant sur la calculatrice, d'établir des relations entre les « écritures », relations qui sont ensuite matérialisées sur les objets.

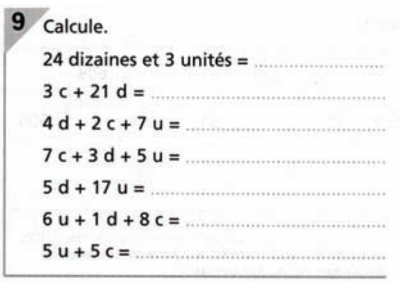
6.5. Quelques remarques

- Sur la valence instrumentale actuelle de la numération en unités

Nous commençons par quelques remarques qui n'ont pas la prétention de généralités, mais nous semblent néanmoins significatives de la faible légitimité des unités de la numération. Nous avons vu que dans (Peltier 2003, ldm), le chiffre des centaines par exemple, *correspond* au nombre de paquets de 100. On retrouve le même verbe lorsqu'il s'agit de comparer des nombres dont on sait que l'un d'entre eux a 21 centaines, l'autre 3 milliers. On dit alors : « 21 centaines (qui correspondent à 2 milliers et 1 centaine) » (Peltier 2003, ldm, p. 190). On ne dit donc pas qu'il y a une égalité entre des unités de la numération mais une *correspondance*. Dans PCM 2004, on voit un traitement symbolique différent selon les décompositions. On écrit, de façon presque systématique, une phrase pour la numération en unités et une égalité pour les nombres : 543 c'est 5 centaines 4 dizaines et 3 unités mais 648=600+40+8. On observe la notation : « dix unités → 1 dizaine » dans ERMEL 1995 CE1 (p. 309) par exemple, de même dans (Peltier 1995, ldm, leçon 64).

Notre étude n'est pas terminée sur le rôle des unités de la numération dans les manuels récents. Nous avons néanmoins repéré certaines des niches qu'elles occupent. Les noms des unités de la numération sont assez présentes dans les noms des colonnes du tableau de numération (mais certains manuels écrivent des ECPD à la place). On trouve de plus en plus de décompositions dans ces unités, à côté de celles en ECPD. En revanche, nous n'avons pas trouvé de calcul dans ces unités, à l'exception de la justification de la retenue pour l'addition ou la soustraction dans quelques manuels. L'impossibilité de faire apparaître la numération en unités dans un calcul est sans doute un obstacle à son utilisation.

Après la consultation de beaucoup de manuels (bien davantage que la liste que nous avons donnée pour ce chapitre), nous n'avons pas trouvé de conversions du type « combien de dizaines dans 3 centaines ? ». Dans deux manuels (ERMEL CE2, 2001) et (Peltier, 2003), nous avons repéré un exercice, unique, qui évoque une pratique de la vie courante qui nécessite une conversion (avec la relation entre 100 et 10 dans Peltier). Dans l'exemple que nous avons cité au début de ce paragraphe à propos de l'ordre, il y a une conversion nous allons y revenir. Au moment de la réforme et jusque vers la fin de la décennie 1990, il semble que « le nombre de » n'a fait que végéter, et encore avec difficulté, dans les leçons de numération des manuels. Nous l'avons dans quelques exercices de « nombres croisés » et en calcul mental sans qu'il soit évoqué dans les leçons. En revanche, il est bien possible que, dans des manuels récents, Maths+, Peltier (2003), ERMEL CE2 (2001), on assiste à la naissance d'un nouveau type de tâches qui se structure autour du « nombre de ». On a bien des unités de la numération mais toujours prises dans une égalité avec un « nombre » qui s'écrit sans unité de la numération.


9 Calcule.
24 dizaines et 3 unités = ...
3 c + 21 d = ...
4 d + 2 c + 7 u = ...
7 c + 3 d + 5 u = ...
5 d + 17 u = ...
6 u + 1 d + 8 c = ...
5 u + 5 c = ...

(Peltier, 2003, p. 25)

En fait, c'était aussi le cas de l'exercice de comparaison que nous avons évoqué avec 3 milliers et 21 centaines puisque « trois » était le « nombre de milliers » d'un nombre de quatre chiffres et « vingt et une », le « nombre de centaines » d'un nombre de quatre chiffres. Il s'agissait de comparer ces deux nombres afin de « mettre en œuvre les règles de comparaison » qu'ils n'explicitent pas habituellement (c'est-à-dire chiffre par chiffre en partant de la gauche après avoir comparé la longueur des nombres). On peut ainsi penser qu'on utilise le verbe « correspond » car on désigne les « chiffres » du nombre, même dans 21 centaines : nous comprenons qu'il s'agit des chiffres situés à gauche des centaines.

Il nous semble donc qu'on observe au fil de la période, après un anéantissement assez total, un certain retour de la numération en unités. Néanmoins, elles semblent être cantonnées à

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

certaines tâches. On assiste d'ailleurs apparemment à la naissance d'un nouveau type de tâches autour du « nombre de ». Ce type de tâches ne nous semble pas être complètement en mesure de remplacer les besoins en conversion, notamment pour les retenues où on a besoin d'une relation entre deux unités de la numération (c'est en fait possible en enchaînant deux « nombre de » : 12 d = 120, puis 120 = 1 c 2 d). Par ailleurs, pour approfondir cette question, il faudrait repérer les technologies pour le « nombre de ». Nous n'avons pas réussi à le faire.

La valence instrumentale des unités de la numération dans l'institution actuelle des mathématiques de l'école primaire semble être assez éloignée de celle de la période classique.

- Sur une forme d'utilisation des pratiques de référence pour la vie courante

Dans aucun de nos manuels nous n'avons trouvé une formulation explicite quant au nombre de zéros nécessaire pour exprimer un ordre de la numération. Les ECPD sont en général données sans commentaire. Pour nous, c'est le premier axiome de la théorie rénovée.

Il n'est pas rare que les ECPD soient introduites dans une situation qui évoque la vie courante. L'exemple le plus symptomatique que nous ayons trouvé est celui d'ERMEL CE1 1995. Nous donnons ci-après un extrait un commentaire à propos de la situation « le caissier », la première de la rubrique « connaître les nombres » :

> La situation a été choisie pour que l'enfant prenne conscience des dizaines et des centaines dans l'écriture d'un nombre. L'expérience sociale qu'ont les enfants de l'argent et le fait que les billets et les pièces soient marqués de leur valeur en francs (100 F – 10 F) facilitent la lecture de 247 comme 2×100+4×10+7.
>
> Mais il y a un pas à franchir pour lire dans 247, deux centaines, 4 dizaines et 7 unités non regroupées. (ERMEL CE1 1995, p. 315)

Nous n'avons pas trouvé un discours aussi clair dans l'édition d'ERMEL CE (1978). Il semble bien qu'ici ce soit le fait que les écritures chiffrées des puissances de dix participent de « l'expérience sociale » des élèves qui légitime qu'on les considère comme des objets souhaitables pour l'étude de la numération de position. Nous avons aussi évoqué un phénomène similaire avec l'introduction de l'apprentissage précoce de l'algorithme de l'écriture chiffrée, en tant qu'algorithme, sans relation avec les unités de la numération, au moment de la contre-réforme.

Poursuivons avec la calculatrice. Nous avons déjà décrit le rôle qui lui est assigné pour inférer la signification des chiffres dans l'écriture d'un nombre dans ERMEL CE2 (2001), on trouve un discours encore plus clair au CE1 :

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

> La calculette est disponible à tout moment ; elle peut permettre, notamment ici, de passer de l'écriture additive 100+100+100…, ou multiplicative10×100 au nombre 1 000 encore mystérieux. (p. 317)

Il nous semble que la calculatrice est susceptible d'apparaître auprès des élèves comme une source de légitimité du savoir mathématique enseigné.

Nous pensons qu'il faut interpréter de la même façon le rôle attribué dans (Peltier, 2003) aux interactions entre élèves et aux savoirs qu'ils ont déjà. Il s'agit de trouver le nombre formé par la somme « 2000+400+30+7 ». Les auteurs placent toutefois un garde-fou :

> Le sens d'écriture des chiffres dans un nombre, à partir des unités à droite est une convention que les élèves doivent assimiler.

Cette remarque, écrite entre parenthèses, n'apparaît cependant qu'après qu'on ait demandé d'

> Engager une discussion pour valider ou invalider chacune [des différentes propositions des élèves].

Dans ces différents exemples, il s'agit bien sûr de motiver les apprentissages des élèves. Toutefois, il nous semble que la façon dont sont introduites ces références à des pratiques de la vie courante qu'on souhaite enseigner est susceptible de dispenser de faire apparaître comme conventionnels certains objets de savoirs.

6.6. Conclusions

La mise à jour de l'OM actuelle de l'enseignement de la numération telle qu'elle apparaît dans les manuels scolaires est loin d'être terminée. Toutefois, il nous semble que nous sommes en mesure de pointer certaines de ses caractéristiques.

- Une diversité technique et technologique pour une même tâche

Ce qui nous frappe par rapport à la période classique c'est d'abord la diversité selon les manuels des praxéologies mathématiques en amont d'une tâche donnée (niveaux τ et θ). Nous pensons que cette diversité peut s'interpréter d'abord par l'absence de théorie explicite : nous en avons proposé une (déclinée en variantes) et elle nous permet de pointer la diversité. Notre choix de traduire la théorie classique avec un nouvel ostensif apparaît en outre légitime.

Vue de loin la théorie rénovée que nous avons écrite permet d'interpréter les différentes technologies puisque les ECPD semblent bien avoir remplacé les unités de la numération dans les tâches de numération des manuels. Quand on se penche sur les détails des techniques et technologies pour traiter une tâche donnée on observe en fait des variations importantes (dont certaines correspondent aux variations que nous avons proposées). Nous ne savons pas ce que donnerait l'étude des autres types de tâches et de davantage de manuels.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Cette diversité nous semble flagrante dans le type de tâches « décomposer recomposer » alors même que le type de tâches semble se décliner dans des tâches beaucoup moins variées que dans la période classique.

Ce point nous ramène à ce que nous avons dit à propos du type de tâches « conversion ». Il est unifié par une technologie dans la période classique et il se décline en sous types cohérents de complexité croissante utiles pour de nombreuses autres tâches. Nous avons dit pour la période de la réforme que le type explosait en sous-types plus ou moins indépendants qui se traitent chacun par des techniques différentes. La situation actuelle du type de tâches « conversion » n'est sans doute pas très différente même s'il y a eu des évolutions doivent tempérer cette affirmation :

- On assiste probablement à la naissance d'un nouveau type de tâches autour du « nombre de », il ne recouvre pas néanmoins le type de tâches « conversion » et nous n'avons pas réussi à repérer sa technologie ;
- On n'essaie plus, apparemment, comme le faisait Eiller de justifier la technique opératoire de l'addition avec retenue par des sommes d'ECPDG ; c'est à ce moment là qu'apparaissent les seules conversions présentes dans les manuels s'il y en a.

- La numération en unités est-elle indispensable ?

La théorie que nous avons proposée est écrite en ECPD et il nous semble, notamment à cause des techniques liées à l'oral, que les ECPD ne sont pas suffisantes pour décrire les techniques comme le montrent toutes les variantes que nous avons relevées quant à des techniques ou technologies pour la tâche emblématique : la numération en unités revient toujours.

En fait, nous avons vu à propos de l'algorithme de la suite écrite que les écritures chiffrées (et donc les ECPD sans multiplication) ne suffisent pas pour justifier chaque pas de la technique par rapport à ce qui se passe sur les objets. Plus généralement, pour justifier toutes les retenues, nous avons utilisé la numération en unités lorsque nous avons voulu nous éviter d'utiliser un registre symbolique avec multiplication. Pour énoncer les relations entre unités de la numération, compte tenu de ce que nous avons appelé « unités de la numération », il semble indispensable de les utiliser. Ceci peut expliquer que nous n'ayons pas trouvé certaines de ces relations dans des manuels actuels alors que les énoncés correspondant se trouvaient dans les leçons de système métrique.

Ces éléments ne nous semblent néanmoins pas suffisamment pour affirmer que la numération en unités est indispensable. Il nous semble qu'il faudrait approfondir cette question en étudiant la façon dont on désigne les « paquets d'objets » quand on n'a pas (ou peu) de numération en unités. Ce mode de désignation constitue sans doute un registre intermédiaire qu'il est nécessaire de considérer. Dans la praxéologie classique ce problème se résout simplement car le registre intermédiaire est constitué par les expressions de la forme « 3 dizaines d'objets ». Il est parfaitement congruent avec le registre de la numération en unités : 3 dizaines. Pour la praxéologie rénovée, il faudrait étudier notamment les tâches et les technologies qui existent ou qu'il serait nécessaire de faire exister dans un tel registre intermédiaire. Il faudrait aussi étudier la complémentarité et la congruence de ce registre avec celui des ECPD.

7. Conclusion

Le projet initial de ce chapitre consistait à élucider les rapports entre numération et système métrique dans les manuels actuels. Nous avons commencé à le faire et nous en retenons qu'il semble bien qu'on ait des praxéologies désarticulées entre les deux domaines. Ces désarticulations ne sont probablement pas susceptibles d'expliquer complètement les ruptures dans les techniques que nous observons chez les élèves. En revanche, elles peuvent expliquer que le travail dans un domaine ne nourrisse pas l'autre.

La désarticulation que nous observons semble pouvoir s'expliquer par de nombreux mouvements dans le domaine numérique au moment de la réforme puis de la contre-réforme. La situation actuelle rend impossible l'articulation entre les deux en particulier à cause de l'affaiblissement de la numération en unités. En effet, si on veut articuler numération et système métrique, il nous semble nécessaire d'avoir, en numération, un ostensif qui corresponde aux unités métriques. La numération en unités est probablement le seul ostensif qui puisse rendre ce service mais cet ostensif est affaibli. Il nous paraît en effet assez naturel, du point de vue des ostensifs, d'associer 3 hm 5 m à 3 centaines 5 unités. Sans la numération en unités on est condamné à 305 ou à 300+5 et la congruence est beaucoup moins bonne entre les registres d'expression des deux domaines.

Même si elle n'est pas terminée, il nous semble que l'étude actuelle de la numération dans les manuels est assez hétérogène. Il n'y a pas de raison compte-tenu du fait que cette hétérogénéité est assez probablement le produit d'une histoire longue et complexe qu'elle ne se manifeste pas dans les pratiques des enseignants et dans les connaissances des élèves. Notre étude n'est toutefois pas suffisamment fine pour montrer l'évolution depuis la contre-réforme.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Par rapport à l'enseignement ancien, nous observons que les tâches formelles d'étude du système métrique ne sont pas rattachées aux tâches correspondantes sur des objets. Il y a bien du mesurage, mais il n'est pas articulé avec l'étude des différentes unités le plus souvent. Il n'est pas non plus évoqué. Les ruptures que nous observons dans les techniques des élèves entre tâches formelles et tâches en contexte nous semblent davantage devoir être attribuées à cet aspect.

De même pour l'étude de la numération, dans notre questionnaire, si les élèves sont bien capable de dire quel est le chiffre des dizaines dans un nombre de quatre chiffres, ils ne sont apparemment pas capables d'utiliser leurs connaissances « hors contexte » pour résoudre un problème en contexte. Ils se tournent alors vers le calcul d'une division ou d'une multiplication. Dans la théorie classique, avec la numération en unités, on a une bonne congruence entre le nombre de paquets de chaque sorte et le nombre d'unités de la numération. D'ailleurs, on peut parler de « 3 dizaines d'objets » (registre matériel évoqué) et « 3 dizaines » (registre nombre exprimé avec les unités de la numération). Dans l'écriture chiffrées, le chiffre de dizaines est alors le nombre de dizaines (qui restent quand on a tout groupé). La situation est peut-être plus compliquée dans la situation actuelle quand d'une part, les noms des unités de la numération désignent uniquement des positions (ce qui nous semble pouvoir être le cas dans certains manuels : le deuxième chiffre est le chiffre des dizaines) et d'autre part, on recompose le nombre à partir d'une somme qui s'écrit avec des nombres de 1 chiffre suivis de zéros. La congruence est peut-être moins bonne entre les « objets » et les écritures chiffrées. Nous retrouvons ici la nécessité de mieux caractériser ce registre intermédiaire entre les objets et les écritures chiffrées sur lesquelles on calcule.

Les qualités de la praxéologie mathématique classique nous semblent résider dans le petit nombre de technologies qui permettent de traiter tous les types de tâches et d'avoir une assez grande variation au sein d'un type de tâches donnée. La numération en unités est un ostensif crucial dans le bon fonctionnement de cette praxéologie. Une qualité essentielle, selon nous, de la praxéologie classique est qu'elle met un savoir savant à disposition des élèves. Ces qualités ne disent en revanche rien sur les praxéologies didactiques qui l'accompagnaient. Il nous semble qu'on ne peut exclure toutefois que la praxéologie classique soit susceptible de constituer une praxéologie mathématique de référence pour l'enseignement actuel.

Nous pensons aussi avoir pointé l'émergence d'un phénomène à partir de la contre-réforme mais apparu peut-être dès la réforme avec la naturalisation de la numération orale notamment, pour évoquer les nombres dans la communication. Il s'agit de l'utilisation de pratiques de

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

référence pour la vie courante susceptible de dispenser de faire apparaître certains savoirs comme conventionnels.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Conclusion générale

Pour conclure notre travail, nous commençons par revenir à nos hypothèses en les rapprochant de nos principaux résultats. Ensuite, nous regardons les positions relatives des pratiques de référence pour la vie courante et du savoir savant dans l'enseignement actuel et dans l'enseignement ancien. Enfin, nous présentons des perspectives de recherche.

<u>Hypothèse 1 :</u>

Pour l'école primaire et pour l'étude des grandeurs, nombres et opérations, outre son intérêt historique, l'étude des organisations mathématiques anciennes est susceptible d'éclairer des choix pour les organisations mathématiques actuelles et ce pour deux raisons :

- on peut supposer que les organisations anciennes sont les « produits d'une évolution longue et complexe » (Chevallard, 1992) et de ce fait sont susceptibles de constituer des organisations mathématiques régionales ou globales. Cette propriété potentielle légitime qu'on s'y intéresse, notamment pour l'école primaire où malgré des modifications l'étude des grandeurs, nombres et opérations a de tout temps été objet d'enseignement,
- la reconstruction des organisations mathématiques anciennes permet de faire un pas de côté pour étudier les organisations actuelles.

Nous avons étudié le niveau du cours élémentaire ($2^{ème}$ et $3^{ème}$ primaire). Nous avons mis effectivement en évidence des praxéologies anciennes qui sont au moins régionales, notamment celle de la numération au cours élémentaire. À partir des années 30, elle semble être articulée avec le système métrique. On peut dire qu'on articule plusieurs champs : la numération, les grandeurs (ou le système métrique) et des pratiques de référence de la vie courante pour chacun des domaines. Il nous semble que nous voyons se réaliser cette articulation au début du siècle : cela commence par une mise en relation des technologies dans les deux domaines, puis les tâches sont harmonisées, enfin nous observons la mise en place d'une chronogenèse. Les pratiques de la vie courante permettent, nous semble-t-il, de travailler dans un registre matériel effectif puis évoqué les technologies mathématiques qui pourraient rapidement devenir de purs automatismes. Un ostensif particulier joue un rôle d'intermédiaire : il s'agit de la numération en unités. Il nous semble que cette praxéologie est effectivement globale. Apparemment, elle est pilotée par le savoir savant relatif à la numération de position. On trouve d'ailleurs ce savoir à peine transposé dans le livre de

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

l'élève. Cela est possible parce qu'il est élaboré en des termes accessibles dans le traité de référence.

Pour le cas de l'apprentissage du sens des opérations, d'une part notre étude est moins avancée, d'autre part la situation semble moins homogène que pour les nombres (peut-être est-ce aussi parce que nous n'avons pas réussi à repérer cette homogénéité). Par ailleurs, nous n'avons pas cherché à repérer le moment de l'élaboration d'une éventuelle articulation, contrairement à ce que nous avons fait pour les nombres. Nous avons tout de même mis en évidence plusieurs leviers qui sont susceptibles de constituer une structure relativement forte de ce thème. Ceux qui nous ont le plus marquée sont :

- les étapes dans l'apprentissage des techniques opératoires pour chaque opération qui constituent à la fois des techniques définitives de calcul pour des nombres particuliers et des éléments technologiques pour justifier l'algorithme,
- la progression dans l'étude des questions relatives à la connaissance de certaines grandeurs, en particulier de la longueur et de la monnaie et dans une moindre mesure de la masse (nous n'avons pas étudié les aires qui sont en général introduites à la fin du CE, ni repéré de progression particulière au CE sur la grandeur capacité même s'il est clair que son étude doit déboucher sur « les problèmes de robinet »).

En quel sens, les praxéologies mathématiques que nous avons repérées pour l'étude du sens des opérations pourraient-elles servir de référence pour l'enseignement actuel ? Nous étudions en particulier cette question pour les progressions sur les opérations qui mettent en œuvre des pratiques spécifiques à certaines grandeurs. Pour ce qui les concerne, on peut avoir le sentiment d'une longue liste de « problèmes types » à enseigner. Nous les voyons d'abord comme des organisations mathématiques qui permettent d'approfondir la connaissance des différentes grandeurs : nous pensons avoir montré, en utilisant la théorie des registres de Duval dans notre premier chapitre, comment un problème de la vie courante peut contribuer à cette connaissance. Par ailleurs, l'enseignement par « problèmes types » a souvent (et depuis les années 30 au moins) été décrié. Il est en effet admis que lorsqu'on institutionnalise des techniques très locales, les élèves ont du mal à transférer leurs connaissances à des contextes un peu différents. Nous voulons d'abord préciser que dans nos manuels, ces « problèmes types » n'arrivent jamais au début de l'apprentissage, c'est toujours après une certaine étude des opérations où on fait apparaître des structures qu'ils interviennent. Par ailleurs, comme nous voyons dans ces progressions des organisations mathématiques, ceci signifie qu'elles doivent être accompagnées d'organisations didactiques. Il nous semble qu'il y a là des équilibres à trouver entre ce qu'on institutionnalise ou pas auprès des élèves ce qui n'empêche

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

pas que les progressions servent de repères aux enseignants pour conduire les apprentissages. Ensuite, il y aurait sans doute à actualiser les références à la vie courante, quelles sont celles qu'il semble pertinent d'enseigner aujourd'hui ? Enfin, d'une certaine façon, en 1970, on a essayé d'enseigner les nombres « sans contexte » en pensant qu'on pourrait ainsi transférer à tous les contextes, ce n'est probablement pas le cas. Quels sont les contextes pertinents pour le transfert ? La grandeur longueur est sans doute tout à fait spécifique puisqu'il est bien possible qu'elle soit un objet important pour étudier l'analyse mathématique. La question du choix des contextes à enseigner se pose donc à la fois du point de vue des connaissances sur les grandeurs qu'on souhaite enseigner aux élèves et du transfert d'un contexte à un autre. Quelle dialectique peut-on envisager entre le contextualisé et le décontextualisé ?

Venons-en à ce que nous apporte la mise en évidence des praxéologies classiques pour étudier l'enseignement actuel, pour faire un « pas de côté ». Sur le plan méthodologique, à plusieurs reprises nous avons utilisé nos praxéologies comme des « praxéologies mathématiques de référence ».

Ceci nous semble avoir été particulièrement efficace pour mieux comprendre la situation actuelle de l'enseignement de la numération, cette praxéologie ancienne nous a notamment permis de repérer l'éclatement du type de tâches « conversion » à partir de la réforme (et peut-être un peu avant). Par ailleurs, nous avons pointé le rôle majeur joué par l'ostensif « numération en unités » dans les praxéologies mathématiques à la période classique, il a quasiment disparu après la réforme. On observe dans certains manuels récents un retour de la numération en unités, notamment le développement d'un type de tâches autour de la tâche « nombre de » qui vient occuper une partie de l'espace anciennement occupé par le type de tâches « conversion » sans rendre tous les services anciennement rendus par lui qui nous apparaissent aujourd'hui comme nécessaires. Nous interprétons ces retours de l'ostensif « numération en unités » comme le signe de carences dans les diverses praxéologies proposées à partir de la réforme et sa nécessité, implicitement identifiée aujourd'hui comme un problème didactique, dans l'étude la numération.

Ces praxéologies anciennes nous ont permis de concevoir un questionnaire pour des élèves d'aujourd'hui : tant pour formuler des hypothèses quant à des connaissances éventuellement problématiques que pour concevoir des exercices mettant en jeu ces connaissances. Pour ce dernier point, il est bien sûr nécessaire d'adapter les pratiques de la vie courante ancienne à celles du monde actuel, ceci ne nous est pas apparu comme une difficulté majeure après que les connaissances en jeu ont été identifiées.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

En outre, le recours aux praxéologies classiques nous a permis de formuler à peu de frais une théorie de la numération de position avec l'ostensif « écritures chiffrées des puissances de dix » qui nous permet de mettre en évidence la diversité actuelle des technologies mathématiques pour étudier un même type de tâches.

Y a-t-il un risque pour que cette méthode constitue un écran à notre lecture de la période actuelle ? On ne peut l'exclure. Le risque est en effet, nous semble-t-il, qu'elle nous conduise, à notre insu, à lire en creux la période actuelle, à ne repérer que les manques dans les praxéologies actuelles par rapport à la période classique.

<u>Hypothèse 2</u>

La réforme des mathématiques modernes a profondément détérioré les chaînes trophiques, notamment pour l'étude de la numération de position et des grandeurs. On peut interpréter certaines difficultés des élèves actuels dans ces domaines comme la conséquence de ces détériorations, les remaniements qui l'ont suivie n'étant pas parvenus à remédier à ce problème.

Nous avons élaboré un questionnaire à destination d'élèves en fin de scolarité primaire pour savoir s'ils sont capables d'utiliser conjointement leurs connaissances sur les grandeurs et les nombres pour étudier des situations qui impliquent des grandeurs (accompagnées de nombres entiers éventuellement).

Ce questionnaire nous permet de confirmer des résultats déjà connus quant à certaines difficultés d'élèves : en particulier des réussites médiocres pour des tâches de numération ou de système métrique. Par ailleurs, il nous permet notamment de pointer des ruptures entre les traitements pour différentes questions de numération ou de système métrique. Nous interprétons ces ruptures comme le reflet d'un travail qui ne permet pas aux élèves de relier les connaissances : des types de tâches anciens semblent avoir éclaté en plusieurs petits types de tâches plus ou moins isolés les uns des autres. Les deux types qui nous semblent particulièrement concernés sont ceux que nous avons appelés « conversion » et « décomposer recomposer ». Cet éclatement se manifeste selon nous de deux façons : pour les relations entre certaines unités, le travail hors contexte est relié selon le domaine dont relèvent les tâches proposées à des techniques de la numération ou du système métrique, le travail en contexte est susceptible d'être davantage rattaché à l'utilisation des quatre opérations. Une étude sommaire de manuels scolaires actuels semble confirmer que les techniques pour la numération sont effectivement différentes de celles pour le système métrique, de même pour les types de tâches. S'il existe bien une ressemblance entre certaines questions traitées dans

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

les deux domaines, il n'y a rien qui coïncide véritablement. La situation est très différente de ce qu'on trouvait dans la période classique où d'une part, les praxéologies étaient harmonisées entre les deux domaines avec un ostensif qui faisait le lien : « la numération en unités », d'autre part un type de tâches se déclinait, non seulement dans les deux domaines, mais au sein de chaque domaine selon différents « styles » que nous avons appelés : formel, intermédiaire et en contexte. Peut-être est-il d'ailleurs utile de préciser que la numération en unités n'était que peu utilisée pour les questions en contexte qui privilégient les références à la vie courante et dans lesquelles on utilisait apparemment plus volontiers des écritures chiffrées des puissances de dix plutôt que les unités de la numération ou les unités métriques non usuelles. Toutefois, pour les unités métriques, les noms des instruments de mesure étaient un moyen de faire intervenir les noms des unités métriques, en contexte.

La réforme des mathématiques modernes a complètement bouleversé l'étude de la numération de position, notamment à cause du travail en bases. Trois aspects nous semblent particulièrement importants : le lien a été rompu avec le système métrique (rupture accentuée par la création du domaine mesure), le travail en bases ne permet pas véritablement de travail dans un registre symbolique – remplacé par la manipulation et le dessin des objets qu'on manipule, le type de tâches « conversion » a éclaté. À côté de ce travail en bases, le travail en base dix est très minoré dans les manuels, mais on pressent aussi à leur lecture qu'il n'est pas besoin de dire aux enseignants ce qu'ils ont à faire pour la base dix : ils le savent. De plus, la numération en unités est très peu présente dans les trois manuels que nous avons étudiés pour la période de la réforme.

Les épisodes de la vie de l'ostensif « numération en unités » nous semblent difficiles à identifier. Néanmoins, nous avons repéré plusieurs éléments :

- cet ostensif est au cœur de toutes les technologies de la numération et du système métrique dans la praxéologie classique,
- il est contesté au moment la réforme, peut-être pour « crime d'ambiguïté », peut-être parce qu'il s'écrit partiellement avec des mots et pourrait ainsi être considéré comme du « langage usuel », non mathématique donc,
- quoiqu'il en soit il est très affaibli au moment de la réforme puisqu'il ne vit pas en bases,
- pendant la réforme et après, au moment de la contre-réforme, il est éliminé plus ou moins complètement de l'étude de la numération, ce qui supprime un ostensif qui permet la congruence entre la numération de position et le système métrique, il reste les tableaux de numération et de conversion.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

La contre-réforme valorise les écritures chiffrées des puissances de dix (ECPD) pour l'étude la numération. Même si ce n'est pas la volonté initiale, il s'agit en effet plutôt de proposer un registre symbolique pour l'étude la numération et de s'appuyer sur les changements de base introduits par la réforme pour ce faire, elles semblent venir se substituer aux anciennes unités de la numération. Nous avons d'ailleurs montré qu'on peut écrire une théorie avec elles en utilisant la théorie classique dans laquelle on remplace les unités de la numération par les ECPD. Il faut néanmoins adapter les arguments à ce nouvel ostensif. Cette théorie permet d'interpréter les technologies apparemment proposées au moment de la contre-réforme et principalement utilisées depuis. Cet ostensif a néanmoins plusieurs inconvénients par rapport aux unités de la numération : il permet de justifier l'algorithme de l'écriture chiffrée à condition d'écrire des multiplications ce qui signifie que ses besoins trophiques sont plus élevés que ceux de la numération en unités, pour la relation avec les unités métriques il est beaucoup moins congruent que la numération en unités.

Aujourd'hui, on semble assister à certains retours de la numération en unités. La valence instrumentale actuelle de cet ostensif reste néanmoins limitée. On observe le développement d'un type de tâches autour de la tâche emblématique « nombre de » appartenant au type de tâches conversions dans la période classique. Le nouveau type de tâches met toujours en relation un « nombre » (écrit en chiffres) et des unités de la numération, ceci implique donc qu'il ne met pas en relation deux unités de la numération. La tâche « combien y a-t-il de centaines dans 30 dizaines ? » ne vit donc pas dans l'enseignement actuel. Il nous semble que, pour cette raison, ce nouveau type de tâches ne permet pas notamment de traiter les questions relatives aux « retenues ». Pour ces retenues, il est en effet nécessaire, si on a par exemple 15 au rang des dizaines dans une addition posée, d'écrire : 15 dizaines = 1 centaine 5 dizaines (ceci est en fait possible en utilisant deux fois le « nombre de » : 15 dizaines=150, puis 150=1 centaine 5 dizaines mais nous n'avons pas repéré cette tâche dans les manuels). Les unités de la numération n'ont jamais véritablement disparu des techniques pour lire les nombres écrits en chiffres : elles servent à désigner les positions qu'il est toujours nécessaire de repérer pour traiter cette tâche. Toutefois, ce sont les ECPD qui semblent piloter les technologies pour les différents types de tâches, en particulier pour le type de tâches « dénombrer ». D'ailleurs, on voit réapparaître dans la période actuelle des « décompositions recompositions » en unités de la numération dont les technologies sont en ECPD.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Hypothèse 3

Certaines théories mathématiques sont susceptibles d'être plus adaptées que d'autres du point de vue de la transposition didactique.

En d'autres termes, dans certaines théories quand les besoins trophiques sont élevés, le passage à la « pratique de la théorie » (du point de vue des praxéologies) se fait au prix de grands sacrifices théoriques qui éventuellement dénaturent de façon assez substantielle la théorie initiale. La « pratique de la théorie » évolue (au moins certaines fois) en une nouvelle théorie qui peut s'interpréter dans (ou comme) une autre théorie, une théorie effective, plus ou moins complète, mais dont les besoins trophiques sont inférieurs à ceux de la théorie initiale. En général, la mise en œuvre de cette théorie effective comporte des trous peut-être car elle n'est pas pensée comme celle de la mise en œuvre d'une théorie complète.

Nous avons commencé par distinguer deux types de savoirs savants : un savoir utile à la sphère productrice des savoirs (premier type), un savoir mathématiquement correct mais probablement plus utile pour l'enseignement que pour les savants (deuxième type).

Notre étude du savoir savant relatif aux grandeurs nous a permis de montrer qu'on pouvait interpréter la plus grande partie des tâches et technologies, présentes dans les instructions depuis 1980, relatives à l'étude des décimaux et de la proportionnalité, dans une théorie élémentaire des grandeurs (savoir savant du deuxième type). Cette interprétation nous semble plus satisfaisante que celle que permet le cadre mathématique de référence car ce dernier introduit une rupture entre le mathématique et le didactique. Plus précisément le choix d'une organisation didactique qui valorise la « construction de leurs savoirs par les élèves » fait apparaître de nouveaux discours, voire de nouvelles tâches qu'on traite avec eux. Ces nouveaux discours et tâches ne sont que peu légitimes dans le savoir savant de référence constitué par le « numérique ». En revanche on peut les réinterpréter avec une théorie des grandeurs. Ceci permet de rapprocher les quatre niveaux des praxéologies actuellement à l'œuvre et de les concevoir au sein d'une théorie mathématique. Ceci permet aussi de concevoir de nouvelles tâches qui nécessitent des opérations sur objets dans le registre matériel : bien qu'*a priori* abordables par des élèves de fin d'école primaire certaines sont problématiques pour eux, de plus certaines permettent d'envisager une approche plus précoce et moins formelle de plusieurs notions mathématiques. Précisons que même si ces nouvelles tâches peuvent apparaître tout à fait légitimes du point de vue des apprentissages des élèves, la question de leur mise en œuvre nous semble poser des problèmes plutôt complexes à résoudre pour les enseignants et, de ce fait, leur viabilité serait peut-être compromise assez rapidement si elles étaient introduites dans les programmes par exemple.

Notre étude de la numération à la période classique nous a permis de montrer que les livres des élèves contiennent un texte qui est très proche du texte du traité de référence, textes qui donnent notamment une construction algorithmique de l'ensemble des entiers naturels dont on peut penser qu'elle est formulée avec des outils qui sont accessibles conceptuellement aux jeunes élèves. Une particularité de cette construction qui aboutit notamment à l'écriture chiffrée est qu'elle ne repose pas sur la division euclidienne contrairement à la théorie savante de la numération de position (actuellement à l'œuvre dans la sphère productrice des savoirs et qui l'était peut-être déjà au moment de l'écriture des traités que nous avons utilisés). Cette théorie repose sur l'ostensif « numération en unités ». La praxéologie mathématique repose en fait sur l'étude de trois numérations : la numération en unités, la numération orale et la numération positionnelle, la première permettant notamment de relier les deux autres.

Au moment de la réforme des mathématiques modernes, le texte classique du savoir n'apparaît plus dans les livres de l'élève, il peut survivre dans ceux du maître, mais surtout il n'est pas véritablement adapté au travail en bases. On voit par ailleurs apparaître ce que nous pensons être un savoir savant du premier type quant à la numération de position dans les livres pour le maître (l'écriture chiffrée d'un nombre est la suite des coefficients dans la décomposition polynomiale d'un entier dans une base). Au moment de la contre-réforme, dans un ouvrage qui a pu servir de référence, ce savoir est repris pour être transposé car il est manifestement inadapté à des élèves de primaire du point de vue des besoins trophiques qu'il requiert. Il nous semble qu'on voit, dans ce livre, des discours qui peuvent faire fonction de technologie pour les types de tâches enseignés, toutefois l'ensemble de ces discours n'est pas véritablement organisé en une théorie. L'écart avec le savoir savant du premier type n'est pas clairement indiqué, les présupposés des technologies pour les élèves ne sont pas explicités clairement. C'est à ce moment que l'ostensif ECPD devient l'ostensif de la numération : les ECPD sont considérées comme des objets premiers. Nous avons montré qu'on peut effectivement écrire une théorie probablement adaptée aux élèves (c'est-à-dire un savoir savant du deuxième type) à partir de ce qu'on trouve dans l'ouvrage de référence même si elle nous semble avoir des inconvénients que nous avons déjà signalés. On peut d'ailleurs en écrire plusieurs car plusieurs points ne sont pas fixés dans le texte que nous prenons comme référence. Nous avons appelé « théorie rénovée » l'ensemble des théories que nous avons proposées. Nous pensons que cette pluralité est susceptible d'expliquer les variations qu'on

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

trouve dans les manuels actuels pour exprimer les technologies relatives à certaines tâches de numération.

Sur ce point il nous semble qu'on retrouve une conclusion de Neyret qui pointait l'absence d'un traité pour la formation des enseignants en 1995 quant aux fractions et décimaux. Ceci nous semble aussi valable pour la numération de position des entiers, pour les élèves et sans doute pour les maîtres.

Ajoutons que dans les trois théories, la théorie classique, la théorie rénovée et la théorie savante, le zéro s'interprète de façons différentes (les différents points de vue s'articulent cependant à terme puisque les trois théories sont équivalentes). Dans la première, le zéro est un signe qui permet aux chiffres qui représentent des unités effectivement présentes d'occuper la place qui leur revient, dans la deuxième le zéro est un signe qui permet d'écrire les ECPD en leur donnant « la bonne longueur », dans la troisième le zéro est un coefficient (c'est donc un nombre). Ces trois univers, légitimes sur le plan mathématique mais qui engagent des cadres d'analyse différents, laissent présumer d'épistémologies de la numération variées chez les enseignants. On peut en fait penser que les trois théories constituent des pôles entre lesquels s'élaborent les organisations mathématiques actuellement à l'œuvre.

<u>Positions relatives du savoir savant et des pratiques de référence pour la vie courante</u>

Notre étude de la période classique met en évidence la position des pratiques sociales de référence dans l'étude de la numération et du système métrique. Il nous semble qu'on peut dire que globalement les savoirs savants (relatifs aux grandeurs et à la numération) viennent élucider les pratiques de référence relatives au mesurage pour la vie courante notamment. Ceci ne semble pas empêcher d'introduire dans les manuels des objets qui ne sont pas des pratiques de référence pour la vie courante. Par exemple, on propose des usages de certains instruments de mesure qui ne font pas partie des pratiques courantes afin de travailler certains types de tâches ; nous sommes aussi tentée de dire que la numération en unités n'est pas non plus une pratique de la vie courante mais qu'elle est introduite principalement pour élucider les deux pratiques que sont les autres systèmes de désignation : numération de position et numération orale. Il ne nous semble pas abusif d'écrire que c'est l'écologie globale du système d'enseignement qui légitime l'existence de ces objets.

Dans les manuels actuels, dans des tâches de numération, certaines pratiques de la vie courante ont un statut qui nous semble assez différent. L'exemple emblématique en est sans doute celui de la naturalisation des écritures chiffrées des puissances de dix. Dans la théorie rénovée, elles constituent le socle de la numération. Dans les manuels actuels, nous n'avons

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

pas trouvé de discours net qui indique le caractère conventionnel de ces écritures, elles sont introduites comme des références à la vie courante : les ECPD utilisées sur les pièces et billets sont sans doute emblématiques de ce choix, plus généralement les ECPD désignent de façon « naturelle » des quantités. Il semble bien que ce soit le fait que les écritures chiffrées des puissances de dix participent de « l'expérience sociale » des élèves qui légitime qu'on les utilise sans montrer leur caractère conventionnel. Nous avons aussi évoqué un phénomène similaire avec l'introduction de l'apprentissage précoce de l'algorithme de l'écriture chiffrée, en tant qu'algorithme (de type compteur), sans relation avec les unités de la numération, après la réforme. De même, la calculatrice et parfois les interactions entre élèves apparaissent comme un moyen de ne pas formuler des éléments conventionnels relatifs aux savoirs enseignés. Il s'agit bien sûr de s'appuyer sur les connaissances préalables des élèves, de motiver leurs apprentissages en s'appuyant sur leurs expériences. Peut-être est-il cependant nécessaire de relier l'apparition de ces phénomènes et l'absence d'un traité de référence pour les savoirs mathématiques à enseigner. Il nous semble par ailleurs loin d'être évident d'une part que la naturalisation de pratiques de la vie courante est une façon très opportune de motiver les apprentissages mathématiques, d'autre part que les situations choisies seraient les mêmes si on s'appuyait explicitement sur un savoir mathématique clairement identifié, c'est-à-dire un savoir savant du deuxième type. Il nous semble par exemple que se poserait différemment la question de l'utilisation de la calculatrice. Par exemple, que pourrait être une ingénierie qui permette l'élucidation d'une pratique de la vie courante telle que la calculatrice ?

<u>Perspectives de recherche</u>

Nous commençons par présenter des perspectives de recherche spécifiquement didactiques, nous poursuivons par des perspectives qui contiennent un point de vue historique.

Notre corpus de données est principalement constitué par des productions d'élèves et des manuels scolaires. À propos de la numération de position, nous avons relevé des technologies mathématiques dans ces derniers. Une étude des pratiques enseignantes dans ce domaine permettrait d'étudier les technologies effectivement enseignées et de retrouver ou non la diversité des manuels. Une étude des connaissances des élèves, à une plus grande échelle, avec des questions plus ciblées mais aussi qui englobe davantage de questions relatives à la numération et au système métrique, pourrait permettre de mieux identifier des points critiques. Nous pensons que se pose aussi la question d'élaborer des ingénieries qui donnent une place centrale à la numération en unités.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Notre étude est très centrée sur l'enseignement français et son histoire. Observe-t-on des phénomènes identiques dans d'autres pays qui ont vécu la réforme des mathématiques modernes ? dans des pays qui ne l'ont pas vécue ? dans des pays dont l'enseignement des mathématiques à l'école primaire est réputé pour son bon fonctionnement ? Plus généralement, dans ces pays, existe-t-il une théorie de référence pour les savoirs à enseigner ? Le cas échéant, que contient-elle ? comment se décline-t-elle dans les praxéologies mathématiques enseignées ? Il nous semble que dans l'hypothèse d'une réponse positive, l'étude de ces dernières questions (qui pose probablement des problèmes linguistiques complexes) pourrait permettre de gagner du temps pour l'école primaire française. En effet, malgré des spécificités socioculturelles, il n'est pas sûr qu'il existe des différences fondamentales dans les savoirs mathématiques à enseigner. Ces spécificités ne sont cependant pas à négliger : elles existent notamment à cause des différences linguistiques qui influent nécessairement sur la numération orale ; elles sont aussi liées à des choix différents concernant notamment les algorithmes des techniques opératoires, il semble par exemple que celui de la soustraction par « emprunt » est beaucoup plus répandu dans le monde que celui par « conservation des écarts » utilisé majoritairement en France, le choix de l'algorithme pour la soustraction a ensuite une incidence sur l'algorithme retenu pour la division. Le cas de l'enseignement chinois présenté par Liping Ma, qui identifie d'ailleurs les textes de référence utilisés par les enseignants, nous semblerait tout à fait intéressant à étudier.

Nous avons pointé à l'occasion de notre étude de l'enseignement ancien puis de l'analyse des résultats de notre questionnaire plusieurs questions que nous n'avons pas reprises ensuite. La question d'un enseignement plus précoce d'un symbolisme pour la division, à distinguer de l'enseignement de l'algorithme, nous semble être une question qui mérite d'être étudiée de façon plus approfondie. Ce symbolisme pourrait notamment s'appuyer sur le mot « division » et aussi sur un signe pour désigner l'opération, le choix de ce signe n'est d'ailleurs pas un problème simple. La place des schémas cotés dans l'enseignement de la résolution des problèmes d'arithmétique et les façons de les enseigner, pour lesquelles nous avons peut-être mis en évidence un moyen, nous semblent constituer une autre question importante. Elle l'est d'autant plus que nous avons soulevé le problème d'enseigner un sens des opérations qui soit transférable d'un contexte à l'autre et que l'utilisation de ces schémas constitue peut-être un levier pour faciliter le transfert. La diversité probable des pratiques enseignantes actuelles quant à l'enseignement des opérations, tant du point de vue des techniques opératoires que de leur sens, est aussi une question importante car il est bien possible que toutes les stratégies ne conduisent pas à des apprentissages équivalents pour les élèves.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Du point de vue historique, il nous semble que notre travail pourrait être poursuivi principalement selon trois directions. La première est assez ouverte. Nous avons étudié les manuels scolaires anciens sur un domaine assez restreint et au cours élémentaire, ce qui nous a permis de dégager des praxéologies mathématiques assez élaborées et utiles pour étudier l'enseignement actuel : l'enseignement de la numération de position pour les nombres entiers de 3 et 4 chiffres et l'enseignement des unités simples du système métrique. D'autres thèmes et d'autres niveaux sont peut-être susceptibles d'apporter leur contribution. En particulier, les instructions de 1923 évoquent les bases 100 et 1000 en relation avec les unités d'aire et de volume, ainsi que les unités de temps pour prolonger l'apprentissage de la numération au CM. Concernant le sens des opérations et les algorithmes des techniques opératoires, il nous semble aussi que notre étude pourrait être plus approfondie. Une deuxième direction consisterait à repérer des moments où on voit s'articuler plusieurs domaines d'enseignement, leur étude pourrait peut-être permettre de dégager des conditions pour articuler certaines notions dans l'enseignement actuel. Il nous semble que nous avons commencé ce travail en étudiant l'articulation des nombres entiers de taille moyenne et les unités simples du système métrique au début du 20$^{\text{ème}}$ siècle. Une troisième direction consisterait à élucider la logique mathématique de la collection de manuels scolaires parue avant la deuxième guerre mondiale dirigée par le mathématicien Albert Châtelet, de mieux comprendre son rôle et celui de son auteur dans l'élaboration des programmes de 1945 (et de 1938) ainsi que celui du livre « La mesure des grandeurs » et de son auteur, Henri Lebesgue.

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Bibliographie

1. Bibliographie générale

Amra, Nadia ; 1994 ; Contribution à l'étude différentielle des pratiques des élèves en classe - Comparaison entre élèves d'une classe forte et d'une classe faible. ; Mémoire de DEA ; Université Paris 7

APMEP commission du dictionnaire, 1967 ; *La mathématique parlée par ceux qui l'enseignent ;* Bibliothèque d'enseignement mathématique ; Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP), Paris

APMEP Groupe Mots. Grt., 1976 ; *Mots. T. 3 : vocabulaire de l'enseignement des mathématiques ;* Publication de l'APMEP ; Num. 015 ; Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP), Paris

Arsac, Gilbert, Dir. ; Chevallard, Yves, Dir. ; Martinand, Jean-Louis Dir., Tiberghien, Andrée Dir. ; 1994 ; *La transposition didactique à l'épreuve ;* La Pensée Sauvage Éditions, Grenoble

Artaud, Michèle ; 1997 ; Introduction à l'approche écologique du didactique - l'écologie des organisations mathématiques et didactiques ; *Actes de la 9ème école d'été de didactique des mathématiques ;* 100-139

Bahujama, 2002 ; Analyse des praxéologies mathématiques autour de la mesure des grandeurs ; *Actes de la XIème école d'été de didactique des mathématiques, Dorier et al ;* La pensée sauvage, Grenoble

Baroody, Arthur J. ; 1990 ; How and when should place-value concepts and skills be taught ? ; *Journal for research in mathematics education ;* 21/4 ; 281-286

Barouillet, Pierre, Dir. ; Camos, Valérie, Dir. ; 2002 ; Savoirs, savoir-faire arithmétiques et leurs déficience ; Ministère de la recherche ; consulté sur internet le 15 octobre 2007, www.tematice.fr/fichiers/t_article/128/article_doc_fr_Barrouillet_.rtf

Bessot, Annie ; Comiti, Claude ; Pariselle, Claude ; 1980 ; Analyse de comportements d'élèves en cours préparatoire confrontés à une tâche de construction d'un ensemble équipotent à un ensemble donné ; *Recherches en Didactique des Mathématiques ;* 1/2 ; 171-224 ; La pensée sauvage, Grenoble

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Bessot, Annie ; Comiti, Claude ; 1982 ; Appropriation des Propriétés Ordinales du Nombre par l'Eleve du Cours Preparatoire ; *Educational Studies in Mathematics ;* 13/1 ; 59-88 ; La pensée sauvage, Grenoble

Bessot, Annie ; Eberhard, Madeleine ; 1983 ; Une approche didactique des problèmes de la mesure ; *Recherches en Didactique des Mathématiques ;* 4/3 ; 293-324 ; La pensée sauvage, Grenoble

Bezout, Reynaud, 1821 ; *Traité d'arithmétique à l'usage de la marine et de l'artillerie, par Bezout ; avec des notes et des tables de logarithmes, par A.A.L.Reynaud. ;* consulté sur Internet le 21 décembre 2007, http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k201342q/f2.table

Bosch, Marianna ; Chevallard, Yves ; 1999 ; Ostensifs et sensibilité aux ostensifs dans l'activité mathématique. ; *Recherches en didactique des mathématiques ;* 19/1 ; 77-124

Bosch ; Fonseca, Gascon ; 2004 ; Incompletud de las organizaciones matematicas locales en las escolares ; *Recherches en Didactique des Mathématiques ;* 24/2.3 ; 205-250 ; La Pensée Sauvage, Grenoble

Bosch I Casabo, Marianna ; 1994 ; Les instruments du travail mathématique : le cas de la proportionnalité ; *in Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud. ;* 305-312 ; La Pensée Sauvage éditions, Grenoble

Bourbaki, 1984 ; *Eléments d'histoire des mathématiques ;* Masson

Bourbaki, chapitre V, §2 ; *Topologie générale*

Brissiaud, Rémi ; 1984 ; La lecture des énoncés de problèmes ; *in Comment font-ils ? L'écolier et le problème de mathématiques. ;* Rencontres Pédagogiques ; 4 ; INRP, Paris

Bronner, Alain ; 1997 ; *Etude didactique des nombres réels: I-décimalité et racines carrées ;* Thèse nouveau doctorat ; Université de Grenoble 1, Saint-Martin-d'Hères, FRANCE

Bronner, Alain ; 1999 ; Pratiques de calcul numérique ou algébrique utilisant des calculatrices scientifiques ou symboliques : Problèmes mathématiques et didactiques ; *Actes de la 10ème école d'été de didactique des mathématiques, Houlgate, 18-25 août 1999.*

Bronner, Alain ; 2007 ; La question du numérique : Le numérique en questions ; Habilitation à diriger des recherches ; Université Montpellier 2 ; version électronique, provisoire

Brousseau, Guy ; Brousseau, 1991-1992 ; Le poids d’un récipient. Etude des problèmes du mesurage ; *Grand N ;* 50 ; 65-87

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Brousseau, Guy ; 2002 ; Les grandeurs dans la scolarité obligatoire ; *Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques*

Brousseau, Guy ; 2001 ; L'enseignement des mathématiques dans la scolarité obligatoire : Micro et Macro - didactique ; *Article Publié in la matematica et la sua didattica n. 1- 2001 pp. 5-30 Traduction Maria Polo du texte non encore publié en français.*

Brousseau, Nadine ; 1987 ; La mesure en CM1. Compte-rendu d'activités ; Publications de l'IREM ; IREM, Bordeaux

Bruner, J. ; 1960 / 1977 ; *The process of education ;* Cambridge, MA : Harvard Univesitéy Press ; cité par Ma

Butlen, Denis ; 1985 ou 1986 ; *Introductions de la multiplication à l'école primaire : histoire, analyses didactiques, manuels actuels ;* Cahier de didactique des mathématiques ; 19 ; Paris : IREM de Paris 7.

Cauzinille-Marmèche, Evelyne ; Julo, Jean ; 1998 ; Studies of micro-genetic learning brought about by the comparison and solving of isomorphic arithmetic problems ; *Learning and Instruction ;* 8/3 ; 253-269 ; Elsevier Science Ltd, Great Britain ; téléchargé le 17 février 2008

Cazin, Kotcharian, 1984 ; Dimensionnelles (Analyse et Similitude) ; *in Encyclopædia Universalis*

Chambris, Christine ; 2007 ; Petite histoire des rapports entre grandeurs et numérique dans les programmes de l'école primaire ; *Repères - IREM ;* 69 ; 5-31

Chambris, Christine ; 2004 ; Rapports entre grandeurs, nombres et opérations dans les programmes de l'école primaire élémentaire au 20ème siècle ; Mémoire de DEA ; Université Paris 7

Chamontin, Cazier, Picot ; 2001 ; Des aires sans mesure à la mesure des aires ; *Repères IREM ;* 44 ; 33-62

Chevallard, Yves ; Bosch, Marianna ; 2002 ; Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II. Mathématisations ; *Petit x ;* 59 ; 43-76 ; Edition IREM de Grenoble

Chevallard, Yves ; 2005 ; Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique ; *Actes du 1er congrès international sur la Théorie Anthropologique du Didactique, Baeza. ;* consulté sur Internet le 26 mai 2008, http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Passe_et_present_de_la_TAD.pdf

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Chevallard, Yves ; 2002 ; Organiser l'étude 3. Ecologie et régulation ; *Dorier Jean-Luc. Dir. et al (ed) Actes de la 11ème. école d'été de didactique des mathématiques ;* La Pensée Sauvage éditions Grenoble

Chevallard, Yves ; 1992 ; Une réforme inaccomplie ; *La gazette des mathématiciens ;* 54 ; 17-21

Chevallard, Yves ; 1991 ; La transposition didactique avec un exemple d'analyse de la transposition didactique

Cirade, Gisèle ; 2006 ; *Devenir professeur de mathématiques : entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel ;* Thèse de Doctorat ; Université d'Aix-Marseille I.

Collet, Marie ; Grégoire, Jacques ; 2005 ; Le développement du système en base-dix chez les enfants de première et deuxième primaire ; *in Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques ? ;* chapitre 3 ; 79-103

Colmez, François ; vers 1975 ; Mesure en CM2 ; document dactylographié de l'IREM de Paris ; IREM de Paris

Comin, Eugène ; 2000 ; *Proportionnalité et fonction linéaire. Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire. ;* Thèse de doctorat ; Bordeaux : Université de Bordeaux 1

Crahay, Marcel, Dir. ; Verschaffel, Lieven, Dir. ; de Corte, Erik Dir. et Grégoire, Jacques Dir. Préface de Michel Fayol ; 2005 ; Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques ? ; De Boeck

Cuppens, Roger ; 2001 ; Le système de numération de Charles Cros. ; Bulletin Vert, bulletin de l'APMEP ; Num. 434 ; 355-364 ; Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP), Paris

d'Enfert, Renaud ; 2003 ; *L'enseignement mathématique à l'école primaire de la Révolution à nos jours ;* Edition INRP

DeBlois, Lucie ; 1996 ; Une analyse conceptuelle de la numération de position au primaire ; *Recherches en didactique des mathématiques ;* 16/1 ; 71-128

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

DESCO (Direction de l'enseignement scolaire, Ministère de l'éducation nationale), 2005 ; *Mathématiques - Ecole primaire ;* collection école - documents d'accompagnement des programmes ; Centre National de Documentation Pédagogique

DGESCO, 2007 ; Grandeurs et mesures ; Projet de document d'accompagnement des programmes du collège ; Direction générale de l'enseignement scolaire, Ministère de l'éducation nationale ; consulté sur Internet le 15 février 2008, http://eduscol.education.fr/D0015/doc_acc_clg_grandeurs.pdf

Dhombres, Jean ; Reignier, Jean ; Rouche, Nicolas ; 1997 ; *Grandeurs physiques et grandeurs mathématiques ;* Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM) Nivelles, Belgique

Dhombres, Jean ; Réels (Nombres) ; *in Encyclopædia Universalis*

Dorier, Jean-Luc, Dir. ; Artaud, Michèle, Dir. ; Artigue Michèle. Dir. ; Berthelot René Dir. ; Floris Ruhal Dir. ; 2002 ; *Actes de la XIème école d'été de didactique des mathématiques ;* La pensée sauvage, Grenoble ; version électronique.

DossierCE2-6, 1999 ; Evaluations CE2 - sixième, Repères nationaux, septembre 1998 ; Les dossiers ; 111 ; Ministère Education nationale, Recherche et Technologie, Direction de la programmation et du développement ; http://media.education.gouv.fr/file/71/7/4717.pdf

DossierCE2-6, 2000 ; Evaluations CE2 - 6ème, Repères nationaux, septembre 1999 ; Les dossiers ; Hors Série ; Ministère Education nationale, Direction de la programmation et du développement ; http://media.education.gouv.fr/file/73/4/4734.pdf

DossierCE2-6, 2002 ; Evaluations CE2 - sixième, Repères nationaux, septembre 2001 ; Les dossiers ; 128 ; Ministère Education nationale, Direction de la programmation et du développement ; http://media.education.gouv.fr/file/45/9/4459.pdf

DossierCE2-6, 1993 ; Evaluations CE2 - 6ème, Résultats nationaux, septembre 1993 ; Les dossiers d'éducation et formations ; 33 ; Ministère Education nationale, Direction de l'Evaluation et de la prospective

DossierCE2-6, 1995 ; Evaluations CE2 - 6ème, Résultats nationaux, septembre 1994 ; Les dossiers d'éducation et formations ; 50 ; Ministère Education nationale, Direction de l'Evaluation et de la prospective

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

DossierCE2-6, 2001 ; Evaluations CE2 - 6ème, Repères nationaux, septembre 2000 ; Les dossiers évaluations et statistiques ; 124 ; Ministère Education nationale, Direction de la programmation et du développement ; http://media.education.gouv.fr/file/66/3/4663.pdf

DossierCE2-6-5, 2003 ; Evaluations CE2 - sixième - cinquème, Repères nationaux, septembre 2002 ; Les dossiers ; Ministère de la jeunesse, de l'éducation nationale et de la recherche, Direction de l'évaluation et de la prospective ; http://media.education.gouv.fr/file/58/4/2584.pdf

Douady, Régine ; 1980 ; Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire. Enfants de 6 à 11 ans. ; *Recherches en Didactique des Mathématiques ;* 1/1 ; La pensée sauvage, Grenoble

Durey, Alain ; Martinand, Jean-Louis ; 1994 ; Un analyseur pour la transposition didactique entre pratiques de référence et activités scolaires ; *in Arsac Dir. et al., La transposition didactique à l'épreuve. ;* 73-104

Durpaire, Jean-Louis ; Bouysse, Viviane ; Jean Hébrard, Michèle Leblanc, Christine Saint-Marc, Xavier Sorbe ; 2006 ; *L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire ;* Rapport de Inspection générale de l'éducation nationale à monsieur le ministre de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche ; n° 2006-034 ; Ministère Education nationale, Enseignement supérieur, Recherche ; consulté sur Internet le 12 février 2008, http://media.education.gouv.fr/file/46/0/3460.pdf

Duval, Raymond ; 1995 ; *Sémiosis et pensée humaine ;* Peter Lang SA

Engel, Pascal ; 2006 ; Analyses et comptes rendus (Kit Fine, The Limits of Abstraction) ; *Revue philosophique de la France et de l'étranger ;* 2006/2 Tome 131 n°2 ; 217-266 ; Presses Universitaires de France ; consulté sur Internet le 20 juin 2008, http://www.cairn.info/article.php?ID_REVUE=RPHI&ID_NUMPUBLIE=RPHI_062&ID_ARTICLE=RPHI_062_0217

Euclide, 1990 ; *Les éléments. Volume I, Livres I à IV, traduits du texte de Heiberg, Introduction générale Maurice Caveing, Traduction et commentaires Bernard Vitrac ;* Bibliothèque d'Histoire des sciences ; Presses Universitaires de France, Paris

Euclide, 1994 ; *Les éléments. Volume II, Livres V à IX, traduits du texte de Heiberg. Traduction et commentaires Bernard Vitrac ;* Bibliothèque d'Histoire des sciences ; Presses Universitaires de France, Paris

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Fayol, Michel ; Barrouillet, Pierre ; Renaud, Alain ; 1996 ; Pourquoi l'écriture des grands nombres est-elle si difficile ? ; *Revue de Psychologie de l'Education ;* 3 ; 87-107

Fine, Kit ; 1998 ; The Limits of Abstraction ; *in Schirn, M. (Ed.) The philosophy of mathematics today ;* 503-629 ; Oxford: University Press ; cité par Griesel

Fluckiger, Annick ; Brun, Jean ; 2005 ; Conceptualisation et classes de problèmes dans le champ conceptuel de la mesure ; *Recherches en Didactique des Mathématiques ;* 25/3 ; 349-402 ; La Pensée Sauvage, Grenoble

Freudenthal, 1983 ; *Didactical phenomenology of mathematical structures ;* Edition Reidel, Dordrecht

Fuson, Karen C. ; Briars, Diane J. ; 1990 ; Using a base-ten blocks learning/ teaching approach for first- and second-grade place-value and multidigit addition and subtraction ; *Journal for research in mathematics education ;* 21/3 ; 180-206

Fuson, Karen C. ; Wearne, Diana ; Hiebert, James ; Murray, Hanlie G. ; Human, Pieter G. ; Olivier, Alwyn I. ; Carpenter, Thomas P. ; Fennema, Elizabeth ; 1997 ; Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction ; *Journal for research in mathematics education ;* 28/2 ; 130-162

Fuson, Karen C. ; 1992 ; Research on whole number addition and subtraction ; *in D. Grows (Ed.), Handbook of research on mathematics teachin and learning ;* 243-275 ; Macmillan, New York

Fuson, Karen C. ; 1990 ; Issues in place-value and multidigit additition and subtraction learning and teaching ; *Journal for research in mathematics education ;* 21/4

Gispert, Hélène ; 2007 ; Traités et manuels : influences croisées des sphères sociales, scolaires et académiques dans les sciences. ; *in Journée de l'école doctorale « Savoirs scientifiques » Université Paris 7 – Denis Diderot Savoirs de référence etsavoirs enseignés :quelles relations au fil de l'histoire ;* non publié

Gravemeijer, Koeno ; 1994 ; Educational development and developmental research in mathematics education ; *Journal for research in mathematics education ;* 25 ; 443-471

Griesel, Heinz ; 2007 ; Reform of the construction of the number system with reference to Gottlob Frege ; *ZDM Mathematics Education ;* 39 ; 31-38

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Harlé, André ; 1984 ; *L'Arithmétique des manuels de l'enseignement élémentaire français au début du XXe siècle ;* thèse de 3° cycle ; Université Paris VII, IREM de Picardie

Hersant, Magali ; 2005 ; La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France, d'hier à aujourd'hui ; *Repères-IREM ;* 59 ; 5-41 ; Topiques Editions

Hirsch, E.D., Jr ; 1996 ; *The schools we need and why we don't have them ;* New York: Doubleday ; cité par Ma

Hocquet, 1998 ; Métrologie Historique ; *in Encyclopædia Universalis ;* version électronique

Jarlegan, Annette ; Fayol, Michel ; Barrouillet, Pierre ; 1996 ; De soixante douze à 72, et inversement : une étude du transcodage chez les enfants de 7 ans. ; *Revue de Psychologie de l'Education ;* 1 ; 101-139

Julo, Jean ; Cauzinille-Marmèche, Evelyne ; 1996 ; L'effet de la multiprésentation : mise en évidence dans un problème de proportionnalité ; *Revue de Psychologie de l'Education ;* 1 ; 49-77 ; Presses universitaires de Rennes, Rennes

Julo, Jean ; 1995 ; *Réprésentation des problèmes et réussite en mathématiques ;* Presses universitaires de Rennes, Rennes

Julo, Jean ; 2002 ; Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? ; *Grand N ;* 69 ; 31-52 ; IREM de Grenoble

Kaput, J ; Nemirovski, R ; 1995 ; cité par Ma

Klein, Anton S. ; Beishuizen, Meindert ; Treffers, Adri ; 1998 ; The empty number line in dutch second grades : realistic versus gradual program design ; *Journal for research in mathematics education ;* 29/4 ; 443-464

Lebesgue, Henri ; 1975, nouvelle édition ; *La mesure des grandeurs ;* Editions Albert Blanchard, Paris

Lecoq, Jacques. Dir. ; APMEP Groupe Mots. Grt., 1982 ; *Mots. T. 6. Vocabulaire de l'enseignement des mathématiques ;* Publication de l'APMEP ; Num. 046 ; Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP), Paris

Lismont, Luc, Dir. ; Rouche, Nicolas, Dir. ; 1999 ; *Construire et représenter. Un aspect de la géométrie de la maternelle jusqu'à 18 ans. ;* Mathématiques de la prime enfance à l'âge adulte ; Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM) Nivelles, Belgique

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Ma, Liping ; 1999 ; *Knowing and teaching elementary mathematics ;* Lawrence Erlbaum associates, publishers. Mahwah, New Jersey. London

Marchand, Carol ; 2001 ; Le schéma : une aide pour comprendre des problèmes ? ; Mémoire professionnel de professeur des écoles 2ème année ; IUFM de Versailles, Site d'Etiolles

Marijon, A. ; 1931 ; Manuel général, reproduit dans le Vade-Mecum pour l'enseignement du calcul de A. Souché ; Nathan ; cité par Neyret

Neyret, Robert ; 1995 ; *Contraintes et détermination des processus de formation des enseignants : nombres décimaux, rationnels et réels dans les Instituts Universitaires de Formation des Maîtres ;* Thèse ; Laboratoire Leibniz - IMAG - Université Joseph Fourier Grenoble

Nguala, Jean Berky ; 2005 ; La multiprésentation, un dispositif d'aide à la résolution de problèmes ; *Grand N ;* 76 ; 45-63 ; IREM de Grenoble

Parouty, Véronique ; 2005 ; Compter sur les erreurs pour compter sans erreurs : état des lieux sur l'enseignement de la numération décimale de position au cycle 3 ; *Actes du XXXIème colloque sur la formation des maîtres. Foix mai 2004. Quelles mathématiques faire vivre à l'école ? Quels outils pour les maîtres ?, Commission Inter-IREM COPIRELEM ;* IREM de Toulouse, Toulouse

Perret, Jean-François ; 1985 ; *Comprendre l'écriture des nombres. ;* Exploration "Recherches en sciences de l'éducation" ; Peter Lang, Berne

Perrin, Daniel ; 2005 ; *Mathématiques d'école : nombres, mesures et géométrie ;* Cassini

Perrin-Glorian, Marie-Jeanne ; 1992 ; *Aires de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6ème ;* Thèse de doctorat d'état ; Université Paris 7

Perrin-Glorian, Marie-Jeanne ; 2002 ; Problèmes didactiques liés à l'enseignement des grandeurs. Le cas des aires. ; *Actes de la XIème école d'été de didactique des mathématiques, Dorier et al ;* La pensée sauvage, Grenoble ; version électronique

Pressiat, André ; 2002 ; Grandeurs et mesures : évolution des organisations mathématiques de référence et problèmes de transposition ; *Actes de la XIème école d'été de didactique des mathématiques, Dorier et al ;* La pensée sauvage, Grenoble

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Rajoson, Landy ; 1988 ; *L'analyse écologique des conditions et contraintes dans l'étude des phénomènes de transposition didactique : trois études de cas ;* Thèse de Doctorat ; Université d'Aix-Marseille II.

Revuz, André ; 1998 ; Intégration et Mesure ; *Encyclopædia Universalis ;* version électronique

Rogalski, Janine ; Samurçay, Renan ; 1994 ; Modélisation d'un "savoir de référence" et transposition didactique dans la formation de professionnels de haut niveau ; *in Arsac Dir. et al., La transposition didactique à l'épreuve. ;* 35-71

Rouche, Nicolas, Dir. ; 2002 ; *Des grandeurs aux espaces vectoriels. La linéarité comme fil conducteur ;* Mathématiques de la prime enfance à l'âge adulte ; Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM), Nivelles, Belgique

Rouche, Nicolas ; 1997 ; Faut-il enseigner les grandeurs ? ; *in Grandeurs physiques et grandeurs mathématiques ;* Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM) Nivelles, Belgique

Rouche, Nicolas ; 1992 ; *Le sens de la Mesure ;* Didier Hatier, Bruxelles

Rouche, Nicolas ; 1994 ; Qu'est-ce qu'une grandeur ? Analyse d'un seuil épistémologique ; *Repères-IREM ;* 15 ; 25-36 ; Topiques éditions, Pont à Mousson

Selter, Christoph ; 1998 ; Building on children's mathematics - a teachin experiment on grade three ; *Educational Studies in Mathematics ;* 36 ; 1-27 ; Kluwer Academic Publishers, Netherlands

Steen, L ; 1990 ; Pattern ; *in L. Steen (Ed.), On the shoulders of giants ;* 1-10 ; Washington, DC: National Academy Press ; cité par Ma

Vergnaud, Gérard ; 1981 ; *L'enfant, la mathématique et la réalité ;* Peter Lang, Berne

Verschaffel, Lieven ; De Corte, Erik ; 1996 ; Number and Arithmetic ; *in International handbook of mathematics education, chapter 3*

Verschaffel, Lieven ; Greer, Brian ; De Corte, Erik ; 2006 ; Whole number concepts and operations ; *in Lester, Frank K. (Ed.), Second handbook of Research on mathematics teaching and learning ;* 557-628

Whitney, Hassler ; 1968 a ; The mathematics of physical quantities, Part I: Mathematical Models for Measurement ; *American Mathematical Monthly ;* 75 ; 115-138

Whitney, Hassler ; 1968 b ; The mathematics of physical quantities, Part II: Quantity Structures and Dimensional Analysis ; *American Mathematical Monthly ;* 75 ; 227-256

2. Manuels scolaires

Blanc, JP ; Bramand, P ; Debû, P ; Gély, J ; Peynichou, D ; Vargas, A. ; 2004 ; Pour comprendre les mathématiques CE2 ; CE2 ; lde ; Hachette éducation ; Paris

Blanc, JP ; Bramand, P ; Debû, P ; Gély, J ; Peynichou, D ; Vargas, A. ; 2004 ; Pour comprendre les mathématiques, guide pédagogique ; CE2 ; ldm ; Hachette éducation ; Paris ; téléchargé

Boucheny, Gaston ; Guérinet, André ; 1929 ; L'arithmétique au cours moyen (1ère et 2ème année) ; CM ; lde ; Librairie Larousse ; Paris

Boucheny, Gaston ; Guérinet, André ; 1930 ; L'arithmétique au cours élémentaire (1ère et 2ème année) ; CE ; lde ; Librairie Larousse ; Paris

Brouet, V. ; Haudricourt, F. et A. ; 1905 ; Leçons et devoirs d'arithmétique et de système métrique Cours élémentaire ; CE ; lde ; Ancienne Maison Quantin ; Librairies-Imprimeries réunies Motteroz, Martinet ; Paris

Brouet, V ; Haudricourt, F. et A. ; 1905 ; Leçons et devoirs d'arithmétique et de système métrique 5000 ex. et problèmes ; CM ; lde ; Maison Quantin ; Paris ; cité par Harlé

Champeyrache, Gérard ; Fatta, Jean-Claude ; Stoecklé, Denis ; 1996 ; Math élem. ; CE2 ; lde ; Belin ; Paris

Champeyrache, Gérard ; Fatta, Jean-Claude ; Stoecklé, Denis ; 1996 ; Math élem. ; CE2 ; ldm ; Belin ; Paris

Champeyrache, Gérard ; Fatta, Jean-Claude ; 2002 ; Le nouveau Math élem ; CE2 ; lde ; Belin ; Paris

Champeyrache, Gérard ; Fatta, Jean-Claude ; 2002 ; Le nouveau Math élem ; CE2 ; ldm ; Belin ; Paris

Charnay, Roland ; Gorlier, Simone ; Perrot, Gérard ; 1984 ; Math Hebdo ; CE2 ; lde ; Classiques Hachette ; Collection dirigée par Jacques Colomb et Gérad Perrot

Charnay, Roland ; Gorlier, Simone ; Perrot, Gérard ; 1984 ; Math Hebdo - Livre du maître ; CE2 ; ldm ; Classiques Hachette ; Collection dirigée par Jacques Colomb et Gérad Perrot

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Clap, Ch. ; Milliard, P. ; 1934 ; Cours élémentaire. Arithmétique Système métrique Géométrie Calcul mental ; CE ; lde ; Librairie Delalain ; Paris

Condevaux, G. ; 1952 (dl) ; J'apprends à calculer Arithmétique Cours élémentaire et classes de 10e et 9e ; CE ; lde ; Editions Bourrelier ; Paris

Dausse, Alain Dir. ; Augé, Céline ; Perray, Jean-Yves ; Dézé, Marine ; Saux, Jean-Michel ; Galland, Marc ; 2002 ; Maths + ; CE2 ; lde ; SED éditions ; Les Mureaux

Denise, H. ; Denise, J. ; Polle, Renée ; 1972 ; Mathématique C.E.1 1er cahier, 2e cahier, 3e cahier ; CE1 ; lde ; Delagrave ; Paris

Denise, H. ; Denise, J. ; Polle, Renée ; 1972 ; Mathématique C.E.1 - Livre du maître ; CE1 ; ldm ; Delagrave ; Paris

Denise, H. ; Denise, J. ; Polle, Renée ; 1972 ; Mathématique C.E.2 1er cahier, 2e cahier, 3e cahier ; CE2 ; lde ; Delagrave ; Paris

Denise, H. ; Denise, J. ; Polle, Renée ; 1972 ; Mathématique C.E.2 - Livre du maître ; CE2 ; ldm ; Delagrave ; Paris

Denise, H. ; Denise, J. ; Polle, Renée ; 1976 ; Mathématique C.E.2 ; CE2 ; lde ; Delagrave ; Paris

Denise, H. ; Denise, J. ; Polle, Renée ; 1976 ; Mathématique C.E.2 - Livre du maître ; CE2 ; ldm ; Delagrave ; Paris

Denise, H. ; Denise, J. ; Polle, Renée ; 1978 ; Mathématique C.E.1 ; CE1 ; lde ; Delagrave ; Paris

Denise, H. ; Denise, J. ; Polle, Renée ; 1979 ; Mathématique C.E.1 - Livre du maître ; CE1 ; ldm ; Delagrave ; Paris

Denise, H. ; Denise, J. ; Polle, Renée ; 1982 ; Math CE1 - Calcul ; CE1 ; lde ; Delagrave ; Paris

Denise, H. ; Denise, J. ; Polle, Renée ; 1983 ; Math CE1 - Calcul - Livre du maître ; CE1 ; ldm ; Delagrave ; Paris

Denise, H. ; Denise, J. ; Polle, Renée ; 1982 ; Math CE2 - Calcul ; CE2 ; lde ; Delagrave ; Paris

Denise, H. ; Denise, J. ; Polle, Renée ; 1982 ; Math CE2 - Calcul - Livre du maître ; CE2 ; ldm ; Delagrave ; Paris

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Denise, H. ; Rosier, O. ; 1969 ; Calcul Cours élémentaire 2e année (avec un petit complément de mathématique moderne) ; CE2 ; lde ; Delagrave ; Paris

Denise, H. ; Rosier, O. ; 1969 ; Calcul Cours élémentaire 1re année (avec un petit complément de mathématique moderne) ; CE1 ; lde ; Delagrave ; Paris

Dumarqué, J. ; Renaud, L. ; 1934 ; Arithmétique Cours élémentaire ; CE ; lde ; Librairie Delagrave ; Paris

Eiller, Robert ; Brini, Rodolphe ; Martineu, Marcel ; Ravenel, Roger ; Ravenel, Simone ; 1979 ; math et calcul ; CE2 ; lde ; Classiques Hachette ; Paris

Eiller, Robert ; Brini, Rodolphe ; Martineu, Marcel ; Ravenel, Roger ; Ravenel, Simone ; 1980 ; math et calcul - Livre du maître ; CE2 ; ldm ; Classiques Hachette ; Paris

Eiller, Robert ; Brini, Rodolphe ; Martineu, Marcel ; Ravenel, Roger ; Ravenel, Simone ; 1987 ; math et calcul ; CE2 ; lde ; Classiques Hachette ; Paris

Eiller, Robert ; Brini, Rodolphe ; Martineu, Marcel ; Ravenel, Roger ; Ravenel, Simone ; 1990 ; math et calcul - Livre du maître ; CE2 ; ldm ; Classiques Hachette ; Paris

Eiller, Robert ; Martineu, Marcel ; Brini, Rodolphe ; Cornibé, R. ; Pradillon F. ; 1971 ; math et calcul ; CE1 ; lde ; Classiques Hachette ; Paris

Eiller, Robert ; Martineu, Marcel ; Brini, Rodolphe ; Cornibé, R. ; Pradillon F. ; 1973 ; math et calcul - Livre du maître (document de travail pour le maître) ; CE1 ; ldm ; Classiques Hachette ; Paris

Eiller, Robert ; Martineu, Marcel ; 1972 ; math et calcul ; CE2 ; lde ; Classiques Hachette ; Paris

Eiller, Robert ; Martineu, Marcel ; 1974 ; math et calcul - Livre du maître (document de travail pour le maître) ; CE2 ; ldm ; Classiques Hachette ; Paris

ERMEL (Equipe de recherche mathématique à l'école élémentaire), 1978 ; apprentissages mathématiques à l'école élémentaire, cylce élémentaire - Tome 2 ; CE ; ldm ; SERMAP OCDL ; Paris ; Institut National de Recherche Pédagogique (INRP)

ERMEL (Equipe de didactique des mathématiques), 1995 ; Apprentissages numériques et résolution de problèmes ; CE1 ; ldm ; Hatier ; Paris

ERMEL (Equipe de didactique des mathématiques), 2001 ; Apprentissages numériques et résolution de problèmes - édition en euros ; CE2 ; ldm ; Hatier ; Paris

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

Goergler, B ; Viala, A ; Andrieu, R ; 1973 ; L'univers mathématique ; CE2 ; lde ; Editions de l'Ecole ; Paris

Goupil, G ; 1912 ; Arithmétique, calcul mental, système métrique et géométrie. 3150ex. Et problèmes ; CM ; H. le Soudier ; Paris ; cité par Harlé

Guilmin, A. ; 1855 ; Cours Complet d'Arithmétique à l'usage des lycées et collèges ; Auguste Durand ; Paris ; cité par Bronner

Marijon, A. ; Masseron, R. ; Delaunay, E. ; 1950 ; Arithmétique Géométrie ; CM ; lde ; Librairie A. Hatier ; Paris ; Nouveau Cours d'Arithmétique

Minet, A. ; Patin, L. ; 1923 ; Cours pratique d'arithmétique de système métrique et de géométrie Cours élémentaire 1re et 2e années ; CE ; lde ; Librairie classique Fernand Nathan ; Paris

Mortreux, X. et O. ; 1929 ; Nouvelle arithmétique 1563 ex. et problèmes ; CM ; Belin ; Paris ; cité par Harlé

Mortreux, X. et O. ; 1930 ; Nouvelle arithmétique des écoles primaires ; CE ; lde ; Belin ; Paris

Mortreux, X. et O. ; sd (antérieur à 1923) ; Nouvelle arithmétique des écoles primaires ; CE ; ldm ; Belin ; Paris

Neveu, H. ; 1915 ; Cours d'Arithmétique à l'usage des écoles primaires supérieures, des écoles normales, et des candidats aux écoles nationales d'arts et métiers ; Masson ; cité par Bronner

Peltier, Marie-Lise ; Clavié, Claudette ; Gauch, Anne-Marie ; 1995 ; Nouvel Objectif Calcul ; lde

Peltier, Marie-Lise ; Clavié, Claudette ; Gauch, Anne-Marie ; 1995 ; Nouvel Objectif Calcul ; ldm

Peltier, Marie-Lise ; Vergnes, Danielle ; Clavié, Claudette ; 2003 ; Euro Maths ; CE2 ; lde ; Hatier ; Paris

Peltier, Marie-Lise ; Vergnes, Danielle ; Clavié, Claudette ; 2003 ; Euro Maths ; CE2 ; ldm ; Hatier ; Paris

Picard, M. ; Renucci, R. ; 1957 ; Le calcul quotidien Cours élémentaire 2ème année ; CE2 ; lde ; Fernand Nathan Editeur ; Paris ; Collection Bodard

Picard, M. ; Renucci, R. ; 1958 ; Le calcul quotidien Cours moyen 1re année ; CM1 ; lde ; Fernand Nathan Editeur ; Paris ; Collection Bodard

Picard, M. ; Renucci, R. ; 1957 (imp) ; Le calcul quotidien Cours élémentaire 1ère année ; CE1 ; lde ; Fernand Nathan Editeur ; Paris ; Collection Bodard et Conti

Plomion, Ch. ; 1923 ; Arithmétique ; CM ; Hatier ; Paris ; cité par Harlé

Pugibet, Ch. ; Adam, A. ; Gason, P. ; 1955 ; Arithmétique Cours moyen (1re et 2e années) ; CM ; lde ; Librairie Armand Colin ; Paris ; Cours d'arithmétique Ch. Pugibet

Royer, Maurice ; Court, Planel ; 1942 ; Arithmétique Cours moyen (première et deuxième années) ; CM ; lde ; Librairie Armand Colin ; Paris

Royer, M ; Court, P ; 1928 ; Arithmétique 2488 ex. et problèmes ; CM ; Armand Colin ; Paris ; cité par Harlé

Such, Simone ; Géard, O. ; Martail, S. ; 1977 ; mathématique - Livre de l'élève ; CE2 ; lde ; Technique et Vulgarisation ; Paris

Such, Simone ; Géard, O. ; Martail, S. ; 1977 ; mathématique - Livre du maître ; CE2 ; ldm ; Technique et Vulgarisation ; Paris

Such, Simone ; Hervé, A. ; 1978 ; mathématique - Livre de l'élève ; CM1 ; lde ; Technique et Vulgarisation ; Paris

Such, Simone ; Hervé, A. ; 1978 ; mathématique - Livre du maître ; CM1 ; ldm ; Technique et Vulgarisation ; Paris

Vassort, Lucienne ; Vassort, Maurice ; 1952 ; Le calcul vivant Cours élémentaire et moyen ; CE - CM ; lde ; Librairie Hachette

Vassort, Lucienne ; Vassort, Maurice ; 1950 ; Le calcul vivant Cours élémentaire ; CE2 ; lde ; Librairie Hachette

Vassort, Lucienne ; Vassort, Maurice ; 1949 ; Le calcul vivant Cours élémentaire 1ère année ; CE1 ; lde ; Librairie Hachette

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008

tel-00338665, version 3 - 16 Nov 2008